Esame MdF, 12 Luglio 2004

Esercizio 1

Eq. di continuità: $\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$

Moto potenziale: $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$

Continuità: $\boxed{\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \nabla^2\phi = 0}$

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = U_\infty\left[1 + \frac{2\pi h}{l}\, e^{\cdots}\cos\ldots\right]$$

$$v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -U_\infty\frac{2\pi h}{l}\, e^{\cdots}\sin\ldots$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = -U_\infty\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 h\; e^{\cdots}\sin\ldots$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = +U_\infty\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 h\; e^{\cdots}\sin\ldots$$

Quindi: $\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$

$\longrightarrow \frac{D\rho}{Dt} = 0$

1. Il moto è stazionario (v_x e v_y non dipendono dal tempo), è piano (v_x e v_y dipendono da x e y) è incomprimibile (perché $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \iff \nabla^2\phi = 0$), è irrotazionale ($\vec{\omega} = \vec{\nabla}\times\vec{v}$) perché $\exists\,\phi$ t.c. $\vec{\nabla}\times\vec{v} = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi \equiv 0$.

2. No, il moto e' stazionario.

3. No. Il moto non può essere comprimibile: $\frac{D\rho}{Dt} = 0$.

4. Funzione di corrente ψ

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U_\infty \left(1 + \frac{2\pi h}{\ell} e^{-\frac{2\pi y}{\ell}} \cancel{\cos} \frac{2\pi x}{\ell} \right)$$

$$\psi = U_\infty \int \left(1 + \frac{2\pi h}{\ell} e^{\cdots} \cos \ldots \right) dy =$$

$$= U_\infty \left[y - h\, e^{\cdots} \cos \ldots \right] + f(x)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = U_\infty \frac{2\pi h}{\ell} e^{-\frac{2\pi y}{\ell}} \sin \frac{2\pi x}{\ell} = \quad (\leftarrow -v_y)$$

$$= U_\infty \frac{2\pi h}{\ell} e^{\cdots} \sin \ldots + f'(x)$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad f(x) = \text{cost.}$$

scelgo arbitrariamente $f(x) = 0 \quad \longrightarrow$

$$\boxed{\psi = U_\infty \left[y - h\, e^{-\frac{2\pi y}{\ell}} \cos \frac{2\pi x}{\ell} \right]}$$

5. Le linee di corrente sono linee a $\psi = \text{cost.}$;
la parete e' data da $\psi = 0 \longrightarrow$

$$y = h\, e^{-\frac{2\pi y}{l}} \cos \frac{2\pi x}{l}$$

$$y\, e^{\frac{2\pi y}{l}} = h \cos \frac{2\pi x}{l}$$

$$-h \leq y\, e^{2\pi y/l} \leq h$$

$$\left| \frac{y}{l} e^{2\pi y/l} \right| \leq \frac{h}{l} \ll 1$$

$$\longrightarrow \quad \frac{y}{l} \ll 1 \qquad \boxed{y \ll l}$$

Quindi la parete e' definita da $\boxed{y \approx h \cos \frac{2\pi x}{l}}$

6. Bernoulli

$$\frac{1}{2}\left(v_x^2 + v_y^2\right) + \frac{p}{\rho_0} = \frac{1}{2} U_\infty^2 + \frac{p_\infty}{\rho_0}$$

$$\frac{1}{2}\left(v_x^2 + v_y^2\right) = \frac{1}{2} U_\infty^2 \left[1 + \frac{4\pi h}{l} e^{\cdots} \cos \ldots + \left(\frac{2\pi h}{l} e^{\cdots}\right)^2 \left[\cos^2(\,) + \sin^2(\,)\right] \right]$$

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = -\left[\frac{4\pi h}{l} e^{-\frac{2\pi y}{l}} \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + \left(\frac{2\pi h}{l} e^{-\frac{2\pi y}{l}}\right)^2 \right]$$

Esercizio 2

1. Il moto si genera perché il fluido è viscoso.

2. Dopo la messa in movimento della piastra $\exists$ un transitorio

3. Per $t \rightarrow \infty$ l'eq. di N.S. si riduce a

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \quad \rightarrow \quad v_x = Ay + B$$

con $v_x = 0$ per $y = h$

$v_x = U_0$ per $y = 0$

$$\rightarrow \quad v_x = U_0 \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

4. Il transitorio iniziale è retto dall'eq. PDE:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

5. $\tilde{v}_x = \dfrac{v_x}{U_0} \qquad \tilde{y} = \dfrac{y}{h} \qquad \tilde{t} = \dfrac{t}{h^2/\nu}$

Scala di tempo viscosa: $\boxed{h^2/\nu}$

PDE

$$\Longrightarrow \quad \frac{\nu U_0}{h^2} \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{t}} = \nu \frac{U_0}{h^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}^2}}$$

6. Tempo di smorzamento $= \dfrac{10^{-2}\ m^2}{1.138 \times 10^{-6}\ m^2/s} = 8787$ secondi