



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA

---

Scuola Politecnica

Corso di Laurea Magistrale in  
Ingegneria Meccanica  
Energia e Aeronautica

Tesi di Laurea Magistrale

**Tecniche multiscala per lo studio di  
flussi attraverso mezzi porosi**

**Relatore**

Prof. Ing. Alessandro Bottaro

**Correlatore**

Dott. Giuseppe A. Zampogna

**Candidato**

Gaetano Macrì

---

Anno Accademico 2014/2015

*Ai miei genitori*

C'è una forza motrice più forte del vapore, dell'elettricità e  
dell'energia atomica: la volontà.

Albert Einstein

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>6</b>
1.1	Biomimetica: imparare dalla natura . . . . .	6
1.2	Tecniche di omogeneizzazione . . . . .	9
1.3	Condizioni di interfaccia . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Teoria dell'omogeneizzazione per mezzi porosi</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>Risultati microscopici</b>	<b>20</b>
3.1	Fibre cilindriche allineate . . . . .	21
3.2	Fibre cilindriche alternate . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Risultati macroscopici</b>	<b>31</b>
4.1	Condizioni di interfaccia . . . . .	31
4.2	Direct Numerical Simulations (DNS) . . . . .	35
4.2.1	DNS con fibre cilindriche allineate . . . . .	36
4.2.2	DNS con fibre cilindriche alternate . . . . .	36
4.2.3	Confronto tra i due casi . . . . .	41
4.3	Validazione del modello omogeneo con l'utilizzo di DNS . . . .	43
4.4	Studio parametrico con il modello omogeneo . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Strumenti numerici impiegati</b>	<b>54</b>
5.1	Metodo dei Volumi Finiti . . . . .	54
5.2	Metodo delle Differenze Finite . . . . .	56
5.3	Calcoli microscopici . . . . .	58
5.4	Solutore delle equazioni di Navier-Stokes . . . . .	59
5.5	Configurazione macroscopica studiata con le DNS . . . . .	62
5.6	Convergenze spaziali e temporali dei risultati ottenuti . . . .	64
5.6.1	Calcoli microscopici . . . . .	64

5.6.2	DNS . . . . .	67
5.6.3	Calcoli macroscopici . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>79</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>82</b>

# Prefazione

Lo scopo di questa tesi é quello di studiare come un fluido e un mezzo poroso interagiscono tra loro, in quanto questo genere di interazione é frequente in natura. L'attenzione é focalizzata su un rivestimento costituito da filamenti cilindrici, applicando il metodo dell'omogeneizzazione per separare le scale che caratterizzano il fenomeno: quella microscopica, legata al diametro dei filamenti, quella mesoscopica, correlata all'altezza degli stessi e, infine, la scala macroscopica che interessa il fenomeno globale. A questo si aggiunge uno studio delle condizioni al contorno macroscopiche tra mezzo poroso e fluido. Con i calcoli microscopici ricaviamo il tensore di permeabilità, mentre con quelli macroscopici i campi di moto incogniti del fluido. Il fine ultimo é quello di validare una teoria di omogeneizzazione a tre scale, sviluppata ad hoc per fibre cilindriche, che consente di ottenere risultati simili alle simulazioni numeriche dirette, con un notevole risparmio in termini computazionali.

# Abstract

The purpose of this thesis is to study how a fluid interacts with a porous medium, since this kind of interaction can be found in Nature. We focus on a coating made by cylindrical fibres. A homogenization method is used to separate the scales which characterize the phenomenon: the microscopic, related to the diameter of the fibres, the mesoscopic, related to their height and the macroscopic one, affecting the global phenomenon. Moreover a study of the boundary conditions between a porous medium and a fluid has been performed. With the microscopic calculations we get the permeability tensor, while, with the macroscopic ones, the unknown effective fields, i.e. the velocity and the pressure are obtained. Our goal is to validate the theory of homogenization, developed for cylindrical fibres, which allows to obtain similar results to direct numerical simulations, but with a much smaller computational cost.

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Biomimetica: imparare dalla natura

Imparare sulla natura o imparare dalla natura. Sono entrambe esperienze coinvolgenti, ma basta una piccola preposizione per capovolgere la prospettiva e farci intravedere un mondo diverso, in cui la vita dell'uomo si sviluppa a partire da quella naturale e si intreccia con essa. Il termine biomimetica indica il trasferimento di processi biologici dal mondo naturale a quello artificiale: mimando i meccanismi che governano la natura, l'uomo può trovare la soluzione ad innumerevoli problemi. Le applicazioni di questo principio sono molte. Si può in un certo senso affermare che il primo ad applicare la biomimetica fu Leonardo che, nei suoi studi sulle macchine volanti, si ispirava al volo degli uccelli. Una tra le prime applicazioni della biomimetica fu il tetto del Crystal Palace di Londra (figura 1.1), costruito su progetto dell'architetto e botanico Joseph Paxton a metà del XIX secolo che prese ispirazione da una pianta appartenente alla famiglia delle ninfee, la *Victoria Amazonica*. L'edificio, distrutto da un incendio negli anni Trenta, venne dotato di una struttura estremamente leggera che massimizzava l'esposizione al sole, grazie al modello tratto dalla foglia di ninfea. Un altro esempio è quello del velcro (figura 1.2), inventato nel 1941 dall'ingegnere svizzero George de Mestral, ispirato dai piccoli fiori che si attaccavano saldamente al pelo del suo cane ogni volta che lo portava a passeggio. Analizzandoli al microscopio, de Mestral notò che ogni petalo presentava alla sommità un microscopico uncino, capace di incastrarsi ovunque trovasse un appiglio naturale. Anche il Gecko Tape (figura 1.3), un nastro adesivo in fase di sviluppo trova una controparte naturale nelle zampe del gecko. Esso, infatti, è in grado di arrampicarsi su

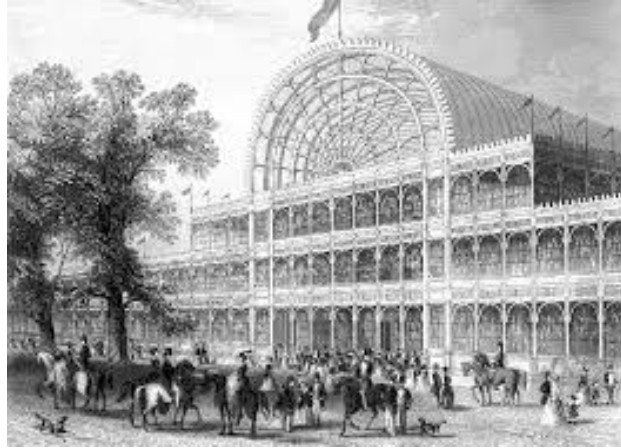


Figura 1.1: Il Crystal Palace fu eretto a Londra nel 1851 per ospitare la prima Esposizione Universale.

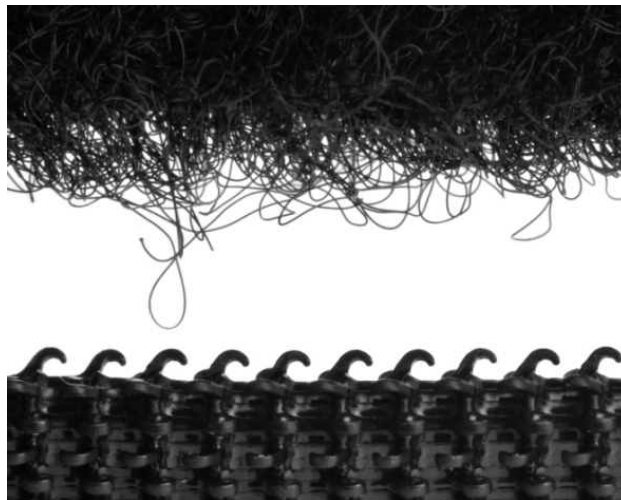


Figura 1.2: Il velcro é costituito da due parti differenti: una striscia di tessuto, chiamata asola, con un fondo rigido da cui spuntano piccoli anelli e da un'altra striscia adiacente, da cui spuntano dei piccoli uncini flessibili.





Figura 1.3: Le zampe del geco hanno attirato molta attenzione per la capacità di aderire a varie superfici senza la necessità di usare secrezioni adesive. Recenti studi sulle setole poste nella parte inferiore delle zampe hanno dimostrato che le forze attrattive che tengono i gechi attaccati alle superfici sono interazioni di van der Waals tra le setole e le stesse superfici. A ciò si ispira il Gecko Tape.

qualsiasi superficie solida, grazie a una miriade di setole microscopiche che ricoprono le sue zampe. Che dire poi della fotosintesi? Essa è un fenomeno che si studia abitualmente sui libri di scuola per capire come fanno le piante a trasformare sole, acqua e biossido di carbonio in carboidrati ed ossigeno utilizzando la clorofilla (figura 1.4). Un meccanismo a dir poco affascinante, la cui riproduzione artificiale potrebbe consentire di progettare oggetti capaci di catturare l'energia solare e di utilizzarla producendo quelli che potremmo definire “combustibili solari”, derivati dalla scomposizione dell'acqua in ossigeno ed idrogeno. Lo scopo di questa tesi è quello di sviluppare un modello che simuli l'interazione tra un rivestimento poroso e un fluido. Tale esigenza è dovuta al fatto che, mimando il piumaggio degli uccelli, si vorrebbe applicare dei rivestimenti poroelastici sulle ali di velivoli ad ala mobile in modo da ottimizzare i parametri aerodinamici fondamentali. Il lavoro svolto nella tesi costituisce un primo step dello studio, dove il mezzo viene supposto rigido.

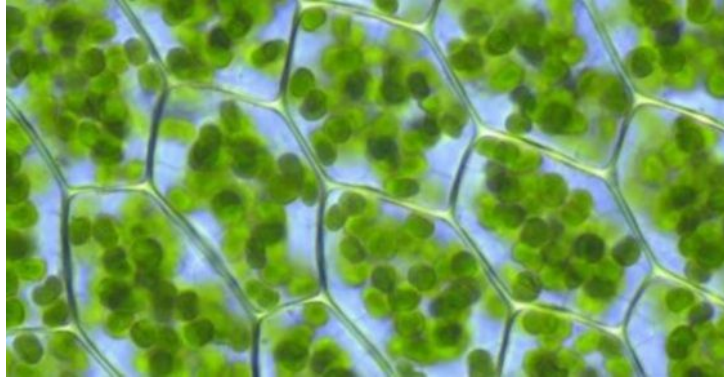


Figura 1.4: La clorofilla é un pigmento isolato nel 1817 da Joseph Bienaimé Caventou. É il fattore determinante nella fotosintesi clorofilliana.

## 1.2 Tecniche di omogeneizzazione

Quando si parla di un rivestimento poroso si potrebbe commettere l'errore di focalizzarsi unicamente su una scala fenomenologica (macroscopica), che é molto più grande della microscala dei pori e dei grani. Ci sono diversi studi a riguardo, come ad esempio quelli di Battiato (2012), dove viene postulata la legge di Darcy-Brinkmann nel mezzo poroso. In questo caso la permeabilità viene inserita nel modello matematico come un parametro da calibrare. Per una conoscenza più profonda della dipendenza della meccanica della macroscala dalla microstruttura, sono state dedotte delle equazioni macroscopiche partendo da un modello idealizzato di struttura microscopica. Una strategia che é stata utilizzata, tra gli altri, da Mei & Vernescu (2010), é una tecnica di omogeneizzazione. Ci sono molti riferimenti in letteratura su questa teoria. Zick & Homsy (1982), sfruttando basi teoriche già esistenti per lo studio di flussi attorno a corpi simmetrici a bassi numeri di Reynolds, riuscirono a calcolare rigorosamente le costanti di permeabilità per un reticolo uniforme di sfere. L'assunzione principale su cui si fonda questa teoria é supporre l'esistenza di due o più scale di lunghezza molto diverse tra loro: la microscala e la macroscala, caratterizzate rispettivamente da lunghezze  $l$  e  $L$ , tali che  $\frac{l}{L} = \epsilon \ll 1$ . La tecnica di omogeneizzazione si sviluppa in più fasi, che vengono applicate alle leggi puntuali che governano il fenomeno studiato (nel nostro caso le equazioni di Navier-Stokes):

- si separano le scale sulla base di un'opportuna normalizzazione;

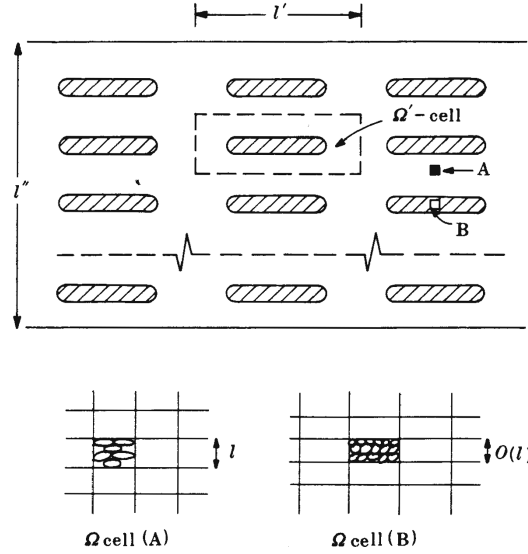


Figura 1.5: Mezzo poroso schematizzato con tre scale di lunghezza, secondo la trattazione di Mei & Vernescu (2010).

- si esegue un'espansione a scale multiple che consente di ottenere i problemi su scala microscopica, definiti su una cella elementare in cui la soluzione è supposta periodica;
- con una opportuna definizione di media spaziale, si mediano i risultati ottenuti per ottenere delle informazioni da trasferire al set di equazioni macroscopiche, anch'esse dedotte tramite la media spaziale introdotta.

Mei & Auriault (1991) estesero la teoria dell'omogeneizzazione a un mezzo con più scale, insistendo in particolare sul caso a tre scale. Ad eccezione della macroscale, il mezzo poroso viene ipotizzato periodico a tutte le altre scale. In questa tesi partendo dalla teoria di Mei & Vernescu (2010) (figura 1.5) utilizziamo un approccio a tre scale di lunghezza. Quest'ultimi considerano un mezzo poroso costituito da una struttura lenticolare periodica e annidata. Sono presenti, inoltre, due celle periodiche differenti per la microscale e la mesoscale. Le tre scale sono così suddivise:  $l$ , che corrisponde alla microscale,  $l'$ , legata alla mesoscale e  $l''$  che rappresenta la scala globale del mezzo. La teoria utilizzata in questo lavoro si concentra, invece, su filamenti cilindrici, sull'impiego di un'unica cella periodica e su una separazione delle scale differente.

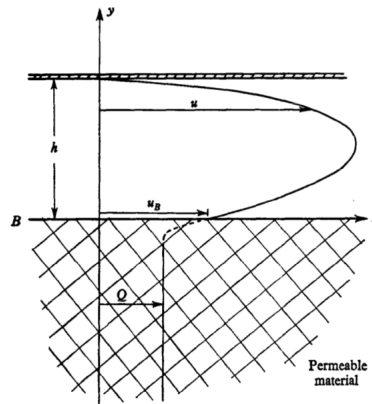


Figura 1.6: Profilo di velocità in canale orizzontale ricavato applicando la condizione al contorno di Beavers & Joseph (1967).

### 1.3 Condizioni di interfaccia

Il metodo sinora descritto vale solo per il flusso all'interno del dominio poroso, lontano dai suoi contorni, visto che abbiamo ipotizzato la periodicità della soluzione nella cella elementare. Dunque è molto importante impostare correttamente le condizioni al contorno del dominio poroso, in particolare dove il reticolo poroso si interrompe ed è a contatto con una regione puramente fluida. In letteratura le condizioni di interfaccia sono trattate in modo piuttosto vario e rappresentano un problema ancora aperto. Tra le più utilizzate troviamo quella di Beavers & Joseph (1967), che ipotizzarono la presenza di una velocità di slip sull'interfaccia tra fluido e regione porosa (figura 1.6), legata alla tensione tangenziale. Secondo il loro studio, quest'ultima è inversamente proporzionale a  $\sqrt{K}$ , dove  $K$  è la permeabilità del mezzo poroso. Saffman (1971) diede una giustificazione teorica alla condizione di Beavers & Joseph (1967). Dagan (1979) sviluppò una generalizzazione della legge di Darcy per flussi non uniformi e utilizzò la condizione di Beavers & Joseph (1967) per dimostrare questa legge. Williams (1978) riuscì a stabilire un legame tra la tensione tangenziale, la porosità, la permeabilità e la viscosità. Vafai & Kim (1990) presentarono una soluzione esatta per la regione di interfaccia tra mezzo poroso e fluido nel caso in cui il rivestimento poroso è applicato su una lastra piana. La velocità di slip in questo caso dipende dal numero di Reynolds, da un parametro di inerzia  $\Lambda$  e dalla permeabilità.



## Capitolo 2

# Teoria dell'omogeneizzazione per mezzi porosi

In questo capitolo presentiamo una teoria di omogeneizzazione applicata al caso particolare di mezzi porosi costituiti da cilindri paralleli rigidi. Vista la struttura del mezzo poroso che abbiamo deciso di considerare (figura 2.1), possiamo sviluppare un'analisi a tre scale. Si definisce una cella elementare  $V$ , detta anche cella microscopica, all'interno della quale i campi incogniti sono supposti periodici nelle direzioni  $x_1$  e  $x_2$ . Essa contiene un solo cilindro come si può vedere in figura 2.1.  $V_f$  é il volume occupato dal fluido e  $V_s$  quello occupato dal solido, in modo tale che  $V = V_f + V_s$ , mentre  $\Gamma$  rappresenta l'interfaccia fluido-struttura. Definiamo, inoltre, la porosità  $\vartheta$  nel seguente modo:

$$\vartheta = \frac{V_f}{V} = 1 - \frac{V_s}{V}.$$

Dobbiamo dunque introdurre tre scale di lunghezza: la microscala  $l$ , che rappresenta il diametro dei filamenti, la mesoscala  $h$ , che corrisponde all'altezza degli stessi, e la macroscale  $L$  che interessa il fenomeno globale (figura 2.1). Le relazioni d'ordine tra le tre scale sono:

$$\frac{l}{h} = \mathcal{O}(\epsilon), \quad \frac{h}{L} = \mathcal{O}(\epsilon) \Rightarrow \frac{l}{L} = \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

I campi di velocità e pressione sono governati dalle equazioni di Navier-Stokes (NSE):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_i} &= 0 \\ \rho \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{t}} + \rho \hat{u}_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} &= -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_i} + \mu \hat{\nabla}^2 \hat{u}_i \end{aligned}$$

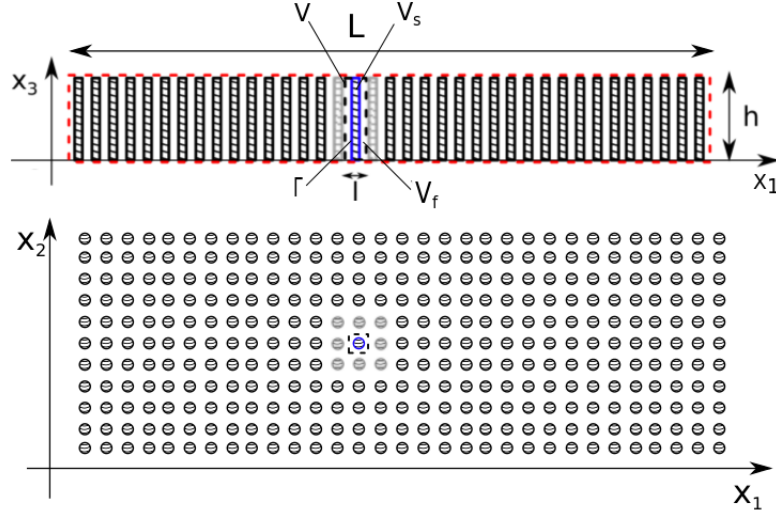


Figura 2.1: Vista del mezzo poroso costituito da fibre cilindriche. L'estensione del dominio macroscopico é rappresentata dal rettangolo tratteggiato in rosso: la dimensione mesoscopica in direzione  $x_3$  é molto più piccola di quella macroscopica in direzione  $x_1$ . La cella microscopica é definita dal rettangolo tratteggiato in nero.

definite su  $V_f$ , con  $\hat{u}_i = 0$  su  $\Gamma$ . Nella direzione  $x_3$  le condizioni richieste sono:

$$\hat{u}_i(x_1, x_2, 0, t) = 0, \quad \hat{u}_i(x_1, x_2, h, t) = U_i^h$$

con  $U_i^h$  ignoto a priori. Ipotizziamo, inoltre, che il gradiente globale di pressione sia bilanciato dai termini viscosi locali, per cui vale la relazione:

$$\mathcal{O}\left(\frac{P}{L}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\mu U}{l^2}\right). \quad (2.0.1)$$

Le variabili adimensionalizzate sono legate a quelle dimensionali dalle seguenti relazioni:

$$\hat{x}_i = lx_i, \quad i = 1, 2; \quad \hat{x}_3 = hx_3; \quad \hat{t} = \frac{l}{U}t; \quad \hat{u}_i = Uu_i, \quad i = 1, 2; \quad \hat{u}_3 = \epsilon Uu_3.$$

Considerando queste normalizzazioni, possiamo osservare che due scale definiscono il gradiente di pressione, a seconda della direzione in cui viene calcolato

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_i} = \frac{\mu UL}{l^3} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \quad \text{e} \quad \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_3} = \frac{\mu Uh}{l^3} \frac{\partial p}{\partial x_3} = \epsilon \frac{\mu UL}{l^3} \frac{\partial p}{\partial x_3}.$$

Sostituendo nelle equazioni principali otteniamo:

$$\frac{U}{l} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\epsilon U}{h} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\rho \left( \frac{U^2}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{U^2}{l} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\epsilon U^2}{h} u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \right) = - \frac{\mu U L}{l^3} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu U}{l^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\mu U}{h^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2}, \quad i, j = 1, 2, \quad (2.0.2)$$

$$\rho \left( \frac{\epsilon U^2}{l} \frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\epsilon U^2}{l} u_j \frac{\partial u_3}{\partial x_j} + \frac{\epsilon^2 U^2}{h} u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = - \epsilon \frac{\mu U L}{l^3} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \epsilon \frac{\mu U}{l^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_j^2} + \epsilon \frac{\mu U}{h^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}, \quad j = 1, 2. \quad (2.0.3)$$

Definendo il numero di Reynolds come  $Re = \frac{\rho U l}{\mu}$  e moltiplicando le equazioni (2.0.2) e (2.0.3) rispettivamente per  $\frac{l}{\rho U^2}$  e  $\frac{l}{\epsilon \rho U^2}$ , l'equazione normalizzata della quantità di moto diventa:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \epsilon^2 u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3} = - \frac{1}{\epsilon^2 Re} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \epsilon^2 \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2}, \quad j = 1, 2 \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.0.4)$$

La conservazione della massa, invece, si trasforma in:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \epsilon^2 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Se  $l$  è sufficientemente piccolo in modo che il numero di Reynolds sia di ordine  $\epsilon$ , l'equazione della quantità di moto può essere riscritta in questo modo:

$$\epsilon^3 \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \epsilon^2 u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \epsilon^4 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2}, \quad j = 1, 2 \quad i = 1, 2, 3.$$

Introduciamo le variabili microscopiche  $(x_1, x_2)$ , la variabile mesoscopica  $x'_3 = \epsilon x_3$ , le variabili macroscopiche  $(x''_1, x''_2) = \epsilon^2(x_1, x_2)$  e le espansioni:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \epsilon \mathbf{u}^{(1)} + \dots \quad \text{e} \quad p = p^{(0)} + \epsilon p^{(1)} + \dots, \quad (2.0.5)$$

dove  $\mathbf{u}^{(i)}$  e  $p^{(i)}$  sono funzioni di  $(x_1, x_2, x'_3, x''_1, x''_2, t)$ . Gli operatori di derivazione assumono la seguente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x''_i}, \quad i = 1, 2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \rightarrow \epsilon \frac{\partial}{\partial x'_3},$$



e

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} &\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} + 2\epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i''} + \epsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i'' \partial x_i''}, \quad i = 1, 2, \\ \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_3} &\rightarrow \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3' \partial x_3'}.\end{aligned}$$

Sostituendo queste espansioni nelle equazioni che governano il fenomeno e raccogliendo i termini con lo stesso ordine di grandezza, otteniamo:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^N (\epsilon^j \frac{\partial u_i^{(j)}}{\partial x_i} + \epsilon^{j+1} \frac{\partial u_i^{(j)}}{\partial x_i'}) = 0, \\&\sum_{l=0}^N \epsilon^{l+3} [\frac{\partial u_i^{(l)}}{\partial t} + \sum_{n+m=l} u_j^{(n)} (\frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial x_j}) + \\&\quad + \epsilon^2 \sum_{n+m=l} u_j^{(n)} (\frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial x_j''}) + \\&\quad \epsilon^3 \sum_{n+m=l} u_3^{(n)} (\frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial x_3'})] = \\&\quad - \sum_{l=0}^N (\epsilon^l \frac{\partial p^{(l)}}{\partial x_i} + \epsilon^{l+1} \frac{\partial p^{(l)}}{\partial x_3'} + \epsilon^{l+2} \frac{\partial p^{(l)}}{\partial x_i''}) + \\&\quad \sum_{l=0}^N (\epsilon^{l+2} \frac{\partial^2 u_i^{(l)}}{\partial x_j^2} + 2\epsilon^{l+4} \frac{\partial u_i^{(l)}}{\partial x_j \partial x_j''} + \epsilon^{l+6} \frac{\partial^2 u_i^{(l)}}{\partial x_j''^2} + \epsilon^{l+6} \frac{\partial^2 u_i^{(l)}}{\partial x_3'^2}).\end{aligned}$$

Per l'ordine principale in  $\epsilon$  si deducono le seguenti equazioni:

$$u_i^{(0)} = 0 \text{ su } \Gamma, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.0.6)$$

$$\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.0.7)$$

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2; \quad (2.0.8)$$

per l'ordine  $\epsilon$ :

$$0 = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \quad (2.0.9)$$

$$0 = -\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_3'}; \quad (2.0.10)$$

e per l'ordine  $\epsilon^2$ :

$$0 = \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i''} - \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, \quad (2.0.11)$$

$$0 = \frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_3'}. \quad (2.0.12)$$

L'equazione (2.0.8) implica che  $p^{(0)}(\mathbf{x}'')$  (il termine principale della pressione dipende solo dalla macroscale) e l'equazione (2.0.9) comporta che  $p^{(1)} = p^{(1)}(x_3', x_1'', x_2'')$ , cioè il termine di ordine  $\epsilon$  della pressione non dipende dalla microscale. Visto che l'equazione (2.0.12) é lineare, una soluzione può essere scritta come:

$$u_3^{(0)} = -K_{33} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_3'}. \quad (2.0.13)$$

Sostituendo l'espressione (2.0.13) nell'equazione (2.0.12), si ottiene l'equazione per  $K_{33}$ :

$$\frac{\partial K_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial K_{33}}{\partial x_2^2} = -1. \quad (2.0.14)$$

Essa ammette un'unica soluzione se corredata dalle condizioni al contorno  $K_{33} = 0$  (dedotta da (2.0.6)) e  $K_{33}(x_1, x_2)$  periodica su  $V$ . Siccome non abbiamo dipendenza da  $x_3'$ , essa può essere risolta sulla proiezione di  $V_f$  nel piano  $(x_1, x_2)$ . Nello stesso modo possiamo concludere che la soluzione delle equazioni (2.0.7) e (2.0.11) può essere scritta come

$$u_i^{(0)} = -K_{ij} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j''}, \quad (2.0.15)$$

$$p^{(2)} = -A_j \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j''} + p_0^{(2)}, \quad j = 1, 2, \quad (2.0.16)$$

dove  $p_0^{(2)}$  é costante rispetto a  $x_j$ ,  $j = 1, 2$ . Le equazioni che devono essere soddisfatte per  $K_{ij}$  e  $A_j$  sono ottenute sostituendo (2.0.15) e (2.0.16) in (2.0.6), (2.0.7) e (2.0.11), ricavando così il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 K_{ij}}{\partial x_k^2} = \delta_{ij}, & i, j, k = 1, 2 \\ \frac{\partial K_{ij}}{\partial x_j} = 0, & i, j = 1, 2 \\ K_{ij} = 0 & \text{su } \Gamma, \quad i, j = 1, 2 \\ K_{ij}(x_1, x_2) & \text{periodica su } V, \end{cases} \quad (2.0.17)$$

anch'esso valido sulla proiezione di  $V_f$  nel piano  $(x_1, x_2)$ . Per trovare le equazioni per il campo di velocità a livello macroscopico é necessario introdurre la seguente media integrale:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_f} f dx_1 dx_2 dx_3' \quad (2.0.18)$$

dove  $V_f$  rappresenta il volume di controllo. In definitiva abbiamo le seguenti sei incognite:

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.0.19)$$

che possono essere trovate risolvendo i problemi differenziali (2.0.14) e (2.0.17). Dopo aver trovato tutti i coefficienti, possiamo mediare le equazioni (2.0.13) e (2.0.15), ottenendo cosí le equazioni per il campo di velocità a livello macroscopico:

$$\langle u_3^{(0)} \rangle = -\langle K_{33} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_3'} \rangle \text{ e } \langle u_i^{(0)} \rangle = -\mathcal{K}_{ij} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j''}, \quad (2.0.20)$$

dove, nell'ultima equazione,  $\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j''}$  può essere portato fuori dall'integrale poiché non dipende dalle variabili di integrazione e  $\mathcal{K}_{ij} = \langle K_{ij} \rangle$ .



## Capitolo 3

### Risultati microscopici

Il mezzo poroso considerato é costituito da una struttura trasversalmente isotropica, cioè caratterizzata dal fatto che tutte le proprietà geometriche e fisiche sono simmetriche rispetto a un asse che é normale a un piano di isotropia. Se consideriamo che  $\mathbf{A}$  sia un tensore del secondo ordine che dipende dalle proprietà fisiche della struttura, esso può essere scritto nella forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}.$$

Quindi  $\mathbf{A}$  é completamente determinato da due costanti anziché nove. Questo fatto può essere provato nel seguente modo: se  $\mathbf{A}$  é una generica matrice del materiale legata al mezzo e  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{d}$  sono proprietà del materiale tali che

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{d},$$

in un mezzo che é trasversalmente isotropo, le proprietà del materiale sono invarianti rispetto ad una trasformazione ortogonale  $\mathbf{R}$  lungo l'asse di simmetria, cioè

$$\mathbf{R}\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{d};$$

combinando le equazioni otteniamo che

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R}.$$

Per materiali trasversalmente isotropi  $\mathbf{R}$  é una matrice di rotazione sul piano  $(x_1, x_2)$  ed ha la forma

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per il caso particolare  $\theta = \pi$  otteniamo che  $A_{13} = A_{31} = A_{12} = A_{21} = 0$  e per  $\theta = \frac{\pi}{2}$  si trova che  $A_{23} = A_{32} = 0$  e  $A_{11} = A_{22}$ . Lo stesso discorso vale per il tensore di permeabilità. I calcoli sono stati svolti utilizzando OpenFOAM, un software che risolve equazioni differenziali alle derivate parziali applicando uno schema numerico basato sul metodo ai volumi finiti, spiegato dettagliatamente nel capitolo 5. Sono state studiate due disposizioni dei cilindri nel piano  $(x_1, x_2)$ : allineati e alternati.

### 3.1 Fibre cilindriche allineate

Presentiamo qui il caso di fibre cilindriche con disposizione come in figura 3.1. I valori dei tensori di permeabilità sono validi all'interno del dominio poroso. Sono stati risolti i problemi differenziali (2.0.14) e (2.0.17). Come

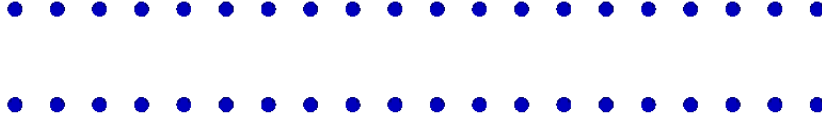


Figura 3.1: Cilindri disposti in configurazione allineata.

riportato nella parte teorica quanto ricavato é valido per  $Re = \mathcal{O}(\epsilon)$ . Visto che la struttura é trasversalmente isotropa, otteniamo  $K_{11} = K_{22}$ ,  $A_1 = A_2$  e  $K_{12} = K_{21} = 0$ .  $K_{22}$  e  $A_2$  non sono mostrate perché sono rotazioni di 90 gradi rispetto all'asse  $x_3$  di  $K_{11}$  e  $A_1$ . Gli isocontorni per  $K_{11}$ ,  $K_{33}$  e  $A_1$  sono riportate rispettivamente nelle figure 3.3, 3.4 e 3.5, al variare di  $\vartheta$  nell'intervallo  $[0.3, 0.99]$ . Si può notare che  $K_{11}$  e  $K_{33}$  sono simmetrici rispetto al piano  $(x_1, x_2)$ , mentre  $K_{12}$  e  $K_{21}$  sono diversi da zero, ma antisimmetrici (figura 3.6). Dopo aver calcolato il tensore di permeabilità, si può ottenere il suo valore integrale sul dominio considerato, secondo la definizione (2.0.18), utilizzando la routine di ParaView `IntegrateVariables`. Otteniamo dunque il tensore  $\mathcal{K}$  per le porosità considerate. Per  $\vartheta = 0.8$ , ad esempio, otteniamo:

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0.0159 & \mathcal{O}(10^{-9}) & 0 \\ \mathcal{O}(10^{-9}) & 0.0159 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0408 \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

Dal punto di vista numerico  $\mathcal{K}_{12} = \mathcal{K}_{21}$  possono essere considerate nulle. In tabella 3.1 mostriamo  $\mathcal{K}_{11}$  e  $\mathcal{K}_{33}$  in funzione di  $\vartheta$ . Riportiamo su un grafico

$\vartheta$	$r$	$\mathcal{K}_{11}$	$\mathcal{K}_{33}$
0.3	0.472034	$6.14 \cdot 10^{-5}$	0.0021
0.4	0.437019	$4.6439 \cdot 10^{-4}$	0.0039
0.5	0.398942	0.0015	0.0071
0.6	0.356824	0.0038	0.0126
0.7	0.309019	0.0080	0.0225
0.8	0.252313	0.0159	0.0408
0.9	0.178412	0.0327	0.0811
0.99	0.056418	0.1010	0.2507

Tabella 3.1: Risultati ottenuti per  $\mathcal{K}_{11}$  e  $\mathcal{K}_{33}$  al variare di  $\vartheta$ , con  $r$  che rappresenta il raggio dell'inclusione solida.

$(\mathcal{K}, \vartheta)$  i risultati ottenuti assieme a quelli di altri autori come mostrato in figura 3.7. I dati forniti dalla letteratura (Sangani & Yao (1988); van der Westhuizen & du Plessis (1996); Mityushev & Adler (2002a); Sadiq *et al.* (1995); Zampogna & Bottaro (2016); Skartsis & Kardos (1990)), valutati per  $\vartheta$  nell'intervallo  $[0.3, 0.99]$ , mostrano che la teoria a tre scale utilizzata é in accordo con i risultati precedenti. Eseguendo un confronto (figura 3.8) solo con quanto ottenuto da Zampogna & Bottaro (2016), che hanno impiegato una tecnica di omogeneizzazione a due scale, é possibile notare un perfetto accordo con i risultati ottenuti.

## 3.2 Fibre cilindriche alternate

Sono state effettuate delle simulazioni disponendo i cilindri in modo alternato (figura 3.2), con  $\vartheta$  fissato pari a 0.9. Gli isocontorni per  $K_{11}$ ,  $K_{33}$ ,  $A_1$  e  $K_{12}$  sono mostrati in figura 3.9. Per preservare la periodicit  della microstruttura,   necessario considerare una cella elementare che contenga due fibre rigide. L'area della superficie occupata dal solido non viene modificata rispetto al caso precedente, quindi, per fare in modo che la porosit  rimanga invariata,   necessario scalare opportunamente il raggio. Per trovare il valore medio di permeabilit  si applica la definizione (2.0.18) su una microcella con area doppia rispetto al caso allineato, per cui si ottengono dei valori di permeabilit  dimezzati (tabella 3.2) rispetto al caso precedente.



Figura 3.2: Cilindri disposti in configurazione alternata.

$\vartheta$	$r$	$\mathcal{K}_{11}$	$\mathcal{K}_{33}$
0.9	0.125865	0.0178	0.0407

Tabella 3.2: Risultati ottenuti per  $\mathcal{K}_{11}$  e  $\mathcal{K}_{33}$  per  $\vartheta = 0.9$  nel caso di griglia staggerata, con  $r$  che rappresenta il raggio dell'inclusione solida.



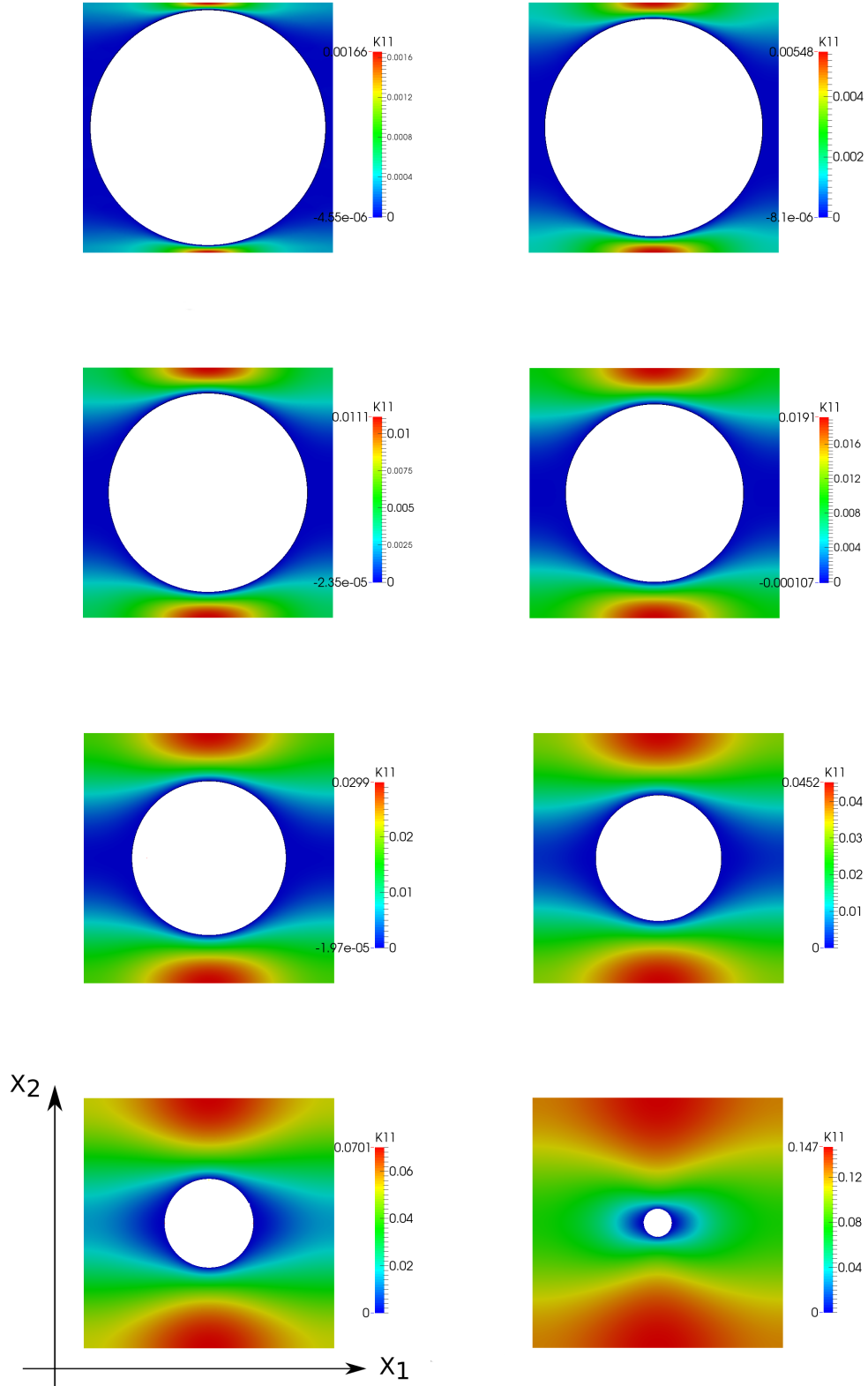


Figura 3.3: Isocontorni di  $K_{11}$  con  $\vartheta = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.99$ . In questo caso i cilindri sono allineati.

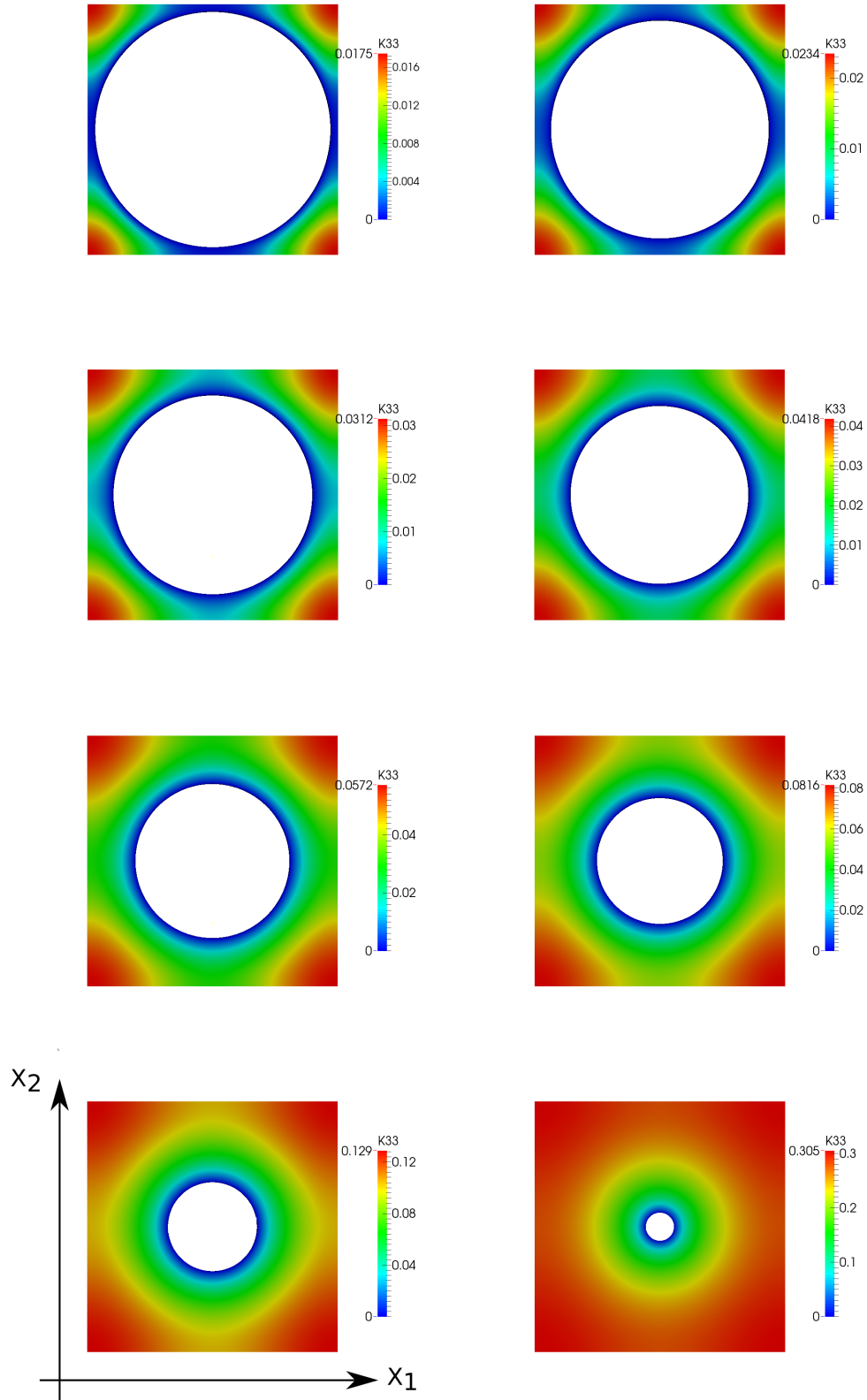


Figura 3.4: Isocontorni di  $K_{33}$  con  $\vartheta = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.99$ .

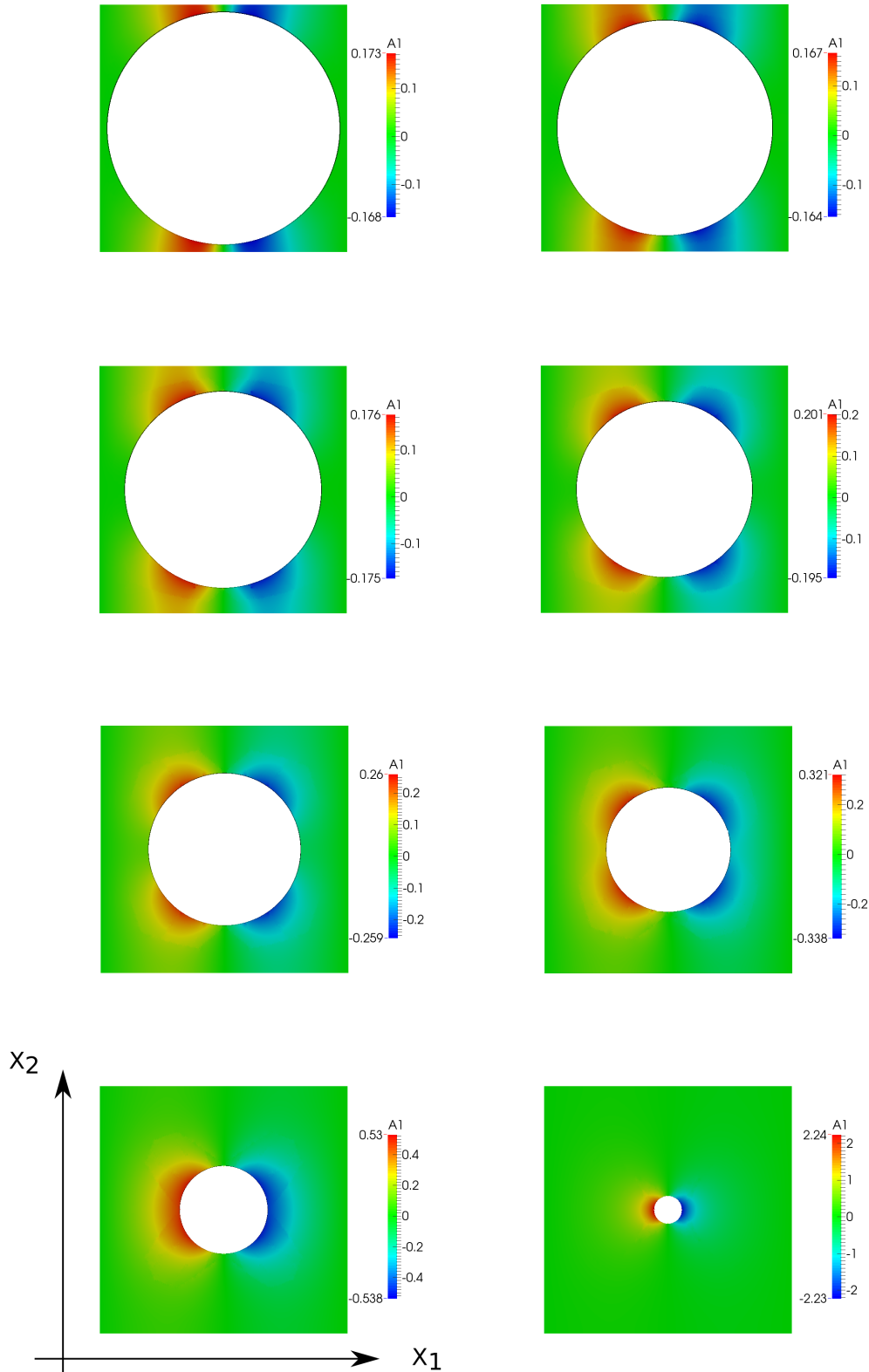


Figura 3.5: Isocontorni di  $A_1$  con  $\vartheta = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.99$ .

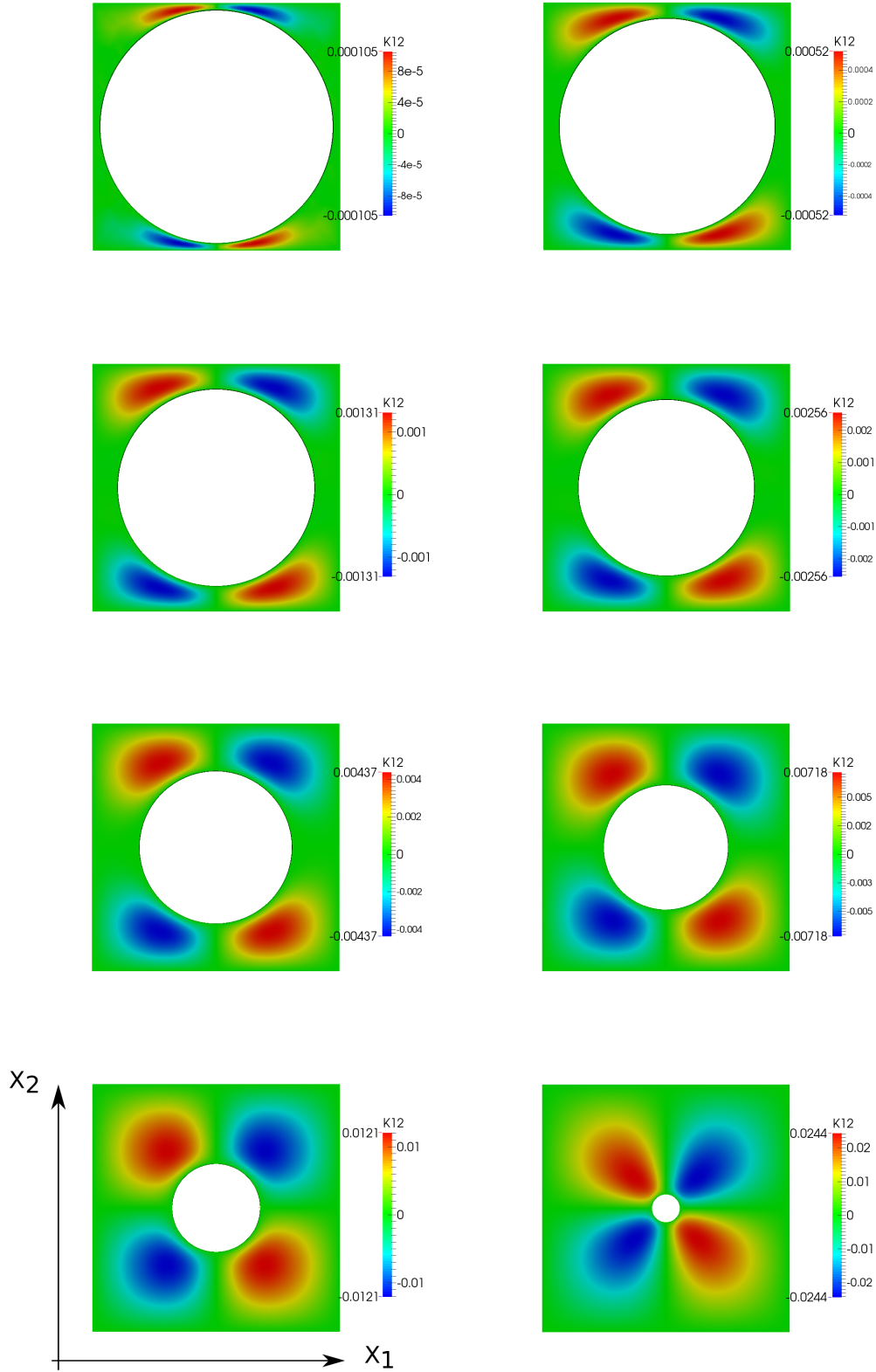


Figura 3.6: Isocontorni di  $K_{12} = K_{21}$  con  $\nu = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.99$ .

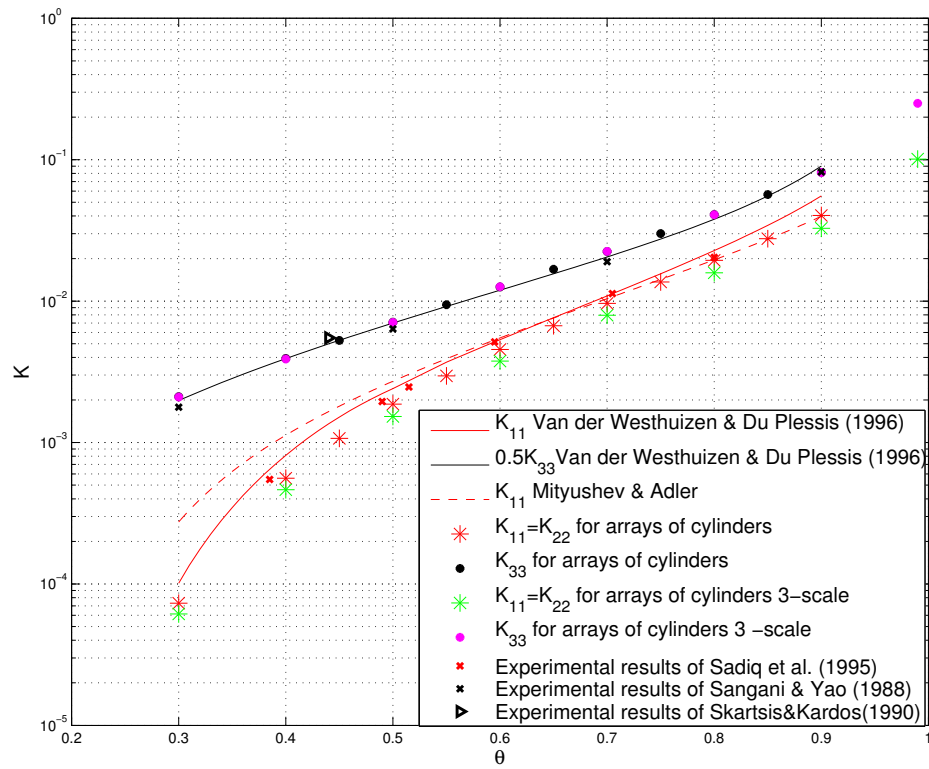


Figura 3.7: Risultati ottenuti per il tensore di permeabilità, riportati su un piano  $(K, \vartheta)$  e confrontati con quelli presenti in letteratura.

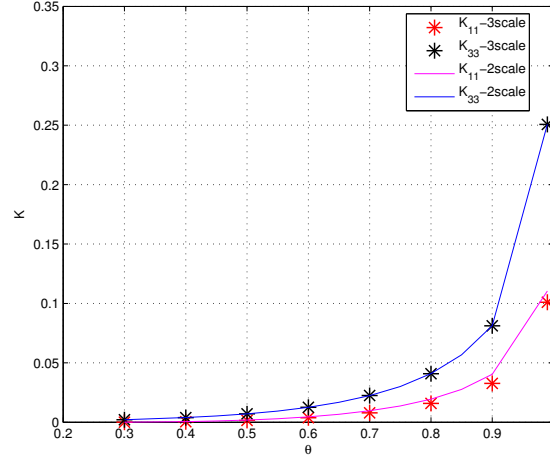


Figura 3.8: Risultati per le componenti del tensore di permeabilità, riportati su un piano  $(\mathcal{K}, \vartheta)$  e confrontati con quelli di Zampogna & Bottaro (2016), ricavati con teoria a due scale.

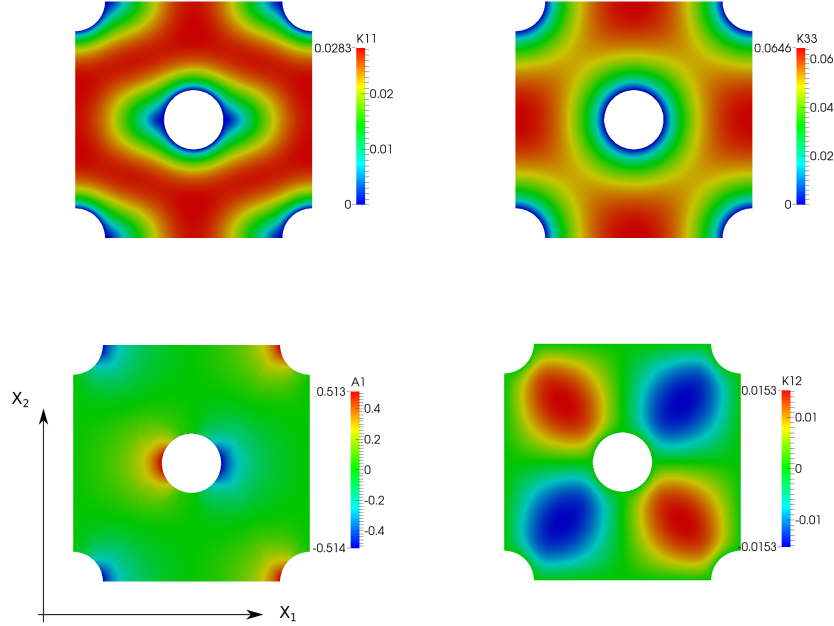


Figura 3.9: Isocontorni di  $K_{11}$ ,  $K_{33}$ ,  $A_1$  e  $K_{12} = K_{21}$ , con  $\vartheta = 0.9$ . In questo caso i cilindri hanno una disposizione alternata e la cella elementare contiene due cilindri.



# Capitolo 4

## Risultati macroscopici

Lo scopo principale di questo capitolo é quello di validare la teoria dell'omogeneizzazione dal punto di vista macroscopico. Siccome nella configurazione macroscopica studiata é presente una regione occupata solo dal fluido, accoppiamo i risultati macroscopici del modello di omogeneizzazione alla soluzione delle NSE. Si é partiti da un codice Matlab per la risoluzione delle NSE. Dato che il rivestimento é studiato utilizzando tre scale di lunghezza, dal punto di vista macroscopico, la presenza del mezzo poroso si traduce in una condizione al contorno per il solutore del fluido, a  $x_3$  fissato. Come caso test utilizziamo una cavità quadrata con la parte inferiore riempita dal mezzo poroso, come rappresentato in figura 4.1. É stata utilizzata questa configurazione, perché si genera una componente di velocità verticale che permette di valutare gli effetti di anisotropia della struttura solida considerata. Supponiamo, inoltre, che i risultati siano invarianti rispetto all'asse  $x_2$ , per cui il solutore sviluppato é bidimensionale. Il risultato del codice Matlab viene confrontato con i risultati di simulazioni numeriche dirette (DNS), calcolate per la stessa configurazione, per validare il modello di omogeneizzazione.

### 4.1 Condizioni di interfaccia

Per imporre delle condizioni di interfaccia corrette é necessario che le NSE e le equazioni del modello omogeneo siano normalizzate nello stesso modo. Quelle dedotte dalla teoria dell'omogeneizzazione sono adimensionalizzate supponendo che sia valida la relazione (2.0.1). Se vogliono essere confrontate



con le NSE adimensionalizzate secondo  $Re_L$ , che é definito come

$$Re_L = \frac{\rho U L}{\mu},$$

é necessario applicare un'altra normalizzazione. Essa é definita così

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{L}\mathbf{x}, \quad \hat{p} = \rho U^2 p, \quad \hat{\mathbf{u}} = U\mathbf{u}. \quad (4.1.1)$$

Le NSE, espresse secondo la nuova normalizzazione, hanno la seguente formulazione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Per dedurre le equazioni omogenee con la nuova normalizzazione partiamo dall'equazione di Darcy adimensionale (2.0.15), dedotta in precedenza, e la riscriviamo in variabili dimensionali ottenendo

$$\hat{u}_i = -\frac{K_{ij} l^2}{\mu} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_j} = -\frac{\hat{K}_{ij}}{\mu} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_j}.$$

Adimensionalizzando nuovamente con le relazioni (4.1.1) otteniamo

$$u_i = -Re_L \frac{\hat{K}_{ij}}{L^2} \frac{\partial p}{\partial x_j}$$

che può essere scritta come

$$u_i = -Re_L \frac{\hat{K}_{ij}}{l^2} \frac{l^2}{L^2} \frac{\partial p}{\partial x_j} = -\epsilon^4 Re_L \mathcal{K}_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j}. \quad (4.1.3)$$

Si noti che  $\frac{\hat{K}_{ij}}{l^2}$  rappresenta il tensore di permeabilità adimensionale, normalizzato da  $l^2$ , cioè il tensore di permeabilità trovato con il metodo dell'omogeneizzazione ( $\mathcal{K}$ ). Da ciò segue la relazione

$$K_{ij}^{NS} = \epsilon^4 Re_L \mathcal{K}_{ij},$$

dove il tensore di permeabilità  $\mathbf{K}^{NS}$  é calcolato usando la configurazione in figura 4.1 a partire dai risultati della DNS, invertendo la legge di Darcy nel mezzo poroso. Sono stati impostati due casi principali, uno per un mezzo costituito da fibre cilindriche con disposizione allineata, l'altro costituito dalle

stesse fibre ma in posizione alternata. Entrambe le simulazioni sono state eseguite con porosità pari a 0.9,  $Re_L = 100$  e numero di fibre rigide pari a 100 per il primo caso e pari a 200 per il secondo.  $\mathbf{K}^{NS}$  é valutato usando il seguente metodo:

- é stata implementata una DNS nella cavità usando la configurazione in figura 4.1;
- la regione porosa, visibile in figura 4.2, é decomposta in celle elementari, che inglobano la singola fibra;
- tutti i campi sono mediati su ogni cella, usando la definizione (2.0.18); in questo modo abbiamo un campionamento della soluzione nel mezzo poroso (in caso di layer di  $N$  filamenti di altezza  $\frac{L}{10}$  abbiamo una griglia cartesiana di  $[\frac{NL}{10\epsilon}]$  elementi nella regione porosa);
- nella regione interna al mezzo poroso, supponendo che sia valida l'approssimazione di Darcy (cioé  $\mathbf{u}^{NS} = \mathbf{u}^{(0)}$  e  $p^{NS} = p^{(0)}$ ),  $\mathbf{K}^{NS}$  é calcolata usando l'equazione (4.1.3).

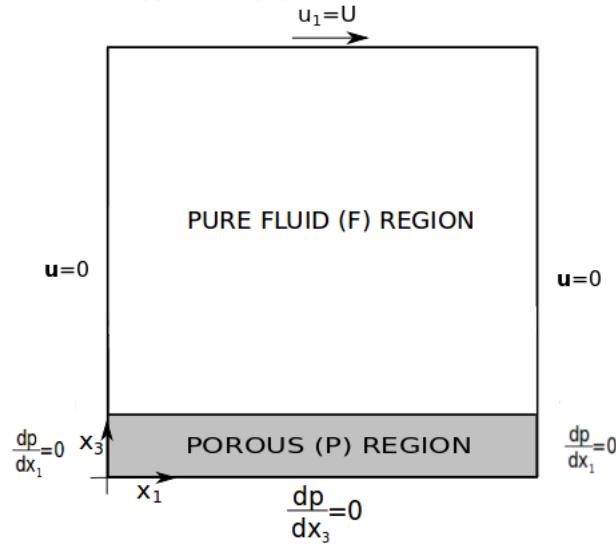


Figura 4.1: Configurazione del problema macroscopico omogeneo: una cavità é riempita con un mezzo poroso nella sua regione inferiore. La condizione al contorno in  $x_2$  é periodica, quindi il problema é tridimensionale.

Per inserire, invece la presenza del mezzo poroso nel solutore sviluppato con Matlab, sono state dedotte delle condizioni al contorno, in parte dal modello dell'omogeneizzazione, e in parte da condizioni di interfaccia utilizzate in precedenza. La scelta di condizioni di interfaccia tra fluidi e mezzi porosi é sempre stata fonte di dibattito (cfr. Beavers & Joseph (1967); Saffman (1971); Jäger & Mikelić (1996)). Dalla teoria a tre scale e in particolare dall'equazione (2.0.20) si deduce la condizione di slip

$$u_1|_I = -\mathcal{K}_{11} \frac{\partial p}{\partial x_1}|_I.$$

Per quanto riguarda la velocità verticale all'interfaccia utilizziamo una condizione impiegata da Gopinath & Mahadevan (2011). La condizione al con-

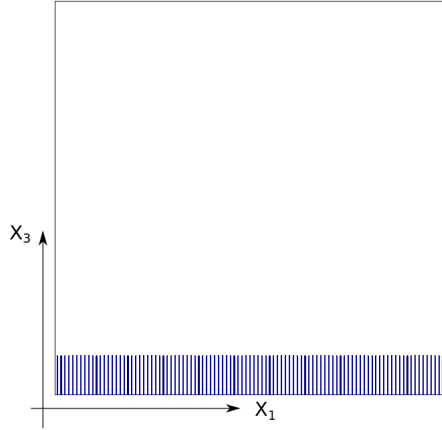


Figura 4.2: Dominio discreto periodico per il problema analizzato. Lo spessore della cavità é pari a  $\epsilon$  nella direzione  $z$  del dominio.

torno può essere formulata assumendo che l'interfaccia sia limitata da una membrana semipermeabile di spessore  $d_f$  e permeabilità  $K_f$ . Imponendo la continuità per il flusso attraverso l'interfaccia, otteniamo

$$-\mathbf{e}_3 \cdot \left( \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \nabla P \right)|_I + \left( \frac{K_f}{\mu d_f} \right) P^*|_I = 0, \quad (4.1.4)$$

dove  $P^*|_I$  é la differenza di pressione attraverso il mezzo poroso. Si noti che questa espressione include anche il caso di rivestimento impermeabile,

per il quale  $K_f = 0$ . Mettiamo adesso a sistema la condizione (4.1.4) con l'equazione di Darcy

$$\begin{cases} -\mathbf{e}_3 \cdot (\frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \nabla P)|_I + (\frac{K_f}{\mu d_f})P^*|_I = 0, \\ u_i|_I = -\epsilon^4 Re_L \mathcal{K}_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j}|_I. \end{cases} \quad (4.1.5)$$

Pertanto dalla prima equazione di (4.1.5) otteniamo la seguente espressione

$$\frac{\partial p}{\partial x_3}|_I = \frac{1}{\mathcal{K}_{33}} \frac{K_f}{d_f} (P_f - cost)|_I.$$

Sostituendo quest'ultima nella seconda espressione del sistema (4.1.5) ricaviamo

$$u_3|_I = -\epsilon^4 Re_L \frac{K_f}{d_f} P|_I + c \quad (4.1.6)$$

Poiché la massa si conserva in qualsiasi sezione della cavità, vale la seguente relazione

$$\int_0^1 u_3|_I dx_1 = 0. \quad (4.1.7)$$

Per trovare  $c$  basta sostituire la (4.1.6) nella (4.1.7) ottenendo

$$\int_0^1 c dx_1 = \int_0^1 \epsilon^4 Re_L \frac{K_f}{d_f} P|_I dx_1,$$

da cui segue

$$c = \epsilon^4 Re_L \frac{K_f}{d_f} \int_0^1 P|_I dx_1.$$

## 4.2 Direct Numerical Simulations (DNS)

Per le DNS sono state imposte le seguenti condizioni al contorno: viene imposta una velocità di scorrimento unitaria nella parete superiore, mentre nelle pareti laterali e inferiori si richiede la condizione di aderenza. Le DNS sono state calcolate per  $\vartheta = 0.9$  e  $Re_L = 100$ , ma abbiamo impiegato differenti disposizioni dei cilindri, come già detto. Le fibre sono idealmente incluse in celle con lato  $l$  e altezza  $h$ , tali che  $\frac{l}{h} = \epsilon$  e  $\frac{h}{L} = \epsilon$ , come richiesto dall'omogeneizzazione. Tuttavia a differenza della teoria, è necessario scegliere il valore di  $\epsilon$ , che non può essere infinitesimo. Nel nostro caso è stato scelto di posizionare sul fondo della cavità 100 fibre cilindriche, per cui  $\epsilon = 0.1$ .

### 4.2.1 DNS con fibre cilindriche allineate

Nelle figure 4.3, 4.4 e 4.5 sono mostrati gli isocontorni per la velocità e la pressione nel caso di disposizione allineata delle fibre. É possibile acquisire dalla simulazione i dati relativi a velocità e gradiente di pressione, utili per stimare i valori di  $\mathcal{K}_{11}$  e  $\mathcal{K}_{33}$ , invertendo l'equazione di Darcy ((4.1.3)). Per fare ciò il dominio poroso è decomposto in celle elementari  $\epsilon^2 x \epsilon^2 x \epsilon$  e tutti i campi sono mediati secondo la definizione (2.0.18). Il confronto delle componenti del tensore di permeabilità, calcolate con il metodo dell'omogeneizzazione e con la DNS, é mostrato nelle figure 4.6 e 4.7. Si può notare che la nostra tecnica multiscale sottostima il valore della permeabilità di circa il 50 %. La teoria dice che l'errore é pari a  $\epsilon$ , che nel nostro caso vale 0.1 per ragioni di costi computazionali. Il segnale di  $K^{DNS}$  é, inoltre, molto sporco, poiché sono presenti effetti di parete e inoltre in alcune zone della cavità il gradiente di pressione si annulla, rendendo non invertibile la legge di Darcy.

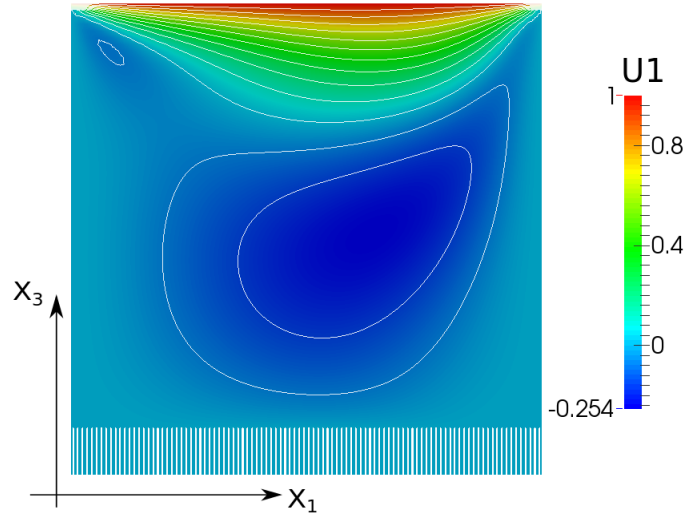


Figura 4.3: Isocontorni di velocità orizzontale in una cavità di dimensioni unitarie, con  $\vartheta = 0.9$  e  $Re_L = 100$ . I cilindri hanno una disposizione allineata.

### 4.2.2 DNS con fibre cilindriche alternate

Anche in questo caso é stato svolto un procedimento analogo a quello descritto nel paragrafo precedente. Nelle figure 4.12 e 4.13 si mostrano i

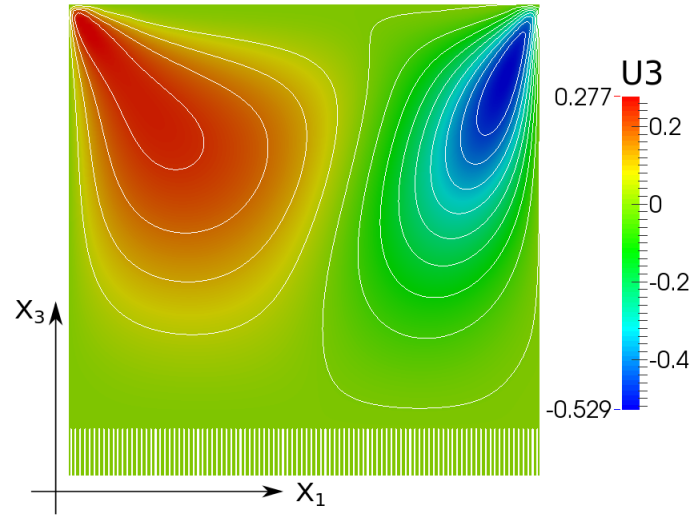


Figura 4.4: Isocontorni di velocità verticale in una cavità di dimensioni unitarie, con  $\vartheta = 0.9$  e  $Re_L = 100$ . I cilindri hanno una disposizione allineata.

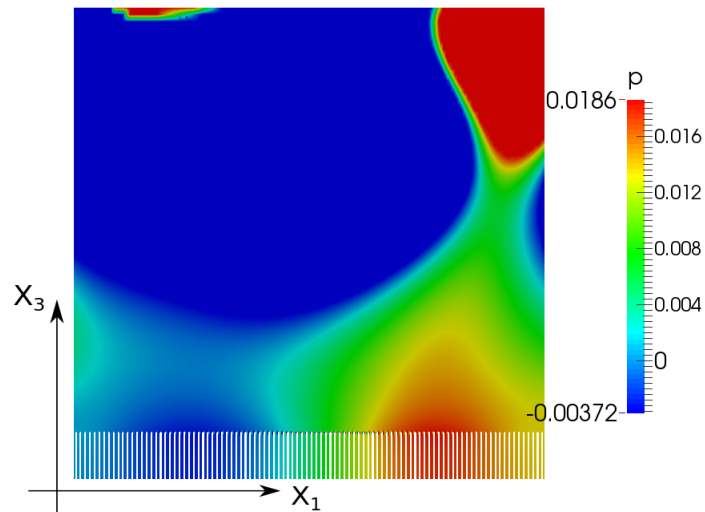


Figura 4.5: Isocontorni di pressione in una cavità di dimensioni unitarie, con  $\vartheta = 0.9$  e  $Re_L = 100$ . I cilindri hanno una disposizione allineata.

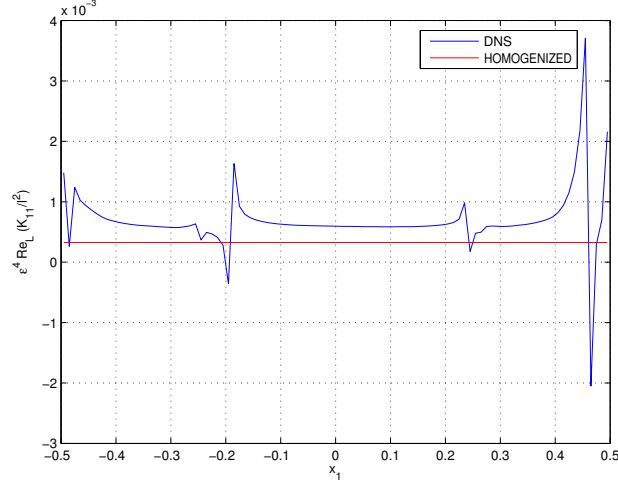


Figura 4.6: Confronto tra il valore puntuale di permeabilità lungo  $x_1$  dedotto dalla DNS (linea blu), con quello ricavato con il metodo dell'omogeneizzazione. I cilindri hanno una disposizione allineata, con  $\vartheta = 0.9$  e  $Re_L = 100$ .

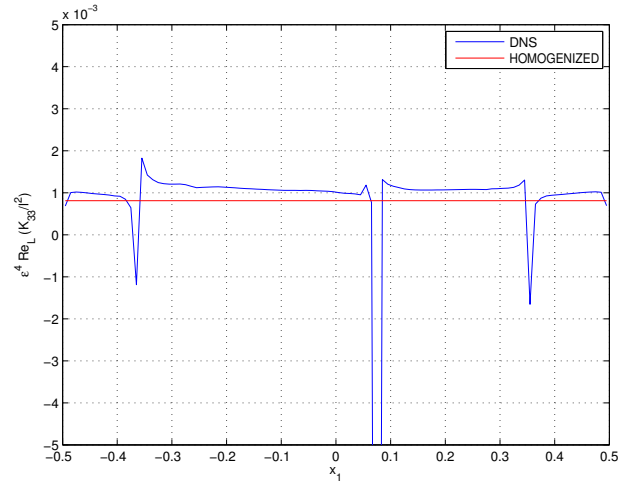


Figura 4.7: Confronto tra il valore puntuale di permeabilità lungo  $x_3$  dedotto dalla DNS (linea blu), con quello ricavato con il metodo dell'omogeneizzazione. I cilindri hanno una disposizione allineata, con  $\vartheta = 0.9$  e  $Re_L = 100$ .



Figura 4.8: Velocità orizzontale all'interno del mezzo poroso. È mostrata una sezione della cavità per  $x_3 = 0.05$ . I cilindri sono disposti in configurazione allineata, con  $\vartheta = 0.9$  e  $Re_L = 100$ .

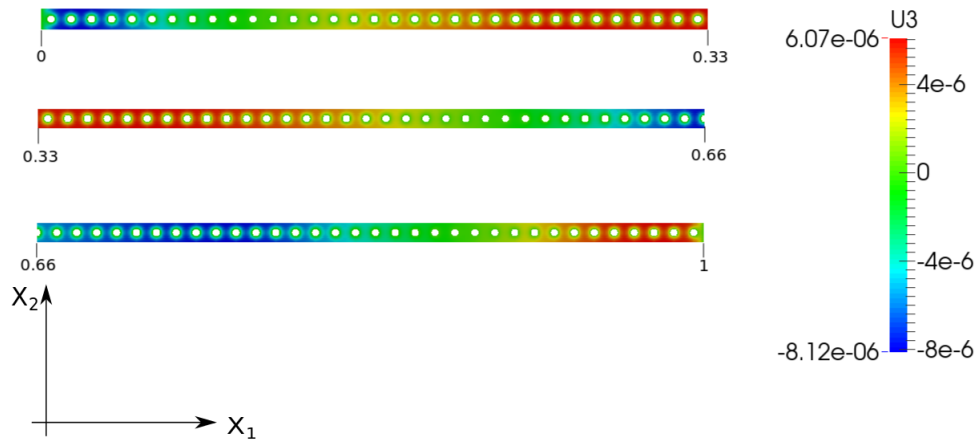


Figura 4.9: Velocità verticale all'interno del mezzo poroso. È mostrata una sezione della cavità per  $x_3 = 0.05$ . I cilindri sono disposti in configurazione allineata, con  $\vartheta = 0.9$  e  $Re_L = 100$ .



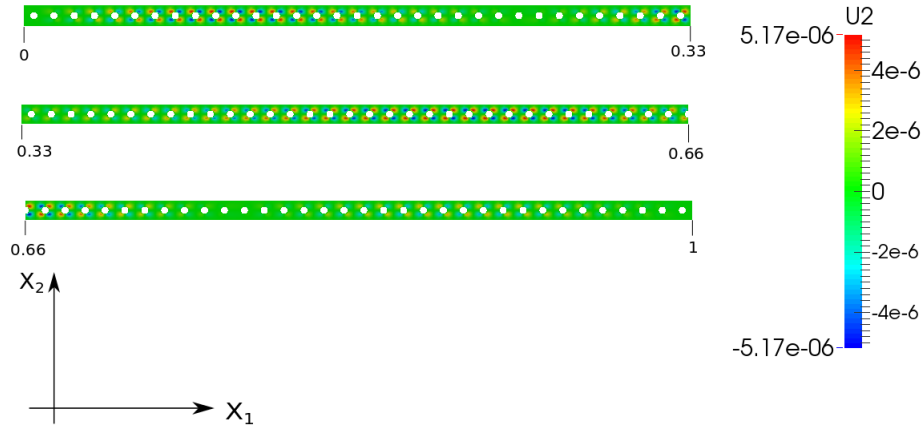


Figura 4.10: Velocità trasversale all'interno del mezzo poroso. É mostrata una sezione della cavità per  $x_3 = 0.05$ . I cilindri sono disposti in configurazione allineata, con  $\vartheta = 0.9$  e  $Re_L = 100$ . In questo caso la velocità é antisimmetrica rispetto all'asse  $x_1$ , cosicché il valore medio di  $u_2$  é nullo.



Figura 4.11: Pressione all'interno del mezzo poroso. É mostrata una sezione della cavità per  $x_3 = 0.05$ . I cilindri sono disposti in configurazione allineata, con  $\vartheta = 0.9$  e  $Re_L = 100$ .

risultati per il tensore di permeabilità con relativo confronto con il modello omogeneo. Rispetto al caso precedente, escludendo i tratti divergenti e i rumori del segnale, il valore di  $\mathcal{K}^{DNS}$  é circa la metà, visto che é stata scelta una cella elementare contenente due cilindri. Riscalando opportunamente le DNS, si ottiene un comportamento analogo a quello del caso con fibre cilindriche allineate.

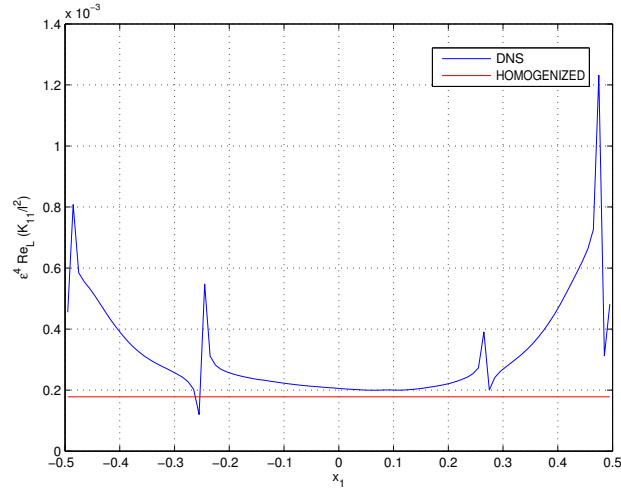


Figura 4.12: Confronto tra il valore puntuale di permeabilità lungo  $x_1$  dedotto dalla DNS (linea blu), con quello ricavato con il metodo dell'omogeneizzazione. I cilindri hanno una disposizione staggerata, con  $\vartheta = 0.9$  e  $Re_L = 100$ .

### 4.2.3 Confronto tra i due casi

La scelta di una cella che contiene due cilindri non altera i risultati ottenuti, infatti i valori puntuali di permeabilità coincidono tra loro. Ciò é ben visibile nelle figure 4.14 e 4.15. Si può notare che i picchi sono localizzati nelle medesime posizioni, in quanto essi dipendono dal gradiente macroscopico di pressione nella regione fluida, che é uguale nei due casi.

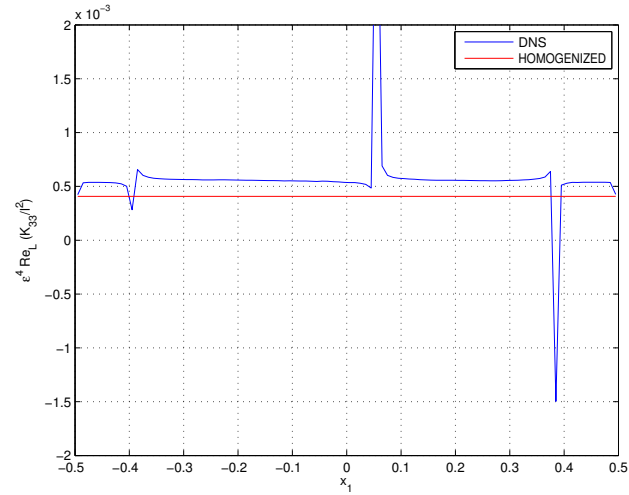


Figura 4.13: Confronto tra il valore puntuale di permeabilità lungo  $x_3$  dedotto dalla DNS (linea blu), con quello ricavato con il metodo dell'omogeneizzazione. I cilindri hanno una disposizione staggerata, con  $\vartheta = 0.9$  e  $Re_L = 100$ .

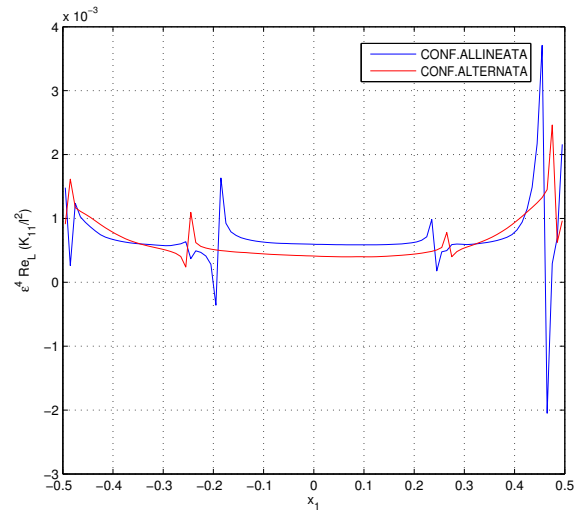


Figura 4.14: Confronto tra i valori puntuali di permeabilità lungo  $x_1$  per le configurazioni allineata e alternata.

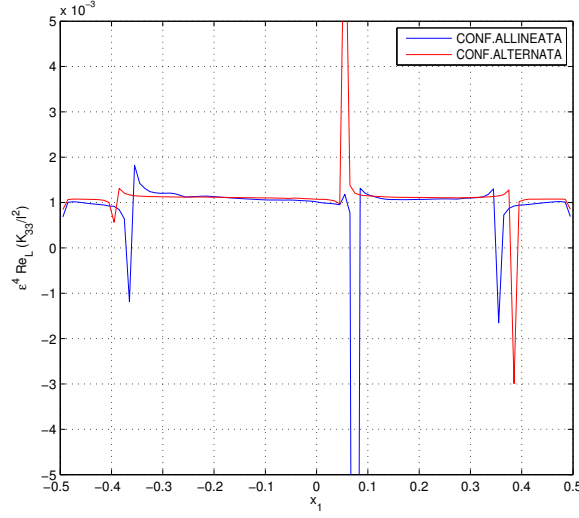


Figura 4.15: Confronto tra i valori puntuali di permeabilità lungo  $x_3$  per le configurazioni allineata e alternata.

### 4.3 Validazione del modello omogeneo con l'utilizzo di DNS

Lo scopo principale delle DNS é quello di consentire la validazione del modello calcolato con il codice Matlab. Infatti, tramite la DNS possiamo stimare le componenti del tensore di permeabilità e calibrare le costanti presenti nelle condizioni al contorno per testare la validità di queste ultime. Nelle figure 4.16 e 4.17 vengono confrontati diversi profili di velocità orizzontale e verticale all'interfaccia:

- quelli ricavati con il modello omogeneo per  $d_f$  fissato,
- quello calcolato con la DNS,
- quello ottenuto con il modello omogeneo impostando il tensore di permeabilità pari a quello stimato con la DNS .

Si può notare che  $d_f$  non influenza in maniera rilevante la componente di velocità orizzontale all'interfaccia. Il valore di  $u_3|_I$ , invece, viene modificato notevolmente, poichè é inversamente proporzionale a  $d_f$  (equazione (4.1.6)). Per tutti i casi viene imposto  $K_f = K_{33}$ . I risultati ottenuti per il campo

di velocità nel mezzo poroso mostrano che il modello omogeneo si avvicina bene alla DNS, con un errore inferiore all'ordine di grandezza di  $\epsilon$ . Per fare questo confronto è necessario considerare le velocità normalizzate in un altro modo (lo stesso con cui sono normalizzate le equazioni nella tecnica di omogeneizzazione).

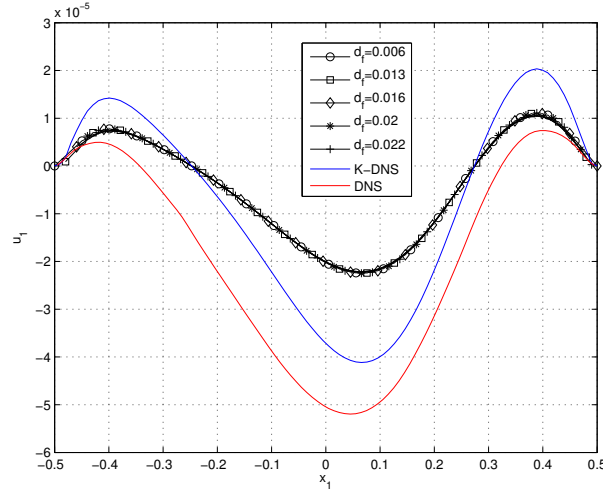


Figura 4.16: Confronto tra profili di velocità orizzontale all'interfaccia, calcolati con il codice per diversi valori del parametro  $d_f$  e con l'utilizzo di DNS. La linea blu è ricavata utilizzando la permeabilità dedotta dalla DNS, quella rossa rappresenta la velocità all'interfaccia per la DNS stessa.

Abbiamo validato il codice anche nel dominio fluido, confrontando i valori del campo di velocità lungo una retta passante per  $x_1 = 0.5$ . Nelle figure 4.18, 4.20 e 4.22 si vede che il modello omogeneo approssima molto bene i risultati della DNS. Osservando con più attenzione i profili all'interfaccia porosa, come mostrato negli ingrandimenti 4.19, 4.21 e 4.23, si possono notare le differenze tra i vari casi. Per quanto riguarda la velocità verticale si evidenzia che non esiste un valore di  $d_f$  che ottimizzi ovunque il profilo all'interfaccia. In conclusione dal confronto tra i risultati si può affermare che, da un punto di vista microscopico, il modello omogeneo sottostima il tensore di permeabilità con un errore di ordine  $\epsilon^2$ , ma esso è ampiamente giustificabile poiché è proporzionale all' $\epsilon$  scelto. Troncando, infatti, l'espansione della velocità al primo ordine si vede che

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(0)}| = \mathcal{O}(\epsilon)$$

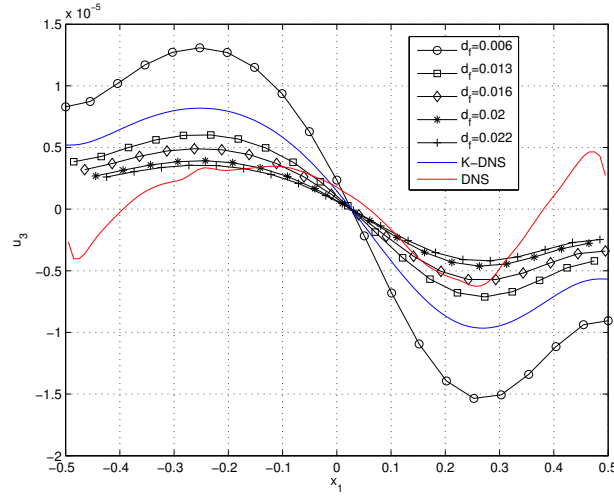


Figura 4.17: Confronto tra profili di velocità verticale all'interfaccia, calcolati con il codice per diversi valori del parametro  $d_f$  e con l'utilizzo di DNS. La linea blu è ricavata utilizzando la permeabilità dedotta dalla DNS, quella rossa rappresenta la velocità all'interfaccia per la DNS stessa.

Inoltre, non è possibile ricavare dalle DNS un valore ben determinato per le componenti del tensore di permeabilità, in quanto quest'ultimo è fortemente influenzato dagli effetti di parete e dalle zone in cui il gradiente di pressione si annulla. Da un punto di vista macroscopico il matching tra i campi di velocità per i due casi è fortemente influenzato dalla scelta delle costanti  $d_f$  e  $\mathcal{K}_{ij}$  che sono, quindi, da calibrare caso per caso.

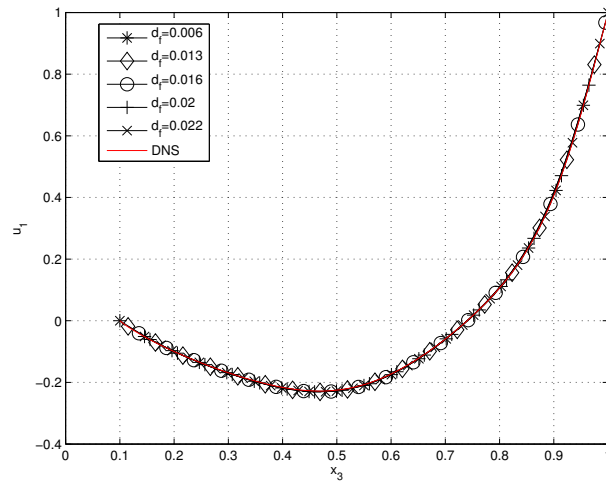


Figura 4.18: Profili di velocità orizzontale nel dominio fluido per la DNS e per diverse scelte di  $d_f$ .

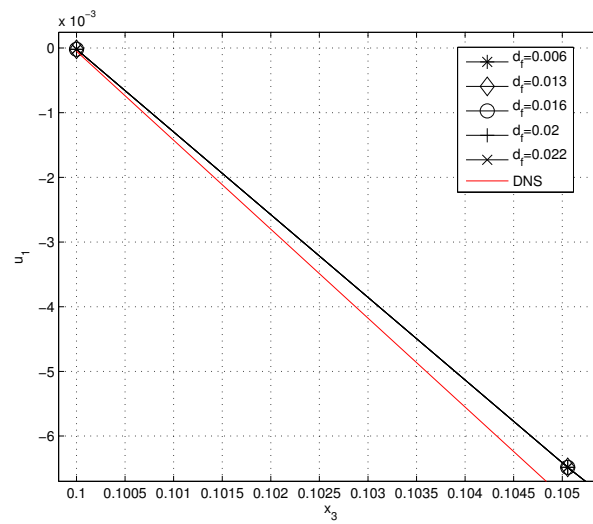


Figura 4.19: Ingrandimento all'interfaccia per profili di velocità orizzontale nel dominio fluido per la DNS e per diverse scelte di  $d_f$ .

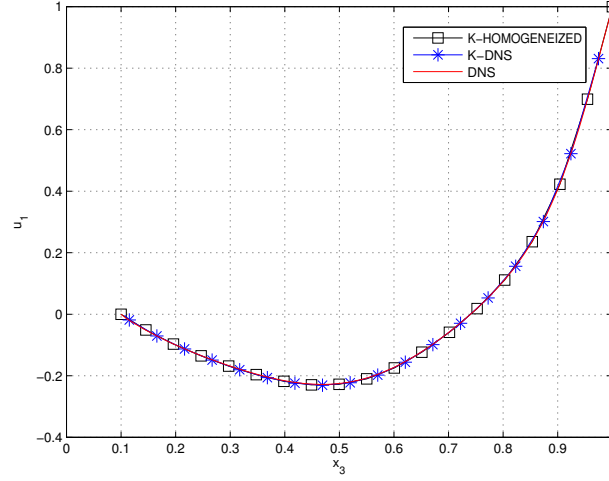


Figura 4.20: Profili di velocità orizzontale nel dominio fluido per la DNS e per diverse scelte di  $\mathcal{K}_{11}$ . La linea blu é ricavata utilizzando la permeabilità dedotta dalla DNS, quella nera con il modello omogeneo, quella rossa rappresenta la velocità nel mezzo fluido per la DNS stessa.

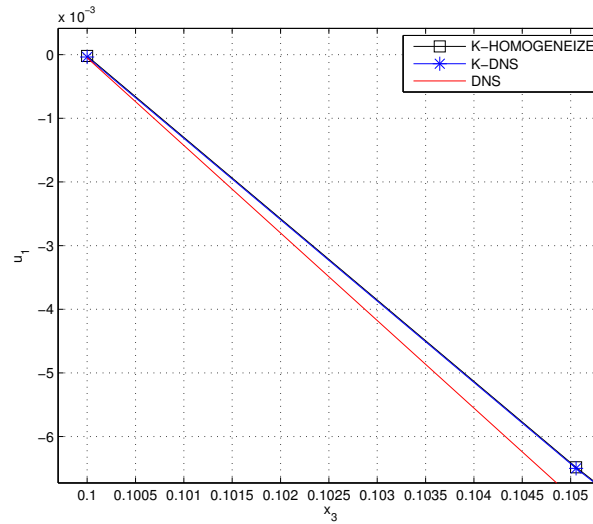


Figura 4.21: Ingrandimento all'interfaccia per profili di velocità orizzontale nel dominio fluido per la DNS e per diverse scelte di  $\mathcal{K}_{11}$ .



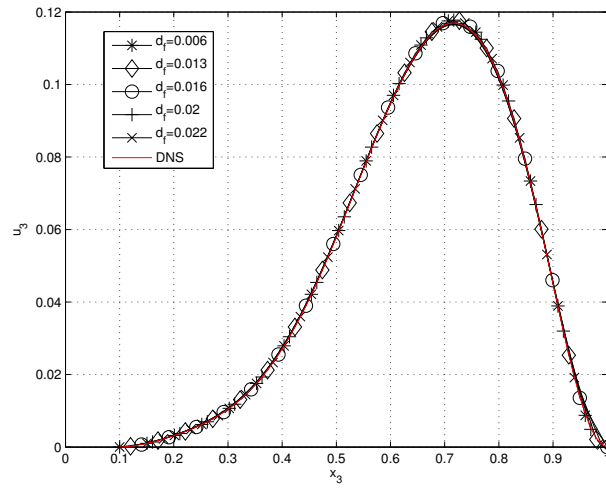


Figura 4.22: Profili di velocità verticale nel dominio fluido per la DNS e per diverse scelte di  $d_f$ .

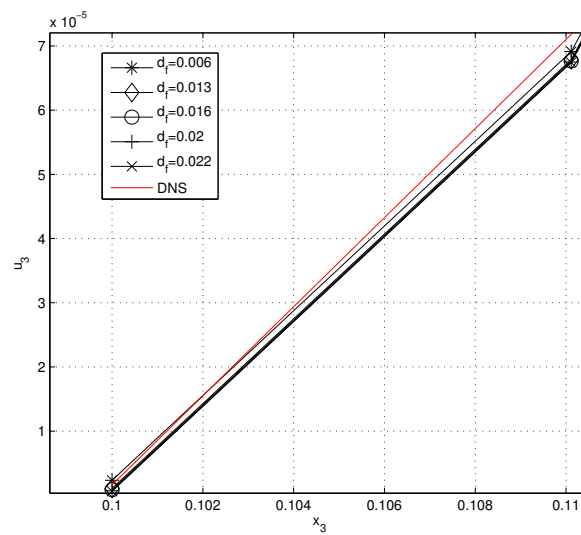


Figura 4.23: Ingrandimento all'interfaccia per profili di velocità verticale nel dominio fluido per la DNS e per diverse scelte di  $d_f$ .

## 4.4 Studio parametrico con il modello omogeneo

In seguito alla validazione sono stati effettuati diversi studi parametrici. Innanzitutto é stato valutato l'andamento della velocità all'interfaccia del mezzo poroso, al variare della porosità. Modificando opportunamente i parametri  $K_{11}$  e  $K_f = K_{33}$ . Il valore assoluto della velocità cresce all'aumentare della porosità, raggiungendo i picchi più alti nel caso limite di  $\vartheta = 0.99$ , dove il mezzo poroso é molto rado. É stato fissato  $Re_L = 100$ . In questi calcoli lo spessore della membrana semipermeabile  $d_f$ , che rappresenta la zona di interfaccia, é stato posto pari a 0.013, cioè é di  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  come gli interstizi del mezzo. Questo valore é stato scelto dopo una opportuna calibrazione, essendo il valore che permette di validare il codice per il caso particolare scelto in precedenza. Un altro studio é stato fatto variando il numero di Reynolds. Esso é stato eseguito per  $Re_L$  100, 500, 1000. L'andamento dei grafici nelle figure 4.26 e 4.27 mostra che l'ampiezza del campo di velocità all'interfaccia cresce con  $Re_L$ . É stato eseguito, infine, un calcolo della cavità geometricamente identica alle precedenti senza mezzo poroso. La presenza del rivestimento fa aumentare la velocità orizzontale (figura 4.28). Le velocità, calcolate all'altezza  $x_3 = 0.2$ , sono superiori, perché non si forma più uno strato limite come nel caso tradizionale di lastra piana, ma alla base é presente una velocità diversa da zero.

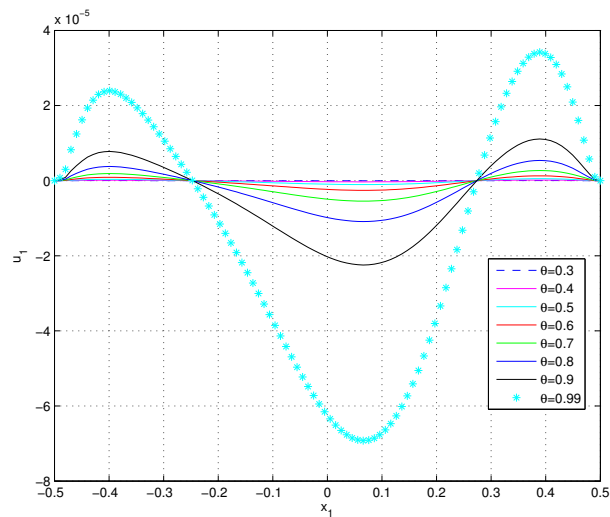


Figura 4.24: Studio parametrico del profilo di velocità orizzontale all'interfaccia porosa con  $\vartheta = [0.3, 0.99]$ ,  $d_f = 0.013$ ,  $Re_L = 100$ .

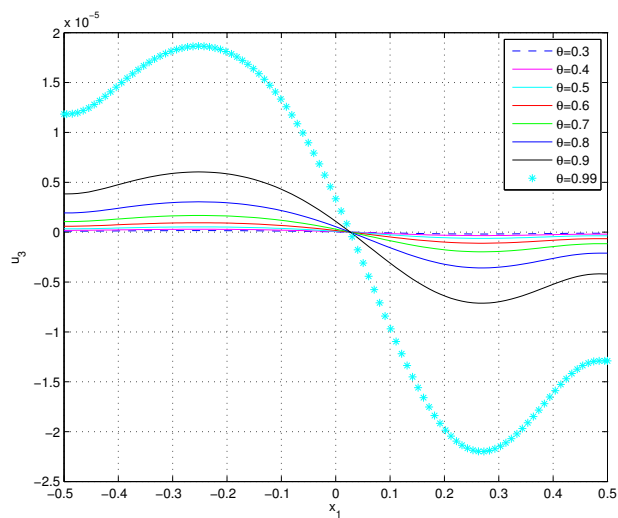


Figura 4.25: Studio parametrico del profilo di velocità verticale all'interfaccia porosa con  $\vartheta = [0.3, 0.99]$ ,  $d_f = 0.013$ ,  $Re_L = 100$ .

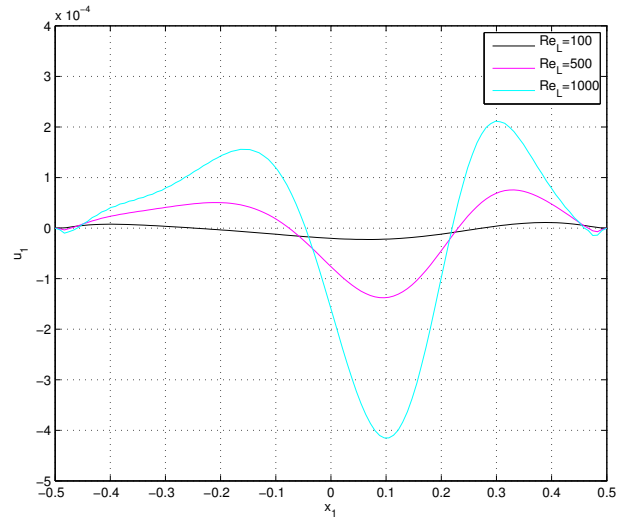


Figura 4.26: Profili di velocità orizzontale all'interfaccia porosa con  $Re_L$  rispettivamente pari a 100, 500, 1000.

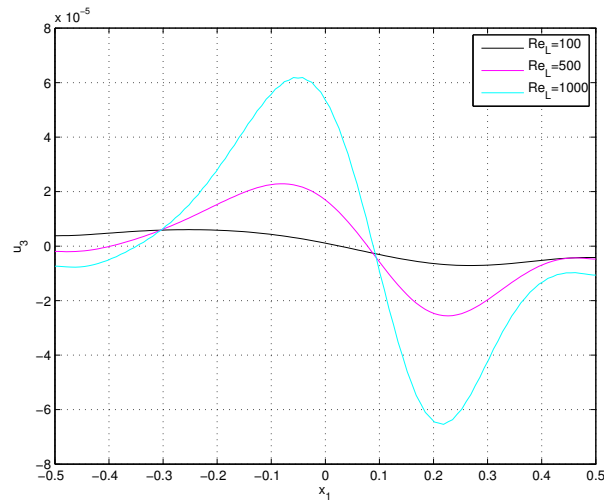


Figura 4.27: Profili di velocità verticale all'interfaccia porosa con  $Re_L$  rispettivamente pari a 100, 500, 1000.

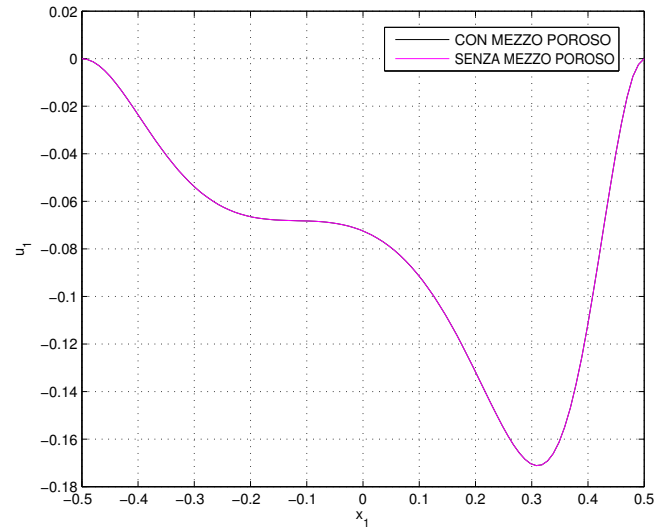


Figura 4.28: Profili di velocità orizzontale ( $u_1$ ) lungo tutta la cavità, calcolati all'altezza  $x_3 = 0.2$ . Essi sono stati ricavati con e senza mezzo poroso.

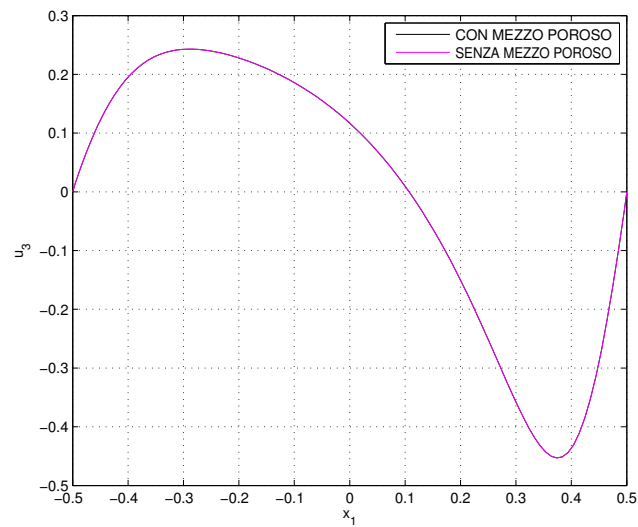


Figura 4.29: Profili di velocità verticale ( $u_3$ ) lungo tutta la cavità, calcolati all'altezza  $x_3 = 0.2$ . Essi sono stati ricavati con e senza mezzo poroso.



# Capitolo 5

## Strumenti numerici impiegati

In questo capitolo presentiamo i metodi numerici utilizzati per la risoluzione di equazioni differenziali.

### 5.1 Metodo dei Volumi Finiti

Diamo qui una breve introduzione sul metodo dei volumi finiti (FVM, cfr. Versteeg & Malalasekera (2007)). Supponiamo di voler risolvere l'equazione del trasporto generalizzata:

$$\int_{V_P} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} dV + \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \phi) dV - \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi) dV = \int_{V_P} S_\phi(\phi) dV \quad (5.1.1)$$

con condizioni iniziali e al contorno. Ipotizzando che tutte le variabili dipendenti possano variare linearmente intorno a un punto P nello spazio e all'istante t nel tempo ricaviamo:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \phi_P + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \cdot (\nabla \phi)_P, \\ \phi(t + \delta t) &= \phi^t + \delta t \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^t. \end{aligned}$$

Dividiamo il dominio dove si ricerca la soluzione in volumi di controllo arbitrari  $V_P$ . Quest'ultimo é costruito intorno al suo baricentro P. Se  $V_N$  é un volume di controllo adiacente a  $V_P$ , il vettore che congiunge P a N, baricentro di  $V_N$ , si chiama  $\mathbf{d}$ . Le facce del volume di controllo vengono indicate con  $f$ . Il vettore  $\mathbf{S}_f$  punta verso l'esterno dal volume di controllo, si trova sul baricentro della faccia, é normale ad essa ed ha un modulo uguale all'area di  $S_f$ . Infine, nel caso di griglia collocata, si assume che i valori di tutte le

variabili siano calcolati e memorizzati nel baricentro del volume di controllo e che siano rappresentati da un profilo costante:

$$\phi_P = \bar{\phi} = \frac{1}{V_P} \int_{V_P} \phi(\mathbf{x}) dV.$$

Richiamando il teorema di Gauss:

$$\int_{V_P} \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \oint_{\partial V_P} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{a},$$

dove  $\partial V$  é una superficie chiusa che delimita il volume di controllo e  $dS$  rappresenta un elemento di superficie infinitesimo con normale  $\mathbf{n}$  che punta verso l'esterno della superficie. Utilizziamo il teorema di Gauss per convertire gli integrali di volume in integrali di superficie nell'equazione (5.1.1):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_P} (\rho\phi) dV + \oint_{\partial V_P} d\mathbf{S} \cdot (\rho\mathbf{u}\phi) - \oint_{\partial V_P} d\mathbf{S} \cdot (\rho\Gamma_\phi \nabla\phi) = \int_{V_P} S_\phi(\phi) dV. \quad (5.1.2)$$

Supponendo che gli integrali possano essere trasformati in sommatorie, ogni termine dell'equazione può essere approssimato come segue:

$$\begin{aligned} \text{Termine convettivo: } \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\phi) dV &= \oint_{\partial V_P} d\mathbf{S} \cdot (\rho\mathbf{u}\phi) = \\ &= \sum_f \int_f d\mathbf{S} \cdot (\rho\mathbf{u}\phi)_f \approx \sum_f \mathbf{S}_f \cdot (\overline{\rho\mathbf{u}\phi})_f = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot (\rho\mathbf{u}\phi)_f; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Termine diffusivo: } \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho\Gamma_\phi \nabla\phi) dV &= \oint_{\partial V_P} d\mathbf{S} \cdot (\rho\Gamma_\phi \nabla\phi) = \\ &= \sum_f \int_f d\mathbf{S} \cdot (\rho\Gamma_\phi \nabla\phi)_f \approx \sum_f \mathbf{S}_f \cdot (\overline{\rho\Gamma_\phi \nabla\phi})_f = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot (\rho\Gamma_\phi \nabla\phi)_f; \end{aligned}$$

$$\text{Termine sorgente: } \int_{V_P} S_\phi(\phi) dV = \mathbf{S}_c V_P + \mathbf{S}_P V_P \phi_P;$$

$$\text{Termine gradiente: } (\nabla\phi)_P = \frac{1}{V_P} \sum_f (\mathbf{S}_f \phi_f).$$



## 5.2 Metodo delle Differenze Finite

Il solutore del modello omogeneo macroscopico é stato implementato con il metodo delle differenze finite (FDM). Spieghiamo il FDM con un semplice esempio nel caso di funzioni di singola variabile. Il nostro scopo é rappresentare una funzione scalare  $f(x)$  su un insieme ordinato discreto di punti  $x_j$ , con  $j = 1, \dots, N$ , sulla retta reale. Anche se molti dei concetti introdotti in questa sezione possono essere generalizzati a un insieme di punti con distanza arbitraria tra loro, ci concentreremo prima su insiemi di punti equispaziati, cioé  $x_j = j\Delta x$ , con  $\Delta x > 0$ ,  $j = 1, \dots, N$ . L'obiettivo é approssimare la derivata  $f'(x)$  mediante una combinazione lineare di valori discreti  $f_i = f(x_i)$ . Nel caso di derivata prima, se si utilizza uno schema del primo ordine a due punti, si ha:

$$f'_i \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}.$$

In generale dobbiamo specificare il numero e la posizione dei valori discreti della funzione  $f_j$  che vengono utilizzati nell'approssimazione, e la posizione in cui la derivata é da valutare. Ad esempio, prendendo in considerazione tre valori della funzione  $(f_{i-1}, f_i, f_{i+1})$  e volendo valutare la derivata nel punto  $x_i$  centrale, vale la seguente formula:

$$f'_i - af_{i-1} - bf_i - cf_{i+1} = \mathcal{O}(\Delta x^p) \quad (5.2.1)$$

con i coefficienti  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e l'ordine di accuratezza  $p$  incogniti. Si possono scrivere equazioni simili per le derivate di ordine superiore. Una volta che i coefficienti incogniti vengono determinati, le derivate nelle equazioni possono essere sostituite da combinazioni lineari dei valori della funzione, ottenendo un sistema lineare, o non lineare, di equazioni per i valori della funzione  $f_j$ , che deve essere risolto numericamente. Per determinare i coefficienti  $a$ ,  $b$  e  $c$  dell'espressione (5.2.1) per la derivata prima, usiamo uno sviluppo in serie di Taylor della funzione  $f$  intorno al punto  $x_i$  in cui é necessario conoscere la derivata. Otteniamo (ipotizzando una griglia equispaziata):

$$f'_i \approx a(f_i - f'_i \Delta x + \frac{1}{2}f''_i \Delta x^2 + \dots) + bf_i + c(f_i + f'_i \Delta x + \frac{1}{2}f''_i \Delta x^2 + \dots). \quad (5.2.2)$$

Raccogliendo i termini al secondo membro secondo l'ordine delle derivate e valutando l'espressione al primo, possiamo estrarre un insieme di tre

equazioni per i tre coefficienti incogniti  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ -a + c = \frac{1}{\Delta x}, \\ a + c = 0. \end{cases} \quad (5.2.3)$$

Il risultato del sistema determina la seguente approssimazione della derivata prima di  $f$  nel punto  $x_i$

$$f'_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}.$$

Le equazioni in (5.2.3) sono state ottenute troncando l'espansione di Taylor in (5.2.2) all'ordine  $\Delta x^2$ . L'errore di troncamento  $e$  si può scrivere come:

$$e = (c - a) \frac{f'''_i}{6} \Delta x^3 = \frac{f'''_i}{6} \Delta x^2 \sim \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

Quindi esso diminuisce quadraticamente con  $\Delta x$ . Per ottenere rappresentazioni di ordine superiore della derivata prima sono richiesti più valori della funzione  $f_j$ , per cui sono necessari più coefficienti per annullare le derivate di ordine superiore al secondo membro. Nel solutore utilizzato in questa tesi abbiamo scelto uno schema per le differenze finite di ordine di accuratezza pari a 4. I coefficienti incogniti sono 5. In mezzo al dominio utilizziamo uno schema centrato, mentre avvicinandosi ai confini del dominio (secondo o penultimo punto) viene impiegato uno schema uno indietro tre avanti o uno avanti tre indietro. Sul bordo utilizziamo uno schema completamente in avanti o indietro. Riportiamo solo un esempio per differenze centrate del quarto ordine. Se vogliamo esprimere la derivata prima di  $f$  come combinazione lineare dei suoi valori nei punti limitrofi otteniamo:

$$f'(x) = af(x-t-y) + bf(x-y) + cf(x) + df(x+z) + ef(x+z+w) \quad (5.2.4)$$

indicando con  $t$ ,  $y$ ,  $z$  e  $w$  gli interspazi tra nodi successivi. Dobbiamo scrivere un sistema lineare per determinare i coefficienti  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  ed  $e$  di ciascun termine dell'equazione (5.2.4). Sostituendo gli sviluppi di Taylor e imponendo che siano uguali ai termini al primo membro, i coefficienti  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  ed  $e$  risolvono il seguente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -(y+t) & -y & 0 & z & z+w \\ (y+t)^2 & y^2 & 0 & z^2 & (z+w)^2 \\ -(y+t)^3 & -y^3 & 0 & z^3 & (z+w)^3 \\ (y+t)^4 & y^4 & 0 & z^4 & (z+w)^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2.5)$$

Si allega un estratto del codice Matlab che permette di trovare i coefficienti  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  ed  $e$ .

```
function vec = dXvec(t,y,z,w)
A = [1 1 1 1 1; -(t+y) -y 0 z z+w; (t+y)^2 y^2 0 z^2 (z+w)^2 ; -(t+y)^3 -y^3
      0 z^3 (z+w)^3; (t+y)^4 y^4 0 z^4 (z+w)^4 ];
b=[0 1 0 0 0];
vec=A\b';
```

## 5.3 Calcoli microscopici

Per eseguire i calcoli su scala microscopica é stato utilizzato OpenFOAM, un pacchetto software Opensource (<http://www.openfoam.org>). Questo programma é stato sviluppato per la risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE) di vario tipo e si basa sul metodo dei volumi finiti (cfr. 5). In questa sezione ci concentriamo sui solutori delle equazioni che costituiscono i modelli fisici descritti in precedenza (cfr. problemi differenziali (2.0.14) e (2.0.17)). Partendo da solutori esistenti in OpenFOAM, sono state apportate alcune modifiche. Supponiamo di avere un determinato problema chiamato test. OpenFOAM ha bisogno di tre cartelle fondamentali:

- **0**, che contiene le informazioni circa l'inizializzazione dei campi ignoti con le relative condizioni al contorno;
- **constant**, che include tutto ciò che concerne il dominio discretizzato;
- **system**, che contiene i metodi numerici utilizzati per la discretizzazione spaziale e temporale.

Siccome il problema microscopico sul piano  $(x_1, x_2)$  (2.0.17) é un problema di Stokes per  $K$  e  $A$ , esso viene risolto modificando il solver **icoFoam**, usato per flussi incomprimibili: si elimina il termine non lineare e si introduce una forza di volume chiamata  $F$ , tale che  $F_{ij} = \delta_{ij}$ , come in (2.0.17). Il solver é stato chiamato **k11Foam** ed é presentato nell'estratto di codice sottostante.

```
fvVectorMatrix UEqn
(
    fvm::ddt(K)
    - fvm::laplacian(nu, K)
);
5
solve(UEqn == F - fvc::grad(A));
```

Nel nostro caso  $\nu$  vale 1 e va inizializzato perché OpenFOAM risolve equazioni dimensionali. Il problema microscopico per  $K_{33}$  (problema (2.0.14)) viene risolto modificando opportunamente la routine `laplacianFoam`, introducendo anche qui una forza di volume  $F = 1$ , come si può notare nell'estratto del solver `k33Foam` qui allegato.

```

while (simple.correctNonOrthogonal())
{
    solve
5      (
        fvm::ddt(K)
        - fvm::laplacian(nu,K)
        + F
10     );
}
```

Gli operatori presenti nei codici soprastanti consentono di discretizzare le PDE in un insieme di equazioni algebriche lineari, che vengono espresse in forma matriciale  $Ax = b$ . Ogni termine in una PDE è rappresentato nel linguaggio di OpenFOAM utilizzando le classi di funzioni `finiteVolumeMethod` e `finiteVolumeCalculus`, abbreviate rispettivamente in `fvm` e `fvc`. Definire questi operatori all'interno di due classi consente di distinguere:

- operatori associati a `fvm`, che calcolano le derivate implicite, e restituiscono un oggetto di tipo `fvMatrix` che va a costruire la matrice  $A$ ;
- operatori associati a `fvc`, che calcolano derivate esplicite, restituendo un oggetto di tipo `geometricField` che va a costruire il vettore  $b$ .

Gli operatori `ddt`, `laplacian` e `grad` sono la derivata temporale, il laplaciano e il gradiente discreti. La funzione `solve` consente di risolvere il sistema lineare  $Ax = b$ . Dopo aver così ricavato il tensore di permeabilità è necessario ricavarne i valori integrali in fase di post processing.

## 5.4 Solutore delle equazioni di Navier-Stokes

Per risolvere numericamente le NSE ((4.1.2)) è stato utilizzato il FDM. Per disaccoppiare velocità e pressione, è stato scelto di utilizzare il Fractional Step Method (FSM). Il termine non lineare è stato linearizzato con una discretizzazione temporale. Il termine viscoso è discretizzato con uno schema

temporale di Crank-Nicolson, il termine non lineare con Adams-Bashfort. Applicando gli operatori spaziali e temporali discreti alle (4.1.2), si ricava

$$D\mathbf{u}^{(n+1)} = 0,$$

$$\frac{\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}}{\Delta t} + N(\mathbf{u}^{(n)}) = -Gp^{(n+1)} + \frac{1}{Re}L\frac{\mathbf{u}^{(n+1)} + \mathbf{u}^{(n)}}{2}.$$

Raccogliendo  $\mathbf{u}^{(n+1)}$  otteniamo:

$$D\mathbf{u}^{(n+1)} = 0,$$

$$\mathbf{u}^{(n+1)}\left(\frac{I}{\Delta t} - \frac{L}{2Re}\right) + Gp^{(n+1)} = \frac{I}{\Delta t}\mathbf{u}^{(n)} + \frac{1}{2Re}L\mathbf{u}^{(n)} - N(\mathbf{u}^{(n)}). \quad (5.4.1)$$

Se definiamo  $A = (\frac{I}{\Delta t} - \frac{L}{2Re})$  e  $r^{(n)} = \frac{I}{\Delta t}\mathbf{u}^{(n)} + \frac{1}{2Re}L\mathbf{u}^{(n)} - N(\mathbf{u}^{(n)})$  le equazioni (5.4.1) si possono esprimere come

$$D\mathbf{u}^{(n+1)} = 0,$$

$$A\mathbf{u}^{(n+1)} + Gp^{(n+1)} = r^{(n)}, \quad (5.4.2)$$

che si può essere scritto in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} A & G \\ D & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(n+1)} \\ p^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{(n)} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.4.3)$$

Nel sistema lineare (5.4.3)  $\mathbf{u}^{(n+1)}$  e  $p^{(n+1)}$  sono rispettivamente velocità e pressione calcolate al tempo  $(n+1)$ . Le matrici  $G$  e  $D$  corrispondono rispettivamente agli operatori discreti gradiente e divergenza, mentre  $L$  é il laplaciano discreto. Il lato destro dell'equazione (5.4.3) é costituito dai termini espliciti dell'equazione del momento, calcolati al tempo  $(n)$ . É interessante notare che  $G = -D^T$  per una formulazione con griglie staggerate. Nella presente analisi adottiamo l'osservazione di Perot (1993), che considera la seguente approssimazione:

$$\Delta t A G = \Delta t \left( \frac{I}{\Delta t} - \frac{L}{2Re} \right) G = G - \frac{\Delta t L}{2Re} G.$$

Se  $\Delta t \ll 1$  otteniamo che  $\Delta t A G = G$ . Le equazioni in (5.4.1) diventano

$$D\mathbf{u}^{(n+1)} = 0,$$

$$A(\mathbf{u}^{(n+1)} + \Delta t G p^{(n+1)}) = r^{(n)}. \quad (5.4.4)$$

Definendo  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{(n+1)} + \Delta t G p^{(n+1)}$ , il sistema (5.4.4) é risolto in tre passi:

$$A\mathbf{u}^* = r^{(n)} \quad (5.4.5)$$

$$D\mathbf{u}^* = \Delta t D G p^{(n+1)} \quad (5.4.6)$$

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}^* - \Delta t G p^{(n+1)} \quad (5.4.7)$$

Si allega un estratto del codice Matlab che implementa tale metodo.

```
% solve the linear system
function [v,p,residual,residualp,errorv] = LinearSolver(Au,Av,Ap,so,node,
    center,dt,vlow,par,dim,v,pOld,N,varargin)

if nargin < 14
5    % Use forward Euler if at the first time step
        RHS.x=v.x/dt + so.FODxxu*v.x/(2*par.Re) + (v.x*so.FODyyu')
            /(2*par.Re) - N.x;
        RHS.y=v.y/dt + so.FODxxv*v.y/(2*par.Re) + (v.y*so.FODyyv')/(2*par.Re)
            - N.y;
    else
        Nold = varargin{1};
10    % Use second order Adam Bashforth otherwise
        RHS.x=v.x/dt + so.FODxxu*v.x/(2*par.Re) + (v.x*so.FODyyu')
            /(2*par.Re) - 3/2*N.x + 1/2*Nold.x;
        RHS.y=v.y/dt + so.FODxxv*v.y/(2*par.Re) + (v.y*so.FODyyv')/(2*par.Re)
            - 3/2*N.y + 1/2*Nold.y;
    end

15 % Solving the system
    rhs.x = col(RHS.x);
    rhs.y = col(RHS.y);
    starv.x = Au\rhs.x;
    starv.y = Av\rhs.y;
20    %Second step of the fractional step method

    [p,starv] = Psolver(Ap,so,starv,dim,dt,center);

25 % Third step of the fractional step method

    v.x(2:end-1,2:end-1) = starv.x(2:end-1,2:end-1) - dt*so.Ipy*(so.FODxp*p);
    v.y(2:end-1,2:end-1) = starv.y(2:end-1,2:end-1) - dt*(so.Ipx*so.FODyp*p)';
```

Spieghiamo adesso il significato delle variabili presenti nel codice soprastante:

- **rhs** corrisponde a  $r^{(n)}$  nell'equazione (5.4.5);
- **Au** e **Av** rappresentano  $A$  nell'equazione (5.4.5);
- **starv.x** e **starv.y** sono  $\mathbf{u}^*$  in (5.4.5);
- **Psolver** risolve l'equazione (5.4.6);
- le linee 33 e 34 aggiornano la velocità come nell'equazione (5.4.7).

## 5.5 Configurazione macroscopica studiata con le DNS

Per implementare le DNS, invece, é stato impiegato OpenFOAM utilizzando il solver `icoFoam`. Nel post processing dei dati, per analizzare il flusso nella regione porosa, é stato necessario modificare il file `controlDict` e introdurre il dizionario `topoSetDict` (entrambi presenti nella cartella `system`). In `controlDict` é stato inserito un `functionObject`, che consente di dividere il mezzo poroso in dieci celle elementari per fibra per poter valutare i valori integrali del vettore velocità e del gradiente di pressione. É necessario introdurre nel dizionario, un numero di funzioni pari al numero di celle che si vogliono ricavare:

```

libs          (" libFVFunctionObjects.so" );

functions
{
5   myCalc_calcFvcGrad
    {
        type          calcFvcGrad;
        libs          (" libFVFunctionObjects.so" );
        fieldName      "p";
10    resultName       "pg";
        outputControl  timeStep;
        outputInterval 1;
        log true;
    }
15
    cubicfilla
    {
        type          cellSource;
        functionObjectLibs (" libfieldFunctionObjects.so" );
20    enabled true;
        outputControl  timeStep;
        outputInterval 100;
        log true;
        valueOutput    false;
25    source cellZone;
        sourceName      filla;
        operation        volIntegrate;
        fields
        (
30    p
        U
        pg
        );
    }
}

```

dove `p`, `U` e `pg` sono rispettivamente la pressione, il vettore velocità e il gradiente di pressione. Nel `topoSetDict` sono contenute le istruzioni geome-

triche per poter generare le celle elementari sopra descritte. Anche in questo caso é necessario introdurre delle funzioni in base al numero e alla geometria della cella desiderata:

```
{
name      fil ;
type      cellSet ;
action    new;
5 source   boxToCell;
sourceInfo
{
name      " fil ";
box       (0.01 0.02 -0.005)(0.02 0.03 0.005);
10 }
}
```

In questo caso viene costruita una cella cubica con coordinate (0.01 0.02 -0.005)(0.02 0.03 0.005). É così possibile eseguire una stima dei valori del tensore di permeabilità acquisendo i valori di velocità e pressione con uno script di Matlab e poi invertendo la legge di Darcy:

```
clc
close all
clear all
v3scale=load(' ./3scalecavity/0.9-3scale/v3scale.mat ');
5 node3scale=load(' ./3scalecavity/0.9-3scale/node3scale.mat ');
C=(v3scale.v.x(:,1));
D=(v3scale.v.y(:,1));
volume_cell=(0.01^3);
letter_index=['a','b','c','d','e','f','g','h','i','l'];
10 for l=1:100
    for j=1:10
        fileName = strcat(' ./postProcessing/cubicfil',num2str(l),num2str(
            letter_index(j)),'/12.4293/cellSource.dat');
        inputfile = fopen(fileName);
        % Skip the first 3 lines
15 for i=1:3
            fgetl(inputfile);
        end
        f=textscan(inputfile,'%f %f %f ( %f %f %f %s ( %f %f %f %s');
        p(l,j) = f{1,3}/volume_cell;
20 u(l,j) = f{1,4}/volume_cell;
        v(l,j) = f{1,5}/volume_cell;
        w(l,j) = f{1,6}/volume_cell;
        pgx(l,j) = f{1,7}/volume_cell;
        pgy(l,j) = f{1,8}/volume_cell;
25 pgz(l,j) = f{1,9}/volume_cell;
        fclose(inputfile);
    end
end
xx=-0.495:0.01:0.495;
30 yy=0.005:0.01:0.995;
figure;
plot(node3scale.node.x,C,'g');
hold on;
```



```

    plot(xx, mean(u'), 'r');
35 grid on;
    legend('3scale', 'DNS');
    figure;
    plot(node3scale.node.xcoordvy, D, 'g');
    hold on;
40 plot(xx, mean(v'), 'r');
    grid on;
    legend('3scale', 'DNS');
    figure;
    k11=-u./pgx;
45 plot(xx, mean(k11')) ;
    figure;
    k33=-v./pgy;
    plot(xx, mean(k33')) ;

```

Quest'ultimo, inoltre, consente di confrontare i profili di velocità all'interfaccia ricavati con la DNS e con il codice macroscopico.

## 5.6 Convergenze spaziali e temporali dei risultati ottenuti

Se si utilizza OpenFOAM, per costruire un dominio discretizzato (mesh) é necessario partire da una geometria CAD del dominio fisico. Quest'ultima é poi suddivisa in celle la cui forma dipende dal tipo di algoritmo di meshing impiegato.

### 5.6.1 Calcoli microscopici

Tutte le mesh per i calcoli microscopici sono state costruite utilizzando l'algoritmo NetGen. Si é disegnato solamente un quarto di reticolo per garantire la simmetria della griglia in modo da poter imporre condizioni periodiche in maniera coerente. Dopodiché é stato specchiato, utilizzando la routine di OpenFOAM `mirrorMesh`, per ricostruire l'intero dominio microscopico. Si é impostato dunque l'algoritmo in modo tale da generare mesh costituite da celle esaedriche e tetraedriche che, come si può notare in figura 5.1, dopo un paio di tentativi, consentono di raggiungere la convergenza spaziale (tabella 5.1). Per  $K_{33}$ , come é mostrato in tabella 5.2, é sufficiente una mesh più rada per arrivare a convergenza. In figura 5.2 é riportato un esempio di convergenza temporale.

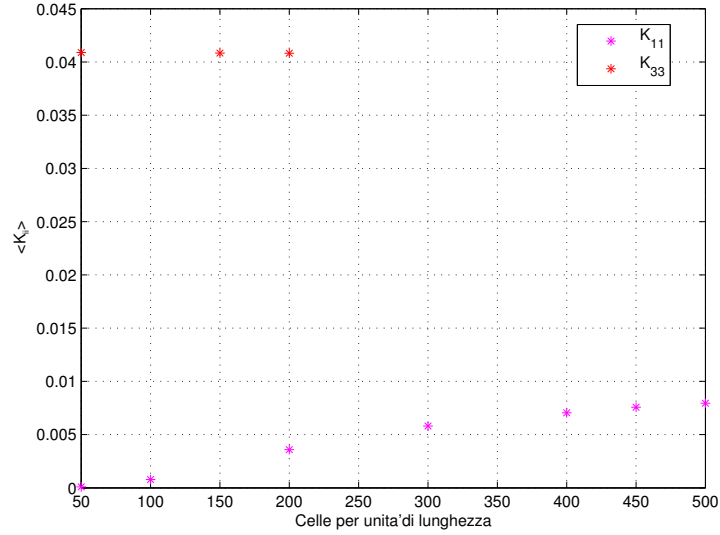


Figura 5.1: Convergenza spaziale valutata osservando  $K_{11}$  e  $K_{33}$  all'interno del dominio rispetto al numero di celle per unità di lunghezza. I valori di porosità considerati per i due casi sono diversi, in particolare per  $K_{11}$   $\vartheta = 0.7$  e per  $K_{33}$   $\vartheta = 0.8$ .

$N$	$K_{11}$
$50^3$	0.00000183256
$100^3$	0.0000156811
$200^3$	0.0000718916
$300^3$	0.000116182
$400^3$	0.000141047
$450^3$	0.000151567
$500^3$	0.000159044

Tabella 5.1:  $K_{11}$  valutato con approccio a tre scale. La mesh ibrida é stata costruita con l'algoritmo NetGen usando 50 ,100, 200, 300, 400, 450 e 500 celle per unità di lunghezza. Le fibre sono cilindriche con  $\vartheta = 0.7$  .

$N$	$\mathcal{K}_{33}$
$50^3$	0.000817709
$150^3$	0.000816652
$200^3$	0.000816534

Tabella 5.2:  $\mathcal{K}_{33}$  valutato con approccio a tre scale. La mesh ibrida é stata costruita con l'algoritmo NetGen usando 50 ,150 e 200 celle per unità di lunghezza. Le fibre sono cilindriche con  $\vartheta = 0.8$  .

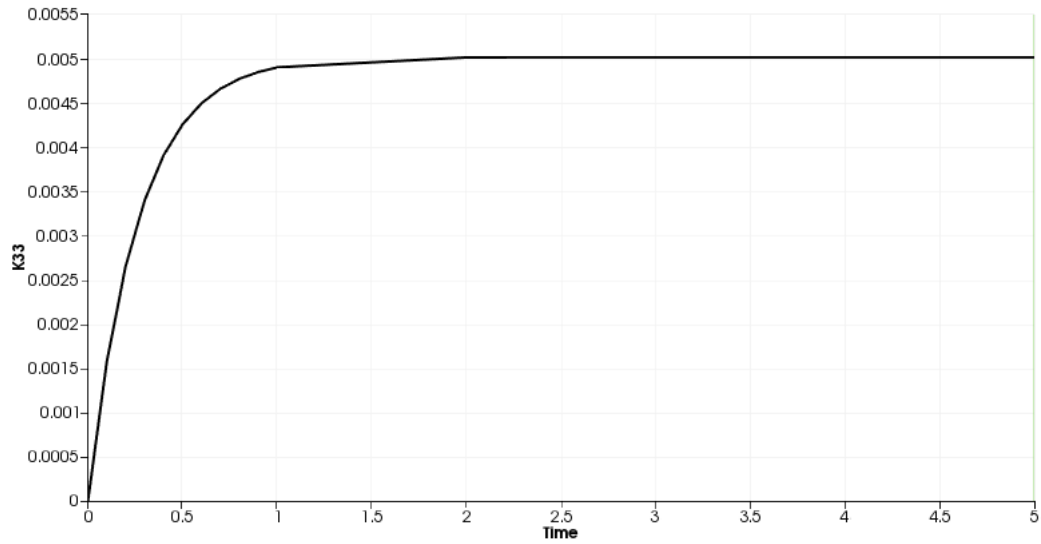


Figura 5.2: Convergenza temporale valutata osservando  $\mathcal{K}_{33}$ , per porosità  $\vartheta = 0.99$ .

### 5.6.2 DNS

Le mesh per le DNS sono state generate utilizzando le routine di OpenFOAM `blockMesh` e `snappyHexMesh`. Il vantaggio della prima applicazione é che ha un dizionario molto semplice da impostare, ma ha il limite di generare soltanto mesh cartesiane. L' esecuzione del comando porta alla creazione della griglia intesa come un insieme di punti, linee, facce e celle. Nel caso particolare di cavità genera un parallelepipedo di dimensioni (1x1x0.01) suddiviso in celle esaedriche con il grading desiderato. Nel linguaggio di OpenFOAM tutto ciò é scritto come:

```

FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
5    class       dictionary;
    object       blockMeshDict;
}

convertToMeters 1;
10
vertices
(
    (0 0 -0.005)
    (1 0 -0.005)
15    (1 1 -0.005)
    (0 1 -0.005)
    (0 0 0.005)
    (1 0 0.005)
    (1 1 0.005)
20    (0 1 0.005)
);

blocks
(
25    hex (0 1 2 3 4 5 6 7) (100 75 3) simpleGrading (1 6 1)
);

edges
(
30 );

boundary
(
    movingWall
35    {
        type wall;
        faces
        (
            (3 7 6 2)
40        );
    }
    fixedWalls

```

```

{
    type wall;
45     faces
        (
            (0 4 7 3)
            (2 6 5 1)
            (1 5 4 0)
50         );
    }
    front
    {
        type cyclic;
55         neighbourPatch back;
        faces
            (
                (4 5 6 7)
60            );
    }
    back
    {
        type cyclic;
        neighbourPatch front;
65         faces
            (
                (0 3 2 1)
70            );
    }
};

mergePatchPairs
(
75 );

```

Il secondo dizionario serve per costruire il reticolo attorno al mezzo poroso. Questa applicazione é in grado di generare meshes contenenti celle esaedriche adattate al contorno di una geometria in formato .stl. É richiesta una mesh iniziale, già creata con **blockMesh**. Dopodiché si importa il file .stl contenente la geometria del mezzo poroso. Di seguito si può osservare il dizionario **snappyHexMeshDict**.

```

FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
5    class       dictionary;
    object       snappyHexMeshDict;
}

// Which of the steps to run
10 castellatedMesh true;
    snap          true;
    addLayers      false;

```

```

// Geometry. Definition of all surfaces.
15 geometry
{
    fil.stl
    {
        type triSurfaceMesh;
20     name fil;
    }

    refinementBox
    {
25     type searchableBox;
        min (0 0 -1);
        max (1 0.12 1);
    }
};
30
castellatedMeshControls
{
    maxLocalCells 100000;
    maxGlobalCells 2000000;
35    minRefinementCells 100;
    maxLoadUnbalance 0.10;
    nCellsBetweenLevels 1;

    refinementSurfaces
40    {
        fil
        {
            // Surface-wise min and max refinement level
            level (3 3);
45
            // Optional specification of patch type (default is wall). No
            // constraint types (cyclic, symmetry) etc. are allowed.
            patchInfo
            {
50                type wall;
                inGroups (fil);
            }
        }
    }
55
    resolveFeatureAngle 30;

    refinementRegions
    {
60        refinementBox
        {
            mode inside;
            levels ((1E15 2));
        }
65    }

    // Mesh selection
    locationInMesh (0.4 0.4 0);
    allowFreeStandingZoneFaces true;

```

```

70 }

    // Settings for the snapping.
    snapControls
    {
75     nSmoothPatch 3;
        tolerance 2.0;
        nSolveIter 30;
        nRelaxIter 5;

80     // Feature snapping
        nFeatureSnapIter 10;
        implicitFeatureSnap false;
        explicitFeatureSnap true;
        multiRegionFeatureSnap false;
85 }

    // Settings for the layer addition.
    addLayersControls
    {
90     layers
        {
            "(lowerWall|fil).*"
            {
                nSurfaceLayers 1;
95         }
        }

        expansionRatio 1.0;
        finalLayerThickness 0.3;
100    minThickness 0.1;
        nGrow 0;

        // Advanced settings
        featureAngle 60;
105    slipFeatureAngle 30;
        nRelaxIter 3;
        nSmoothSurfaceNormals 1;
        nSmoothNormals 3;
        nSmoothThickness 10;
110    maxFaceThicknessRatio 0.5;
        maxThicknessToMedialRatio 0.3;
        minMedianAxisAngle 90;
        nBufferCellsNoExtrude 0;
        nLayerIter 50;
115 }

    meshQualityControls
    {
        #include "meshQualityDict"
120    // Advanced
        nSmoothScale 4;
        errorReduction 0.75;
    }

125 writeFlags

```

```
(
    layerFields
);
mergeTolerance 1e-6;
```

Tale dizionario consente tre operazioni di meshing, che sono indipendenti l'una dall'altra: **castellation**, **snapping** e l'aggiunta di **layers** prismatici. La fase di **castellation** divide una singola cella in più celle ed ha il compito di eseguire il raffinamento della mesh nell'intorno della geometria. La suddivisione dei volumi dipende dal livello di raffinamento che si impone. Si deve, inoltre, specificare se questa operazione va eseguita all'interno o all'esterno della superficie, tramite il comando **locationInMesh**. La sola fase di **castellation** non è in grado di far seguire alle celle l'andamento del profilo, rendendo necessario il secondo passo, cioè lo **snapping**. Questa fase ha il compito di rendere la griglia il più possibile simile al file geometrico. Infine è possibile aggiungere strati di layers prismatici.

Abbiamo studiato la convergenza spaziale nella regione fluida sia in caso di fibre collocate che staggerate. Utilizzando la routine di ParaView **DescriptiveStatistics**, sono stati calcolati per tutti i casi i minimi per la velocità orizzontale e verticale. I risultati, esposti nelle tabelle 5.3 e 5.4 dimostrano la convergenza. La DNS è un calcolo molto gravoso dal punto di vista computazionale, quindi è necessario eseguirlo in parallelo con un certo numero di processori per ottenere la soluzione in tempi accettabili. Nei casi mostrati abbiamo utilizzato 16 processori che hanno lavorato per circa 720 ore. Come si può notare in figura 5.3 sono necessarie circa 10 unità di tempo per arrivare a una soluzione stazionaria per entrambe le grandezze analizzate, cioè i valori integrali di  $U$  e  $p$ .

$N$	$u_{MIN}$	$v_{MIN}$
$1.1 \cdot 10^6$	-0.254141	-0.530315
$2.9 \cdot 10^6$	-0.251618	-0.523045

Tabella 5.3: Valori minimi di velocità orizzontale e verticale. Le fibre sono cilindriche, la disposizione è allineata con  $\vartheta = 0.9$ .

### 5.6.3 Calcoli macroscopici

La risoluzione del modello omogeneo è stata implementata con Matlab. La griglia è staggerata, la pressione viene calcolata sul centro delle celle, la



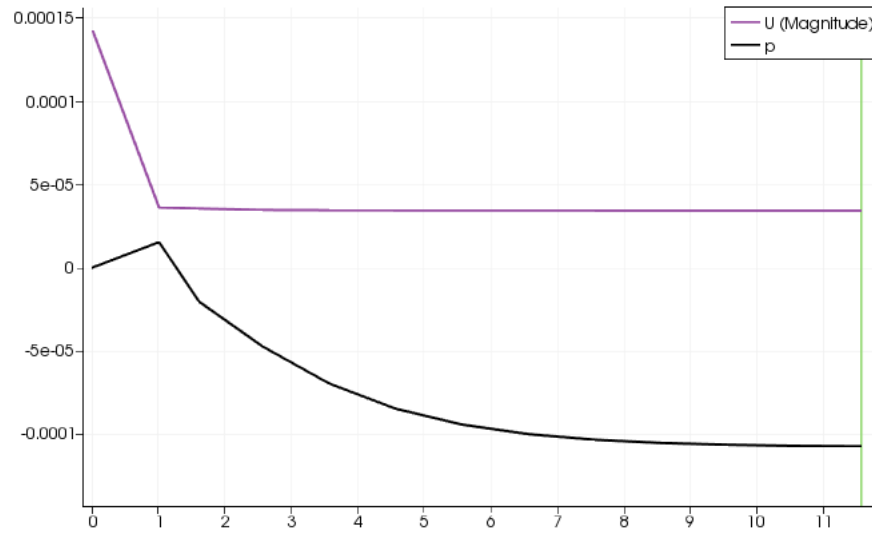


Figura 5.3: Convergenza temporale per una DNS con  $\vartheta = 0.9$  e griglia collocata. La soluzione, cioè i valori integrali di  $U$  e  $p$ , è completamente stazionaria dopo circa 10 unità temporali. La mesh è costituita da  $1.1 \cdot 10^6$  celle.

$N$	$u_{MIN}$	$v_{MIN}$
$1.7 \cdot 10^6$	-0.253912	-0.531153
$2.9 \cdot 10^6$	-0.253556	-0.529003

Tabella 5.4: Valori minimi di velocità orizzontale e verticale. Le fibre sono cilindriche, la disposizione è alternata con  $\vartheta = 0.9$ .

velocità sulle facce. Gli operatori spaziali, come già detto, sono discretizzati con il metodo alle differenze finite del quarto ordine. Per verificare la convergenza spaziale é necessario aumentare il numero di nodi per unità di superficie e verificare che il profilo di velocità a una determinata altezza della cavità non cambi. La verifica é stata eseguita per il caso  $Re_L = 100$  con  $N$  pari a 80, 100, 120 e 140 nodi per unità di superficie. Come si può notare nelle figure 5.4 e 5.5 si riesce a ottenere una buona corrispondenza tra i profili di  $u_1$  e  $u_3$  per  $x_3 = 0.2$ . Per  $Re_L$  pari a 500 e 1000 la procedura é stata eseguita con densità nodali di 120 e 140 ottenendo la convergenza come si può notare nelle figure 5.6, 5.7, 5.8 e 5.9. Abbiamo studiato, inoltre, la convergenza temporale per ogni calcolo. Riportiamo i grafici solo per il caso con  $Re_L = 100$ . La soluzione é stazionaria dopo circa 5000 iterazioni nel tempo. Tutto ciò é esposto in figura 5.10 per i campi di velocità e pressione.

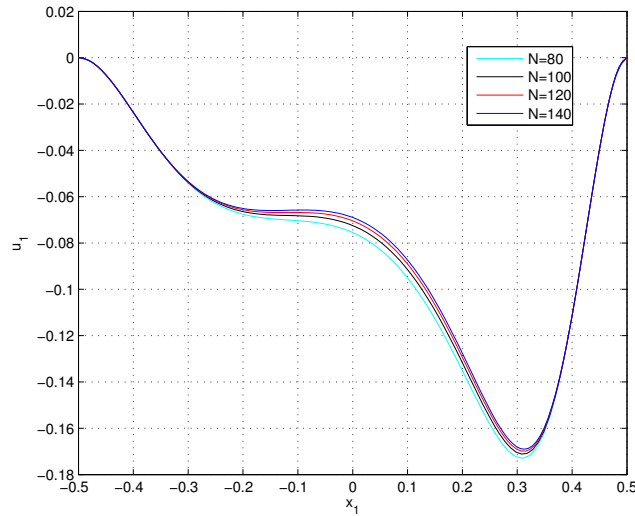


Figura 5.4: Profili di velocità orizzontale al variare di  $x_1$  per  $x_3 = 0.2$ . Essi sono stati ricavati utilizzando  $N = 80, 100, 120, 140$ . Il numero di Reynolds  $Re_L$  é pari a 100.

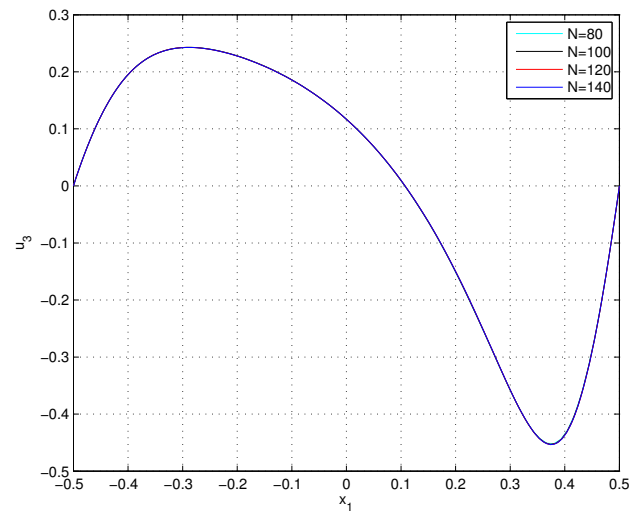


Figura 5.5: Profili di velocità verticale al variare di  $x_1$  per  $x_3 = 0.2$ . Essi sono stati ricavati utilizzando  $N = 80, 100, 120, 140$ . Il numero di Reynolds  $Re_L$  è pari a 100.

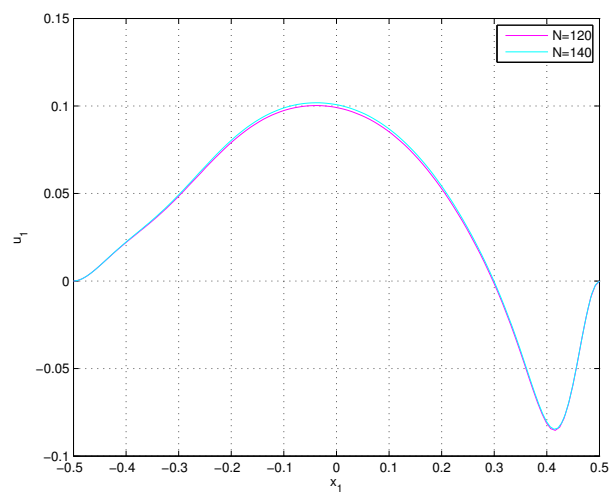


Figura 5.6: Profili di velocità orizzontale al variare di  $x_1$  per  $x_3 = 0.2$ . Essi sono stati ricavati utilizzando  $N = 120, 140$ . Il numero di Reynolds  $Re_L$  è pari a 500.

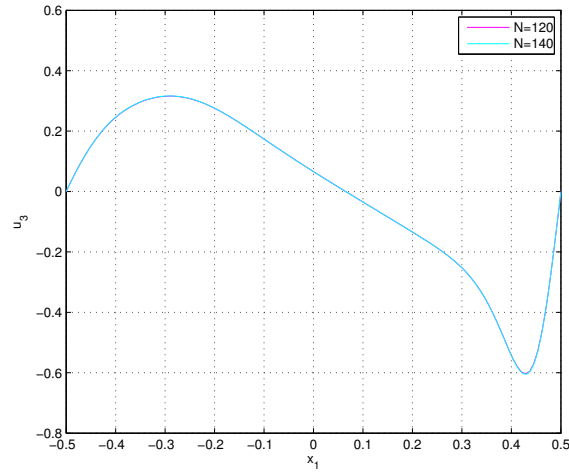


Figura 5.7: Profili di velocità verticale al variare di  $x_1$  per  $x_3 = 0.2$ . Essi sono stati ricavati utilizzando  $N = 120, 140$ . Il numero di Reynolds  $Re_L$  è pari a 500.

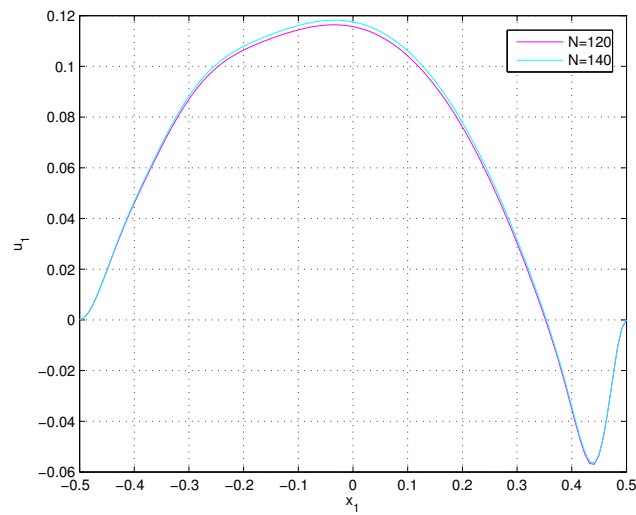


Figura 5.8: Profili di velocità orizzontale al variare di  $x_1$  per  $x_3 = 0.2$ . Essi sono stati ricavati utilizzando  $N = 120, 140$ . Il numero di Reynolds  $Re_L$  è pari a 1000.

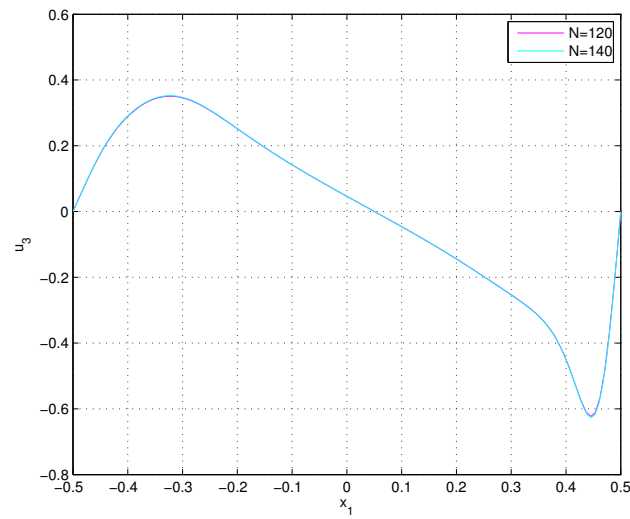


Figura 5.9: Profili di velocità verticale al variare di  $x_1$  per  $x_3 = 0.2$ . Essi sono stati ricavati utilizzando  $N = 120, 140$ . Il numero di Reynolds  $Re_L$  é pari a 1000.

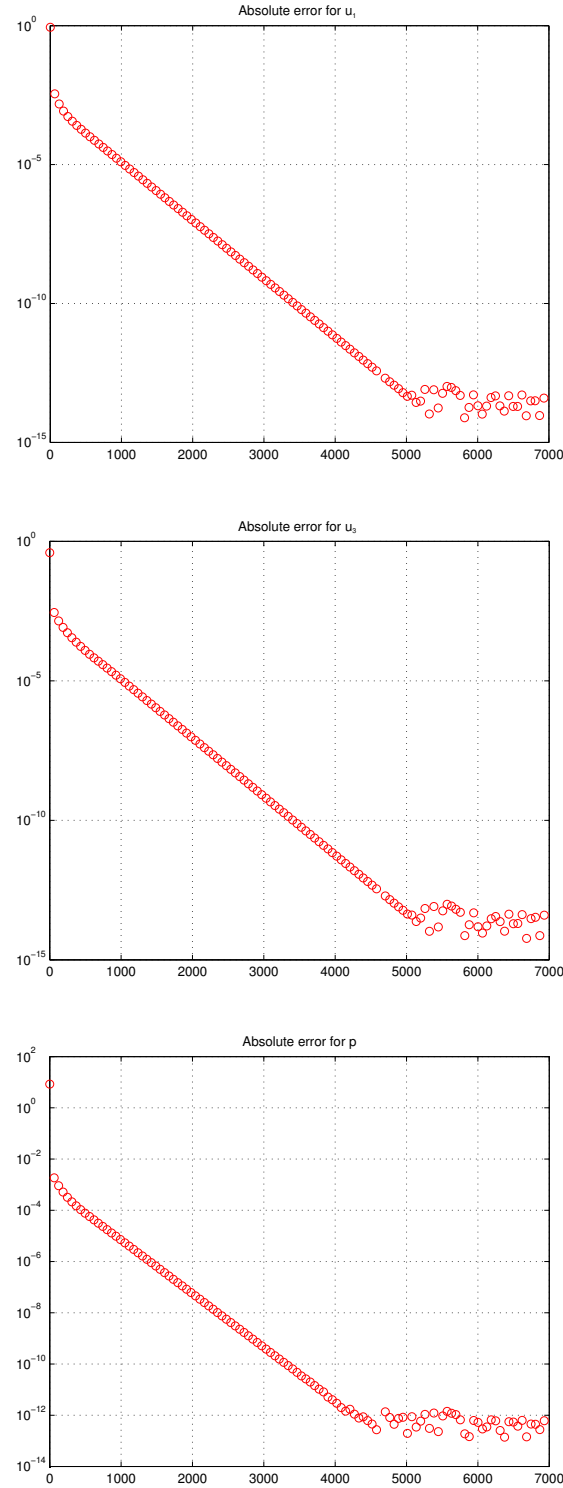


Figura 5.10: Errore assoluto per i campi di velocità e pressione ( $|f^{(n+1)} - f^{(n)}|$ ), con  $f = u_1, u_3, p$ . In ascissa é mostrato il numero di iterazioni nel tempo. La scala in ordinata é logaritmica. La simulazione é stata eseguita con  $Re_L = 100$  e  $\vartheta = 0.9$ .



# Capitolo 6

## Conclusioni

Dal punto di vista numerico l'utilizzo di una tecnica di omogeneizzazione a tre scale diminuisce notevolmente i costi computazionali necessari per risolvere il flusso intorno a mezzi porosi rispetto al caso in cui utilizziamo una DNS. Da un punto di vista microscopico:

- é stato trovato un completo accordo con i risultati microscopici ottenuti con un approccio a due scale (cfr. Zampogna & Bottaro (2016)): l'approccio utilizzato in questo lavoro consente di considerare problemi microscopici definiti su domini bidimensionali, risparmiando nuovamente in termini di risorse computazionali;
- l'invarianza della struttura lungo l'asse  $x_3$  introduce una notevole semplificazione per il calcolo di  $\mathcal{K}_{33}$ : é necessario, infatti, risolvere su  $V_f$  una equazione di Poisson invece delle equazioni di Stokes;
- l'errore sul tensore di permeabilità,  $|\mathcal{K}^{DNS} - \mathcal{K}^{HOM}|$ , é di ordine  $\epsilon^2$ . Questa discordanza deriva dall'approssimazione introdotta dall'espansione a scale multiple, che la teoria dice di essere al più di ordine  $\epsilon$ . Da questo si conclude che più piccolo é  $\epsilon$ , ovvero maggiore é il numero dei cilindri presenti nella cavità unitaria, minore é l'errore. Per diminuirlo, un'altra strategia può essere quella di troncare l'espansione ad ordini più elevati (relazioni (2.0.5));
- con l'ausilio di DNS si può soltanto calcolare una stima della permeabilità, ricavata isolando e mediando i tratti senza singolarità della funzione che ne rappresenta il suo valore puntuale; in realtà non si può



decidere un valore unitario di permeabilità, poiché essa é fortemente influenzata da effetti di parete e dalle zone in cui il gradiente macroscopico di pressione si annulla.

Da un punto di vista macroscopico:

- é importante accoppiare il problema sulla microscala a quello sulla macroscala ponendo attenzione alle condizioni di interfaccia macroscopiche tra fluido e mezzo poroso;
- le DNS, implementate per una configurazione geometrica di cavità unitaria, ci aiutano a capire se la condizione di interfaccia imposta sia consistente, attraverso il confronto tra i profili di velocità, tra DNS e modello omogeneo;
- il confronto descritto al punto precedente serve anche a calibrare le costanti presenti nella condizione di interfaccia (4.1.6);
- la condizione di Gopinath & Mahadevan (2011) fa ottenere dei risultati analoghi alla DNS sia nel mezzo poroso che nella regione fluida.

Il presente studio apre questioni che é necessario perfezionare:

- lo sviluppo di una tecnica di omogeneizzazione con approccio a tre scale per mezzi poroelastici, che consenta di risolvere problemi su domini bidimensionali come per il caso rigido;
- testare nuove condizioni di interfaccia, che garantiscano una corrispondenza ancora migliore tra i risultati ottenuti mediante DNS e modello omogeneo.

# Ringraziamenti

Ringrazio i miei genitori per essermi stati vicini nei momenti più difficili e per avermi sempre aiutato non solo dal punto di vista economico.

Desidero ringraziare il Prof. Alessandro Bottaro e il Dott. Giuseppe A. Zampogna, che mi hanno seguito pazientemente nella stesura di questa tesi, fornendomi sempre consigli utili e facendomi apprendere dei concetti che porterò sempre nel mio bagaglio personale.

Un ultimo ringraziamento lo devo fare ai miei amici conosciuti qua, perché, nonostante io venga da un “luogo molto lontano”, mi hanno accolto e hanno reso le mie giornate di studio più leggere.

# Bibliografia

- BATTIATO, I. 2012 Self-similarity in coupled Brinkman/Navier–Stokes flows. *Journal of Fluid Mechanics*, **699**, 94–114.
- BEAVERS, G. S. & JOSEPH, D. D. 1967 Boundary conditions at a naturally permeable wall. *Journal of Fluid Mechanics*, **30**, (1), 197–207.
- DAGAN, G. 1979 The generalization of Darcy’s law for nonuniform flows. *Water Resources Research* **15**, (1), 1–7.
- GOPINATH, A. & MAHADEVAN, L. 2011 Elastohydrodynamics of wet bristles, carpets and brushes. *Proceedings of the Royal Society*, **467**, (2130), 1–21.
- JÄGER, W. & MIKELIĆ, A. 1996 On the boundary conditions at the contact interface between a porous medium and a free fluid. *Annali Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe Fisiche e Matematiche-Serie IV*, **23**, 403–465.
- MEI, C. C. & AURIAULT, J. L. 1991 The effect of weak inertia on flow through a porous medium. *Journal of Fluid Mechanics*, **222**, 647–663.
- MEI, C. C. & VERNESCU, B. 2010 *Homogenization methods for multiscale mechanics*. World Scientific, Singapore.
- MITYUSHEV, V. & ADLER, P. M. 2002a Longitudinal permeability of spatially periodic rectangular arrays of circular cylinders I. A single cylinder in the unit cell. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **82**, (5), 335–346.
- PEROT, J. B. 1993 An Analysis of the Fractional Step Method. *Journal of Computational Physics*, **108**, 51–58.

- SADIQ, T. A. K. & ADVANI, S. G. & PARNAS, R. S. 1995 Experimental investigation of transverse flow through aligned cylinders. *International Journal of Multiphase Flow*, **21**, (5), 755–774.
- SAFFMAN, P. G. 1971 Boundary condition at the surface of a porous medium. *Studies in Applied Mathematics*, **50**, (2), 93–101.
- SANGANI, A. S. & YAO, C. 1988 Transport processes in random arrays of cylinders. II. Viscous flow. *Physics of Fluids (1958-1988)*, **31**, (9), 2435–2444.
- SKARTSIS, L. & KARDOS, J. L. 1990 The newtonian permeability and consolidation of oriented carbon fiber beds. In *Proceedings of the American Society for Composites. Fifth Technical Conference: Composite Materials in Transition, East Lansing, Michigan*, pp. 548–556.
- VAFAI, K. & KIM, S. J. 1990 Fluid mechanics of the interface region between a porous medium and a fluid layer—an exact solution. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, **11**, (3), 254–256.
- VAN DER WESTHUIZEN, J. & DU PLESSIS, J. P. 1996 An attempt to quantify fibre bed permeability utilizing the phase average Navier-Stokes equation. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, **27**, (4), 263–269.
- VERSTEEG, H. K. & MALALASEKERA, W. 2007 *An introduction to Computational Fluid Dynamics. The Finite Volume Method*. Pearson Education Limited, Harlow, Essex UK.
- WILLIAMS, W.O. 1978 Constitutive equations for flow of an incompressible viscous fluid through a porous medium. *Quarterly of Applied Mathematics*, 255–267.
- ZAMPOGNA, G. A. & BOTTARO, A. 2016 Fluid flow over and through a regular bundle of rigid fibres. *Journal of Fluid Mechanics*, **792**, 5–35.
- ZICK, A. A. & HOMSY, G. M. 1982 Stokes flow through periodic arrays of spheres. *Journal of Fluid Mechanics*, **115**, 13–26.