UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA Facoltà di Ingegneria



Corso di laurea in Ingegneria Meccanica

Anno accademico 2015/2016

Tesi di laurea:

Teoria dell'omogeneizzazione applicata alla Tribologia

Candidati

Elisa Lascialfari Francesco Cattaneo

Relatore

Correlatore

Prof. Ing. Alessandro Bottaro

Ing. Edoardo Alinovi

Indice

1	Intr	roduzione	3
2	Richiami sulle teorie utilizzate		4
	2.1	Cenni storici sulla lubrificazione	4
	2.2	Cenni sull'omogeneizzazione	7
3	Teo	ria della lubrificazione di Reynolds	8
	3.1	Ipotesi Semplificative	9
	3.2	Normalizzazione	10
		3.2.1 Determinazione della scala di pressione	10
	3.3	Considerazioni sui termini inerziali	11
		3.3.1 Componenti $u \in w$ della velocità	13
	3.4	Equazioni di lubrificazione di Reynolds	14
4	Teo	ria dell'omogeneizzazione	16
5	Solu	uzione nel caso monodimensionale	20
	5.1	Metodi di calcolo	21
	5.2	Studio parametrico dei risultati	22
6	Solı	uzione nel caso bidimensionale	28
	6.1	Metodi di calcolo	28
	6.2	Studio parametrico dei risultati	29
7	Cor	nclusioni	35
Ri	Riferimenti bibliografici		

1 Introduzione

L'obiettivo della tesi è quello di ottenere le equazioni di lubrificazione per il moto in tre dimensioni di un fluido viscoso tra due superfici molto ravvicinate tra loro, delle quali una verrà strutturata in modo da modellare una superficie realistica, ovvero con una determinata curvatura e scabrezza. Partendo da queste equazioni, cercheremo le soluzioni analitiche mediante la teoria dell'omogeneizzazione. Nel calcolo completo terremo invece conto dell'effettiva geometria delle superfici, considerando pertanto le microrugosità ed asperità presenti in una parete; infine confronteremo questi risultati con soluzioni approssimate, le quali si servono di misure medie, per verificare se sono accettabili e mettere in evidenza il vantaggio dell'impiego dell'omogeneizzazione.

2 Richiami sulle teorie utilizzate

2.1 Cenni storici sulla lubrificazione

La lubrificazione è un'operazione che permette di facilitare lo scorrimento relativo di due superfici solide, diminuendo i fattori di attrito, l'usura dei materiali ed anche il loro riscaldamento. È di fondamentale importanza in quasi tutti i macchinari ed in molti meccanismi biologici.

Il fluido sarà il protagonista della nostra trattazione, inteso come un sottile strato di materiale continuo tra due pareti e caratterizzato da alta viscosità.



Figura 1: Esempi di cuscinetto.

La tribologia è la scienza che studia le interazioni superficiali tra organi in movimento; in particolare si occupa dunque della lubrificazione, dell'attrito e dell'usura, tenendo in considerazione il fatto che qualunque superficie che delimiti un corpo non è affatto liscia, ma presenta delle rugosità, eventualmente di taglia microscopica.

La teoria della lubrificazione si basa sulle equazioni di Navier-Stokes, formulate dai due studiosi nella prima metà del 1800. Queste sono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali e descrivono il moto di un fluido reale, sottoposto a forze di volume e di superficie.

Già nel 1886 il professor Osborne Reynolds si dilettò negli studi sulla lubrificazione, studiando i risultati e gli scritti di Tower e Petroff; infatti, il suo lavoro [1] descrive la lubrificazione di un albero che ruota dentro un cilindro. La trattazione rappresenta un classico esempio della teoria idrodinamica sull'attrito volvente ed assume che, in quelle condizioni, esso sia presente esclusivamente all'interno del meato di fluido e che sia funzione della viscosità di ques'ultimo.

Servendosi e semplificando appunto le equazioni di Navier-Stokes, Reynolds applicò la teoria della lubrificazione a domini di fluido caratterizzati da due dimensioni molto diverse tra loro: allungati ma di piccolo spessore. La teoria fu a lungo analizzata e utilizzata basandosi su geometrie bidimensionali con domini "infinitamente lunghi" o "infinitamente corti"; in seguito, anche grazie a computer con capacità di calcolo sempre più elevata, l'applicabilità della teoria a domini tridimensionali divenne sempre più semplice e, allo stesso tempo, indispensabile per la progettazione.

Di fondamentale importanza, quando si parla di lubrificazione tra due superfici, è prendere in considerazione l'effetto delle asperità della parete sul fluido e viceversa. Le imperfezioni superficiali si possono creare appositamente per soddisfare determinate caratteristiche necessarie all'utilizzo dell'oggetto, oppure possono essere conseguenza di processi di fabbricazione quali: perforazione, brocciatura, rettifica o lappatura. Inoltre i detriti o le infiltrazioni solide non desiderate possono provocare dei solchi lungo la superficie come in Figura 2c.



Figura 2: a) Superficie con rugosità striata dalla forma opportunamente modellata. b) Superficie di un acciaio lavorato. c) Superficie di un cuscinetto danneggiato da corpi esterni.

La piccola lunghezza d'onda della rugosità rende però l'equazione di Reynolds non sempre valida, perché essa non può essere impiegata se la rugosità è troppo marcata e/o la lunghezza d'onda è troppo breve rispetto allo spessore del film, come hanno dimostrato Sun e Chen [2]. Nello specifico, Mitsuya e Fukui [3] hanno trovato un preciso limite entro il quale l'equazione di Reynolds è valida, in base alle dimensione della lunghezza d'onda e della rugosità. Elrod [4] studiò l'andamento periodico della pressione dovute a superfici parallele, considerando una rugosità arbitraria; egli chiamò i diversi tipi di rugosità: "Reynolds roughness" e "Stokes roughness", richiamando rispettivamente le equazioni di Reynolds dove la rugosità non fosse né troppo fitta, né troppo diversa dallo spessore del film, e le equazioni di Stokes valide nel caso contrario.

In letteratura si incontrano diversi approcci, sempre comunemente basati sulle equazioni proposte da Reynolds, per spiegare l'influenza delle asperità superficiali: diversi autori nei passati 50 anni, hanno proposto metodi per mediare i picchi delle asperità in maniera tale da non perdere l'informazione della loro effettiva influenza. Alcune delle primissime analisi furono condotte da Michell [5] e Burton [6] che studiarono con metodi di linearizzazione, spinti al primo ordine, superfici con due tipi di rugosità: una striata longitudinale, parallela alla direzione di avanzamento del fluido, e una trasversale, perpendicolare alla direzione di avanzamento, dai profili semplici (triangolare, sinusoidale). Questi metodi furono utili per mostrare alcuni effetti delle pareti, ma non contenevano informazioni sufficienti per quanto riguarda il carico di pressione. In seguito, una soluzione dell'equazione di Reynolds per lo stesso genere di superfici analizzate da Michell e Burton, fu trovata da Shelly ed Ettles [7] e da Christensen [8] con il metodo delle differenze finite, un modello matematico per risolvere equazioni differenziali, anche alle derivate parziali. Tuttavia non fu possibile introdurre un vasto numero di striature in queste analisi. Alla fine degli anni '70, Rohde e Whicker [9] apportarono ulteriore sostegno a questi modelli, usando tre diversi tipi di rugosità e Tønder [10] ottenne un'equazione mediata applicabile su una rugosità costante; gli effetti di rugosità bidimensionale sono contenuti in una serie di valori mediati dello spessore del meato, della pressione e di uno shear flow factor, legato al grado di scorrevolezza del fluido. Tendenzialmente si punta a ridursi ad una formulazione che risulti molto più facile da risolvere numericamente e che non richieda discretizzazioni con volumi di controllo eccessivamente piccoli.

2.2 Cenni sull'omogeneizzazione

La teoria dell'omogeneizzazione può essere usata per trattare e mediare le rugosità da un punto di vista rigorosamente matematico; si vedano i lavori di Kane e Bou-Sain [11] e di Almqvist, Spencer, Wall e Fabricius [12, 13]. L'omogeneizzazione è una teoria per lo studio di equazioni differenziali con variabili che oscillano rapidamente. Viene usata per descrivere una rapida variazione fisica, ottenendo delle soluzioni mediate, trasformando un corpo continuo eterogeneo in un corpo continuo omogeneo. Molti problemi fisici che presentano scale microscopiche, danno luogo a problemi del genere; da qui nasce la necessità di trovare un metodo per trattarli nel modo più preciso possibile, affinché l'influenza della struttura più fine della scala di partenza non venga persa. A tal fine sono state ideate diverse tecniche matematiche: i migliori risultati sono stati ottenuti considerando periodica la struttura microscopica, sulla quale sono stati mediate le equazioni. Esistono tuttavia altri risultati accettabili, ottenuti quando la micro-configurazione del corpo non è affatto periodica, ma presenta andamento casuale.

La teoria viene utilizzata nello studio di diversi fenomeni, tra cui:

- Conduzione di calore;
- Propagazione di onde in mezzi elastici;
- Elettrostatica;
- Conduzione elettrica in tessuti biologici: nelle applicazioni cliniche, il tessuto biologico viene assunto come un mezzo composito, avente una struttura microscopica di tipo periodico, costituita da due fasi.

Ricordiamo a questo punto l'interesse numerico nell'applicazione dei metodi di omogeneizzazione: se le inclusioni che rendono il materiale non omogeneo sono molto piccole e numerose, un calcolo numerico diretto della soluzione risulta difficile in quanto richiederebbe una maglia di discretizzazione molto fine e dunque tempi di calcolo molto significativi. Una corretta applicazione di queste tecniche può dunque mostrare che anche nel caso di caratteristiche microscopiche di scala molto piccole, si ottiene una buona approssimazione del fenomeno fisico.

3 Teoria della lubrificazione di Reynolds

Nel seguente capitolo mostreremo come le equazioni di Navier-Stokes possano essere semplificate, utilizzando scale spaziali diverse tra loro, per ottenere le equazioni della teoria della lubrificazione di Reynolds. In particolare ci porremo nella condizione geometrica seguente. Il dominio si estende da 0 ad L nelle direzioni $\overline{x} \in \overline{z}$ e da 0 a $\overline{h}(\overline{x}, \overline{z})$ nella direzione $\overline{y}; \overline{h}_0$ viene scelto come valore caratteristico dello spessore del canale (Figura 3).



Figura 3: Dominio tridimensionale con asperità di parete accentuate. Il fluido si trova tra le superfici $\overline{y} = 0$ e $\overline{y} = \overline{h}(\overline{x}, \overline{z})$ e viene messo in moto dallo scorrimento della lastra inferiore a velocità U.

Assumiamo che:

$$\frac{\overline{h}_0}{L} = \delta \ll 1 \tag{3.1}$$

La scelta di imporre scale di grandezza caratterizzate da ordini molto diversi è un concetto fondamentale al fine della semplificazione delle equazioni. Supponiamo inoltre che la parete in $\overline{y} = 0$ si muova con velocità U in direzione \overline{x} . Il nostro punto di partenza, come già accennato sono le equazioni di continuità e di Navier-Stokes, che, scritte nella loro forma incomprimibile, usando variabili dimensionali, risultano:

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{t}} + \overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} + \overline{v} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}} + \overline{w} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{z}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} = g_x + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{y}^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{z}^2} \right), \\ \frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{t}} + \overline{u} \frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{x}} + \overline{v} \frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{y}} + \overline{w} \frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{y}} = g_y + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{y}^2} + \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{z}^2} \right), \\ \frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{t}} + \overline{u} \frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{x}} + \overline{v} \frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{y}} + \overline{w} \frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{z}} = g_z + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \overline{y}^2} + \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \overline{z}^2} \right), \\ \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{y}} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}} = 0, \end{cases}$$

$$(3.2)$$

con ν la viscosità cinematica, ρ la densità del fluido e $\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z)$ una forza di volume esterna.

3.1 Ipotesi Semplificative

Introduciamo alcune ipotesi che permetteranno di ottenere un modello matematico semplificato che può, tuttavia, ben rappresentare la realtà fisica. Assumiamo *in primis* che il flusso sia stazionario. Per quanto riguarda il fluido, esso dovrà procedere all'interno del meato con moto laminare, riempendo interamente la cavità ed aderendo alle pareti. Quest'ipotesi è valida poiché stiamo considerando un fluido ad alta viscosità che si muove in un canale di dimensioni molto piccole. Le condizioni al contorno sono:

$$\begin{cases} \overline{u} = U, & \text{per } \overline{y} = 0, \\ \overline{v} = \overline{w} = 0, & \text{per } \overline{y} = 0, \\ \overline{u} = \overline{v} = \overline{w} = 0, & \text{per } \overline{y} = \overline{h}(\overline{x}, \overline{z}). \end{cases}$$
(3.3)

Un'altra semplificazione consiste nel trascurare i termini gravitazionali, viste le limitate dimensioni della geometria del sistema fisico considerato. Nel corso della trattazione dimostreremo anche che le forze d'inerzia possono essere trascurate rispetto alle azioni di tipo viscoso. Arriviamo quindi a scrivere:

$$\begin{cases} \overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}} + \overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{y}} + \overline{w}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{z}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{x}} = \nu \left(\frac{\partial^{2}\overline{u}}{\partial\overline{x}^{2}} + \frac{\partial^{2}\overline{u}}{\partial\overline{y}^{2}} + \frac{\partial^{2}\overline{u}}{\partial\overline{z}^{2}}\right), \\ \overline{u}\frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{x}} + \overline{v}\frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{y}} + \overline{w}\frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{z}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{y}} = \nu \left(\frac{\partial^{2}\overline{v}}{\partial\overline{x}^{2}} + \frac{\partial^{2}\overline{v}}{\partial\overline{y}^{2}} + \frac{\partial^{2}\overline{v}}{\partial\overline{z}^{2}}\right), \\ \overline{u}\frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{x}} + \overline{v}\frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{y}} + \overline{w}\frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{z}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{y}} = \nu \left(\frac{\partial^{2}\overline{w}}{\partial\overline{x}^{2}} + \frac{\partial^{2}\overline{w}}{\partial\overline{y}^{2}} + \frac{\partial^{2}\overline{w}}{\partial\overline{z}^{2}}\right), \\ \frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}} + \frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{y}} + \frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{z}} = 0. \end{cases}$$

$$(3.4)$$

3.2 Normalizzazione

Cerchiamo ora una forma adimensionale delle equazioni (3.4) che descrivono il moto del fluido; per fare questo, normalizziamo i termini nel seguente modo, ricordandoci della fondamentale ipotesi (3.1). Dividiamo quindi i fattori dell'equazione per dei termini dimensionali appropriati al fine di ottenere delle quantità adimensionali di ordine uno:

$$u = \frac{\overline{u}}{U}, \quad v = \frac{\overline{v}}{V}, \quad w = \frac{\overline{w}}{U}, \quad x = \frac{\overline{x}}{L}, \quad y = \frac{\overline{y}}{\overline{h}_0}, \quad z = \frac{\overline{z}}{L}, \quad p = \frac{\overline{p}}{P}, \quad h = \frac{\overline{h}}{\overline{h}_0}.$$
(3.5)

Oltre a dover ancora determinare la scala di pressione P, dobbiamo imporre che sia $V = \frac{\overline{h}_0}{L}U = \delta U$; infatti, se nell'equazione di continuità adimensionale $\frac{U}{L}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{V}{\overline{h}_0}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{U}{L}\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ i tre termini fossero di ordini differenti, l'unica soluzione della stessa sarebbe: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, ma questo è incompatibile con il nostro caso poiché sappiamo che le componenti di velocità non possono essere costanti e, quindi, le derivate non possono risultare nulle. Abbiamo quindi:

$$v = \frac{\overline{v}}{\delta U}.$$

3.2.1 Determinazione della scala di pressione

Prendiamo in considerazione l'equazione (3.4) lungo la direzione x, scritta sulla base di variabili adimensionali:

$$\frac{U^2}{L}u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\delta U^2}{\overline{h}_0}v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{U^2}{L}w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{P}{L}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\left(\frac{U}{L^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{U}{\overline{h}_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{U}{L^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$
(3.6)

Il termine che domina è $\nu \frac{U}{h_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, poiché il fattore h_0^2 a denominatore è molto piccolo. Imponendo che esso sia bilanciato dal termine di pressione,

$$\frac{1}{\rho}\frac{P}{L} \sim \nu \frac{U}{\overline{h}_0^2},$$

si arriva con semplici passaggi algebrici a definire la scala di pressione P:

$$P = \frac{\mu UL}{h_0^2}.$$

É importante notare che la scala di pressione P dipende dalla viscosità μ , come nei moti di scorrimento. Quindi, in riferimento alle condizioni (3.5):

$$p = \frac{\overline{p}\overline{h}_0^2}{\mu UL}.$$

3.3 Considerazioni sui termini inerziali

Ci occupiamo ora dei termini inerziali: qual è la condizione per poterli trascurare, e dunque semplificare ulteriormente le equazioni che governano il moto? Con riferimento alla (3.6), ponendo

$$\frac{U^2}{L} \ll \nu \frac{U}{\overline{h}_0^2}$$

si arriva a stabilire

$$\frac{LU}{\nu} = Re \ll \delta^{-2}.$$

Affinché i termini $\frac{U^2}{L} e \frac{\delta U^2}{\overline{h_0}}$ (che sono dello stesso ordine) siano trascurabili rispetto a $\nu \frac{U}{\overline{h_0}^2}$, deve essere soddisfatta una condizione molto debole; infatti: δ^{-2} è un valore molto grande rispetto al valore del numero di Reynolds Re

che caratterizza un flusso come quello di un lubrificante in un meato sottile. Analogamente al "caso x" ragionando sull'equazione lungo la direzione z

$$\frac{U^2}{L}u\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\delta U^2}{\overline{h}_0}v\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{U^2}{L}w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{P}{L}\frac{\partial p}{\partial z} = \nu\left(\frac{U}{L^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{U}{\overline{h}_0^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{U}{L^2}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right),$$

si perviene alla stessa condizione necessaria per la semplificazione:

$$Re \ll \delta^{-2}.$$

Per quanto riguarda l'equazione in y

$$\frac{\delta U^2}{L}u\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\delta^2 U^2}{\overline{h}_0}v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\delta U^2}{L}w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{P}{L}\frac{\partial p}{\partial y} = \nu\left(\frac{\delta U}{L^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\delta U}{\overline{h}_0^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\delta U}{L^2}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

la condizione risulta la stessa; ponendo infatti

$$\frac{\delta^2 U^2}{\overline{h_0}} \ll \nu \frac{\delta U}{\overline{h_0^2}},$$

si ottiene

$$Re \ll \delta^{-2}.$$

Inoltre il termine di gradiente di pressione domina sul termine viscoso, in quanto

$$\frac{P}{\rho L} \ll \nu \frac{\delta U}{\overline{h}_0^2}.$$

Possiamo a questo punto concludere scrivendo le equazioni adimensionali descrittive del flusso, soggette alle semplificazioni motivate in precedenza:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{cases}$$
(3.7)

Come possiamo notare, la distribuzione di pressione non è dipendente da y,

come per le equazioni dello strato limite di Prandtl, ma delle sole variabili indipendenti x e z:

$$p = p(x, z).$$

3.3.1 Componenti u e w della velocità

Vogliamo ora determinare le componenti $u \in w$ della velocità. In particolare, dalla prima e dalla terza equazione del sistema (3.7), con le condizioni (3.3), ricaviamo due problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ u(y=0) = 1, \\ u(y=h(x,z)) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ w(y=0) = 0, \\ w(y=h(x,z)) = 0. \end{cases}$$

$$(3.8)$$

Chiaramente, da questo momento in avanti, la funzione h(x, z) rappresenta una variabile adimensionale, normalizzata da \overline{h}_0 . Dal primo sistema ricaviamo dalla doppia integrazione $u = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + c_1 y + c_2$ e le due costanti $c_1 = -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{h}$ e $c_2 = 1$, quindi:

$$u = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} y \left(y - h \right) - \frac{y}{h} + 1.$$

Analogamente, possiamo trovare dal secondo sistema

$$w = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} y \left(y - h \right).$$

3.4 Equazioni di lubrificazione di Reynolds

A questo punto vogliamo arrivare alla scrittura finale delle equazioni di lubrificazione. Siccome i termini $\frac{\partial p}{\partial x} e \frac{\partial p}{\partial z}$ rimangono ancora sconosciuti, ci serviamo dell'equazione di continuità, poiché le velocità, al contrario, le abbiamo appena determinate; quindi

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Integrando tra gli estremi del nostro dominio, otteniamo:

$$\int_{0}^{h(x,z)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dy = 0.$$

Ora, soffermandoci sulla derivata della velocità v, notiamo che integrandola otteniamo v(h(x,z)) - v(0) = 0, grazie alle condizioni iniziali di *no-slip*. Pertanto rimangono:

$$\int_{0}^{h(x,z)} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_{0}^{h(x,z)} \frac{\partial w}{\partial z} dy = 0.$$
(3.10)

Dato che le velocità $u \in w$ sono funzioni anche della pressione p, risultano dunque funzioni delle tre variabili x, y, z. Servendoci della regola di Leibniz per l'integrazione

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)}f(x,t)dx = \int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx + f(b,t)\frac{db}{dt} - f(a,t)\frac{da}{dt},\qquad(3.11)$$

possiamo portare fuori dall'integrale le derivate parziali. Nel nostro caso, analizzando i due termini separatamente, abbiamo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{0}^{h(x,z)} u(x,y,z) dy = \int_{0}^{h(x,z)} \frac{\partial u}{\partial x} dy + u(x,h(x,z),z) \frac{\partial h}{\partial x},$$
$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{0}^{h(x,z)} w(x,y,z) dy = \int_{0}^{h(x,z)} \frac{\partial w}{\partial z} dy + w(x,h(x,z),z) \frac{\partial h}{\partial z}.$$
considerando ancora la condizioni al contorno di no slin

Adesso, considerando ancora le condizioni al contorno di *no-slip*, notiamo che u(x, h(x, z), z) = w(x, h(x, z), z) = 0, quindi:

$$\int_0^{h(x,z)} \frac{\partial u}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(x,z)} u \, dy,$$

$$\int_{0}^{h(x,z)} \frac{\partial w}{\partial z} dy = \frac{\partial}{\partial z} \int_{0}^{h(x,z)} w \, dy$$

Inserendoli nell'equazione (3.10) e sostituendo $u \in w$ abbiamo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{0}^{h(x,z)} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h}{2} y - \frac{y}{h} + 1 \right) dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_{0}^{h(x,z)} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \frac{y^2}{2} - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{h}{2} y \right) dy = 0.$$
(3.12)

Integrando in y, sostituendo gli estremi di integrazione e facendo le opportune semplificazioni algebriche otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{12}\frac{\partial p}{\partial x}h^3 + \frac{h}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{12}\frac{\partial p}{\partial z}h^3\right) = 0.$$

Svolgendo le parentesi e separando i termini con la pressione p, abbiamo infine:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} h^3 \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} h^3 \right) = 6 \frac{\partial h}{\partial x}, \tag{3.13}$$

che è l'equazione di lubrificazione di Reynolds in forma adimensionale. L'equazione di lubrificazione di Reynolds in variabili dimensionali risulta:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{x}} \left(\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} \overline{h}(\overline{x}, \overline{z})^3 \right) + \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left(\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{z}} \overline{h}(\overline{x}, \overline{z})^3 \right) = 6U\mu \frac{\partial \overline{h}(\overline{x}, \overline{z})}{\partial \overline{x}}.$$
 (3.14)

4 Teoria dell'omogeneizzazione

Consideriamo la superficie rugosa rappresentata dalla funzione h; supponiamo ora che l'andamento rapido nello spazio venga descritto da h_2 , dipendente dalle due variabili \hat{x}, \hat{z} veloci, mentre la funzione h_1 dipenda dalle variabili x, z e descriva l'andamento lento della superficie. Pertanto, h è la somma di h_1 e h_2 :

 $h_1 = h_1(x, z)$



Figura 4: a) Variazione lenta h_1 . b) Variazione veloce h_2 . c) Superficie h.

Ipotizziamo che tra le due diverse scale ci sia questo legame: $\hat{x} = \frac{x}{\epsilon} \cos \hat{x}$ come $\hat{z} = \frac{z}{\epsilon}$ dove $\epsilon \ll 1$. Pertanto risultano:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \frac{d\hat{x}}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \hat{x}},$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \frac{d\hat{z}}{dz} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \hat{z}}.$$

Volendo ora studiare il comportamento della pressione p, ipotizziamo di scriverla come sviluppo asintotico in potenze di ϵ , ossia:

$$p = p_0(x, z, \hat{x}, \hat{z}) + \epsilon p_1(x, z, \hat{x}, \hat{z}) + \epsilon^2 p_2(x, z, \hat{x}, \hat{z}) + O(\epsilon^3).$$

Sostituendo lo sviluppo della pressione e le derivate parziali nella (3.13), otteniamo:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial \widehat{x}}\right) \left[h^3 \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial \widehat{x}}\right) \left(p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2\right)\right] + \\ + \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial \widehat{z}}\right) \left[h^3 \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial \widehat{z}}\right) \left(p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2\right)\right] = \\ = 6 \left(\frac{\partial}{\partial x}h_1 + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial \widehat{x}}h_2\right).$$
(4.1)

Studiamo a questo punto il comportamento di p raccogliendo i termini della (4.1) per ordini di ϵ :

• Ordine ϵ^{-2} :

$$\frac{\partial}{\partial \widehat{x}} \left(h^3 \frac{\partial p_0}{\partial \widehat{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \widehat{z}} \left(h^3 \frac{\partial p_0}{\partial \widehat{z}} \right) = 0$$

Svolgendo i calcoli risulta:

$$\left(\frac{\partial h^3}{\partial \widehat{x}}\frac{\partial p_0}{\partial \widehat{x}} + \frac{\partial h^3}{\partial \widehat{z}}\frac{\partial p_0}{\partial \widehat{z}}\right) + h^3\left(\frac{\partial^2 p_0}{\partial \widehat{x}^2} + \frac{\partial^2 p_0}{\partial \widehat{x}^2}\right) = 0.$$

Essendo h un valore arbitrario, in quanto l'andamento della rugosità è stato scelto liberamente, affinché quest'equazione sia verificata, i due termini devono annullarsi contemporaneamente, ossia quando

$$\frac{\partial p_0}{\partial \widehat{x}} = \frac{\partial p_0}{\partial \widehat{z}} = 0.$$

Risulta quindi che p_0 non dipende dalla scala rapida:

$$p_0 = p_0\left(x, z\right).$$

• Ordine ϵ^{-1} :

$$\frac{\partial}{\partial \widehat{x}} \left[h^3 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial \widehat{x}} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \widehat{z}} \left[h^3 \left(\frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\partial p_1}{\partial \widehat{z}} \right) \right] = 6 \frac{\partial h_2}{\partial \widehat{x}}$$
(4.2)

Possiamo supporre che p_1 , soluzione generale dell'equazione differenziale non omogenea (4.2), abbia la seguente forma:

$$p_{1} = \frac{\partial p_{0}}{\partial x} \alpha \left(x, z, \widehat{x}, \widehat{z} \right) + \frac{\partial p_{0}}{\partial z} \beta \left(x, z, \widehat{x}, \widehat{z} \right) + \gamma \left(x, z, \widehat{x}, \widehat{z} \right), \qquad (4.3)$$

dove $\alpha, \beta \in \gamma$ sono tre generiche funzioni dipendenti dalle variabili veloci e lente. Sostituendo p_1 nella (4.2), l'equazione diventa:

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial \widehat{x}} \left(h^3 \frac{\partial \alpha}{\partial \widehat{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \widehat{z}} \left(h^3 \frac{\partial \alpha}{\partial \widehat{z}} \right) + 3h^2 \frac{\partial h_2}{\partial \widehat{x}} \right] + \\
+ \frac{\partial p_0}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial \widehat{x}} \left(h^3 \frac{\partial \beta}{\partial \widehat{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \widehat{z}} \left(h^3 \frac{\partial \beta}{\partial \widehat{z}} \right) + 3h^2 \frac{\partial h_2}{\partial \widehat{z}} \right] + \\
+ \left[\frac{\partial}{\partial \widehat{x}} \left(h^3 \frac{\partial \gamma}{\partial \widehat{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \widehat{z}} \left(h^3 \frac{\partial \gamma}{\partial \widehat{z}} \right) - 6 \frac{\partial h_2}{\partial \widehat{x}} \right] = 0. \quad (4.4)$$

L'equazione (4.4) è verificata quando i tre termini si azzerano contemporaneamente. Inoltre, esse rappresentano le equazioni microscopiche da risolvere su una cella unitaria.

• Ordine ϵ^0 :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[h^3 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial \widehat{x}} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \widehat{x}} \left[h^3 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial \widehat{x}} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[h^3 \left(\frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\partial p_1}{\partial \widehat{z}} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \widehat{z}} \left[h^3 \left(\frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\partial p_1}{\partial \widehat{z}} \right) \right] = 6 \frac{\partial h_1}{\partial x} \quad (4.5)$$

Mediando quest'equazione sulla cella unitaria, tramite l'operatore

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} f d\Omega$$

per la generica variabile f, con Ω cella microscopica, notiamo che i due termini derivati rispetto alle variabili $\hat{x} \in \hat{z}$ sono nulli, poiché periodici:

$$<\frac{\partial}{\partial \widehat{x}}\left[h^3\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}+\frac{\partial p_2}{\partial \widehat{x}}\right)\right]> = <\frac{\partial}{\partial \widehat{z}}\left[h^3\left(\frac{\partial p_1}{\partial z}+\frac{\partial p_2}{\partial \widehat{z}}\right)\right]> = 0,$$

inoltre, sostituendo la pressione p_1 , ovvero la (4.3), otteniamo:

$$<\frac{\partial}{\partial x}\left[h^{3}\left(\frac{\partial p_{0}}{\partial x}\left(1+\frac{\partial \alpha}{\partial \widehat{x}}\right)+\frac{\partial p_{0}}{\partial z}\frac{\partial \beta}{\partial \widehat{x}}\right)\right]+\\ +\frac{\partial}{\partial z}\left[h^{3}\left(\frac{\partial p_{0}}{\partial z}\left(1+\frac{\partial \beta}{\partial \widehat{z}}\right)+\frac{\partial p_{0}}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial \widehat{z}}\right)\right]>\\ =<6\frac{\partial}{\partial x}\left(h_{0}-\frac{h^{3}}{6}\frac{\partial \gamma}{\partial \widehat{x}}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(h^{3}\frac{\partial \gamma}{\partial \widehat{z}}\right)>. \quad (4.6)$$

All'interno di questa equazione si possono individuare sei valori mediati che rappresentano gli spessori efficaci:

$$h_{H_{1}}^{3} = \langle h^{3} \left(1 + \frac{\partial \alpha}{\partial \widehat{x}} \right) \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} h^{3} \left(1 + \frac{\partial \alpha}{\partial \widehat{x}} \right) d\Omega,$$

$$h_{H_{2}}^{3} = \langle h^{3} \left(1 + \frac{\partial \beta}{\partial \widehat{z}} \right) \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} h^{3} \left(1 + \frac{\partial \beta}{\partial \widehat{z}} \right) d\Omega,$$

$$h_{H_{3}}^{3} = \langle h^{3} \frac{\partial \beta}{\partial \widehat{x}} \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} h^{3} \frac{\partial \beta}{\partial \widehat{x}} d\Omega,$$

$$h_{H_{4}}^{3} = \langle h^{3} \frac{\partial \alpha}{\partial \widehat{z}} \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} h^{3} \frac{\partial \alpha}{\partial \widehat{z}} d\Omega,$$

$$h_{H_{5}} = \langle h_{1} - \frac{h^{3}}{6} \frac{\partial \gamma}{\partial \widehat{x}} \rangle = h_{1} - \frac{1}{6\Omega} \int_{\Omega} h^{3} \frac{\partial \gamma}{\partial \widehat{x}} d\Omega,$$

$$h_{H_{6}} = \langle h^{3} \frac{\partial \gamma}{\partial \widehat{z}} \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} h^{3} \frac{\partial \gamma}{\partial \widehat{z}} d\Omega.$$
(4.7)

Scriviamo quindi l'equazione di lubrificazione omogeneizzata, la quale contiene informazioni locali sullo spessore del meato e tiene in considerazione l'effetto delle rugosità:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} h_{H_1}^3 + \frac{\partial p_0}{\partial z} h_{H_3}^3 \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p_0}{\partial z} h_{H_2}^3 + \frac{\partial p_0}{\partial x} h_{H_4}^3 \right) = 6 \frac{\partial}{\partial x} h_{H_5} - \frac{\partial}{\partial z} h_{H_6}$$
(4.8)

É immediato osservare la somiglianza di quest'ultima equazione con la (3.13); ci sono anche differenze significative come, ad esempio, la presenza del termine sorgente $-\frac{\partial}{\partial z}h_{H_6}$ nell'equazione (4.8) legato alla variazione lenta, in z, dell'altezza efficace h_{H_6} .

5 Soluzione nel caso monodimensionale

Consideriamo ora le equazioni di Reynolds nel caso monodimensionale, all'interno del piano \hat{x}, \hat{y} . Ricordando che l'altezza h del meato è stata scritta come:

$$h = h_1 + h_2,$$

con $h_1(x)$ che può rappresentare sia una superficie piana, sia una funzione che varia lentamente in x; $h_2(\hat{x})$ ha invece una andamento periodico, come la sinusoide rappresentata in Figura 5. Ricordando la relazione $\hat{x} = \frac{x}{\epsilon}$, supponendo ad esempio $\epsilon = 0.1$, siccome il dominio macroscopico di interesse è compreso tra 0 e 1, la scala x risulta divisa in 10 sottointervalli: su ogni j-esimo sottointervallo andremo a risolvere il problema. Eliminando quindi la variabile z, le equazioni microscopiche si riducono a:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \widehat{x}} \left(h^3 \frac{d\alpha}{d\widehat{x}} \right) = -3h^2 \frac{dh_2}{d\widehat{x}}; \\ \frac{\partial}{\partial \widehat{x}} \left(h^3 \frac{d\gamma}{d\widehat{x}} \right) = 6 \frac{dh_2}{d\widehat{x}}. \end{cases}$$
(5.1)

Le nostre incognite sono $\alpha(\hat{x}) \in \gamma(\hat{x})$, le quali risultano periodiche su \hat{x} ; dobbiamo pertanto imporre, su un generico intervallo, che la loro media sia nulla, affiché la soluzione sia unica:

$$\int_{j-1}^{j} \alpha\left(\widehat{x}\right) d\widehat{x} = \int_{j-1}^{j} \gamma\left(\widehat{x}\right) d\widehat{x} = 0.$$
(5.2)



Figura 5: Esempio di cella unitaria monodimensionale.

Una volta trovati α e γ , calcoleremo gli spessori omogeneizzati, che si riducono ad essere soltanto due, entrambi funzioni della scala lenta x:

$$h_{H_1}^3 = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} h^3 \left(1 + \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{x}} \right) d\Omega = \int_{j-1}^j h^3 \left(1 + \frac{d\alpha}{d\hat{x}} \right) d\hat{x}, \tag{5.3}$$

$$h_{H_5} = h_1(x) - \frac{1}{6\Omega} \int_{\Omega} h^3 \frac{\partial \gamma}{\partial \hat{x}} d\Omega = h_1(x) - \frac{1}{6} \int_{j-1}^j h^3 \frac{d\gamma}{d\hat{x}} d\hat{x}.$$
 (5.4)

A questo punto, all'interno dell'equazione macroscopica omogeneizzata

$$\frac{d}{dx}\left(h_{H_1}^3\frac{dp_0}{dx}\right) = 6\frac{dh_{H_5}}{dx},\tag{5.5}$$

avremo come unica incognita la pressione all'ordine principale p_0 , che andremo infine a calcolare.

5.1 Metodi di calcolo

Per ottenere le soluzioni abbiamo usato l'ambiente Matlab per il calcolo numerico. In particolare, per risolvere le equazioni differenziali alle derivate parziali, abbiamo sfruttato il metodo della differenza finita centrata:

$$\frac{du(x)}{dx} \cong \frac{u\left(x+h\right) - u\left(x-h\right)}{2h} \tag{5.6}$$

dove l'incremento h è una quantità molto piccola e positiva. Nel caso del calcolo delle funzioni $\alpha \in \gamma$, avendo imposto il vincolo di periodicità, abbiamo ottenuto due matrici dei coefficienti tridiagonali con il seguente aspetto:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ddots & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & 0 & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Infine, per trovare gli spessori omogeneizzati h_{Hn} , ci siamo serviti della formula del trapezio composita per l'integrazione numerica:

$$I_t(f) = \frac{H}{2} \left[f(a) + f(b) \right] + H \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) \,. \tag{5.7}$$

5.2 Studio parametrico dei risultati

Per il calcolo abbiamo scelto come funzione macroscopica h_1 una parabola di equazione $y = 2x^2 - 2x + 1$ e, come perturbazione h_2 , una funzione sinusoidale $y = Hsin(2\pi\omega x)$, con H una generica ampiezza della funzione e $\epsilon = \frac{1}{\omega}$ il periodo (Figura 6).



Figura 6: Esempio delle funzioni $h, h_1 \in h_2$ nel caso monodimensionale.

Mostreremo ora l'andamento della soluzione al variare dei due parametri H e ϵ , confrontando i risultati ottenuti utilizzando tre diversi metodi:

- Risoluzione analitica esatta dell'equazione di Reynolds (3.13), nel caso in cui non ci sia dipendenza da z.
- Risoluzione dell'equazione omogeneizzata, dove, per ogni *j*-esimo intervallo, la funzione sinusoidale ha periodo unitario. Inoltre, su ogni intervallo abbiamo considerato il valore medio della funzione h_1 .
- Risoluzione dell'equazione (3.13) considerando il valore medio della rugosità; quindi, essendo quest'ultima una funzione sinusoidale, la sua media sarà nulla.

Consideriamo $\epsilon=0.1;$ i risultati sono mostrati nelle Figure 7-9 al variare diH.



Figura 7: Andamento delle soluzioni nel caso H=0,05.



Figura 8: Andamento delle soluzioni nel caso H=0,1.



Figura 9: Andamento delle soluzioni nel caso H=0,3.

Dai grafici, notiamo che gli andamenti della soluzione cambiano se l'ampiezza H varia; in particolare, all'aumentare di quest'ultima, i tre metodi utilizzati forniscono soluzioni sempre meno coincidenti. Inoltre la soluzione "mediata" si allontana da quella esatta all'aumentare di H, mentre la soluzione omogeneizzata media correttamente le lunghe oscillazioni che si osservano nel calcolo esatto. Pertanto abbiamo osservato che per mantenere una buona approssimazione, l'ampiezza dev'essere contenuta al di sotto di 0.3 circa. Consideriamo ora $\epsilon = 0.01$; i risultati sono in Figura 10-12:



Figura 10: Andamento delle soluzioni nel caso H=0,05.



Figura 11: Andamento delle soluzioni nel caso H=0,1.



Figura 12: Andamento delle soluzioni nel caso H=0,3.

In questo caso notiamo che le soluzioni coincidono molto di più rispetto al caso precedente con $\epsilon = 0.1$; questo avviene poiché la precisione delle soluzioni approssimate cresce non solo al diminuire dell'ampiezza, ma anche all'aumentare del numero di sottointervalli, vista l'approssimazione di h_1 al valor medio in ognuno di essi.

Nella particolare situazione in cui la funzione h_1 sia una mezza circonferenza elevata al cubo di equazione $h_1 = (1 - \sqrt{x - x^2})^3$, abbiamo notato un'approssimazione peggiore rispetto al caso precedente, mantenendo gli stessi valori di $H \in \epsilon$. Si riporta, a titolo di esempio in Figura 13, il risultato ottenuto con $H = 0.1 \in \epsilon = 0.01$.



Figura 13: Andamento delle soluzioni nel caso H=0,1 e $\epsilon{=}0{,}01.$

6 Soluzione nel caso bidimensionale

Analogamente al caso monodimensionale, la ricerca del risultato prevede i seguenti passaggi:

• risoluzione su ogni sottointervallo del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(h^3 \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left(h^3 \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{z}} \right) = -3h^2 \frac{\partial h_2}{\partial \hat{x}}, \\ \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(h^3 \frac{\partial \beta}{\partial \hat{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left(h^3 \frac{\partial \beta}{\partial \hat{z}} \right) = -3h^2 \frac{\partial h_2}{\partial \hat{x}}, \\ \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(h^3 \frac{\partial \gamma}{\partial \hat{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left(h^3 \frac{\partial \gamma}{\partial \hat{z}} \right) = 6 \frac{\partial h_2}{\partial \hat{x}}, \end{cases}$$
(6.1)

ponendo condizioni di periodicità e media nulla. Esso deriva da quanto detto sull'equazione (4.4);

- una volta determinate le funzioni $\alpha, \beta \in \gamma$, si passa al calcolo dei sei spessori omogeneizzati (4.7);
- infine, si determina la distribuzione di pressione dall'equazione omogeneizzata (4.8).

Abbiamo scelto un caso di funzione h costante lungo z; questo comporta l'invarianza in z anche delle funzioni microscopiche, e, come si può constatare dalla loro espressione, l'annullamento degli spessori $h_{H_4}^3$ e $h_{H_6}^3$. L'acuazione amogeneizzate (4.8) si riduce pella postra condizione a:

L'equazione omogeneizzata (4.8) si riduce nella nostra condizione a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} h_{H_1}^3 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p_0}{\partial z} h_{H_3}^3 \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p_0}{\partial z} h_{H_2}^3 \right) = 6 \frac{\partial h_{H_5}}{\partial x}$$

6.1 Metodi di calcolo

Anche in questo caso abbiamo seguito un procedimento basato sul metodo delle differenze finite. Abbiamo discretizzato i termini dell'equazione (3.13) con uno schema di tipo centrato, così come per i termini dell'equazione omogeneizzata (4.8): le due derivate $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} h_{H_1}^3 \right)$, $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} h_{H_2}^3 \right)$ e il termine noto $6 \frac{\partial h_{H_5}}{\partial x}$. Per quanto riguarda il termine $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial z} h_{H_3}^3 \right)$ ci siamo basati su

uno schema decentrato, dotato di un livello di accuratezza del terzo ordine:

$$\frac{du(x)}{dx} \cong \frac{2u(x+h) + 3u(x) - 6u(x-h) + u(x-2h)}{6h} + O(h^3).$$
(6.2)

Quest'ultima scelta è stata imposta da problemi di dispersione troppo marcati, poiché un livello di accuratezza inferiore causava la presenza di *wiggles* all'interno dei grafici.

6.2 Studio parametrico dei risultati

Per i test abbiamo usato una funzione macroscopica $h_1(x, z) = 2x^2 - 2x + 1$ e una funzione microscopica $h_2(x, z) = H\cos(2\pi\omega x)$, dove l'ampiezza H e il periodo $\epsilon = \frac{1}{\omega}$ si riferiscono alle asperità.

L'andamento della pressione al variare di x, per ogni z, risulta crescente fino ad un valore massimo nella prima metà del dominio, per poi decrescere simmetricamente fino ad un minimo; è ovvio che i valori massimi e minimi della pressione cambiano al variare dell'ampiezza H. Le condizioni al contorno che abbiamo scelto impongono che la pressione si annulli sui bordi del dominio. Si riportano le distribuzioni di pressione ottenute dalla risoluzione delle equazioni di Reynolds omogeneizzata e non, analizzando con $\epsilon = 0.02$, al variare di H.





Figura 14: Distribuzione esatta (sopra) e omogeneizzata (sotto) della pressione nel caso $\epsilon=0.02,\,H=0.02$





Figura 15: Distribuzione esatta (sopra) e omogeneizzata (sotto) della pressione nel caso $\epsilon=0.02,\,H=0.05$

•
$$\epsilon = 0.02, H = 0.1$$



Figura 16: Distribuzione esatta (sopra) e omogeneizzata (sotto) della pressione nel caso $\epsilon=0.02,\,H=0.1$

Come si può osservare dal confronto, l'omogeneizzazione matematica delle asperità non comporta variazioni macroscopiche della distribuzione di pressione, indipendentemente dall'ampiezza scelta. Ovviamente, in analogia con il caso monodimensionale precedentemente affrontato, il valore di H non deve

essere troppo grande. Abbiamo quindi imposto come limite di accettabilità un'ampiezza di 0.1 circa, contrariamente al caso monodimensionale. Per valutare l'effettiva precisione della soluzione, calcolata con i tre diversi metodi già descritti, studiamo la sezione mediana longitudinale della curva p(x, z) ottenuta dai metodi utilizzati:



Figura 17: Sopra: Curva della pressione omogeneizzata con $\epsilon = 0.02$, H = 0.05. Sotto: Sezioni delle curve di pressione ottenute con i tre diversi metodi.

Notiamo che la soluzione omogeneizzata e quella mediata sono pressoché coincidenti; questo è probabilmente dovuto alla raffinatezza della scala utilizzata. La risoluzione dell'equazione omogeneizzata richiede infatti una potenza di calcolo importante, la quale limita la risoluzione della *mesh*, perché va risolto il problema microscopico su ogni cella. Possiamo comunque osservare che, interessandoci al caso in cui l'ampiezza delle asperità sia molto piccola, le tre soluzioni si discostano comunque molto poco le une dalle altre e sono entrambe accettabili e paragonabili. Considerando un'ampiezza troppo grande, anche la soluzione omogeneizzata si discosta da quella esatta.

7 Conclusioni

Dai test condotti possiamo osservare che la soluzione ottenuta usando il processo di omogeneizzazione media i picchi di pressione in modo coerente. All'aumentare dell'ampiezza delle asperità, sia l'accuratezza delle equazioni omogeneizzate sia di quelle mediate tende a diminuire; nella maggior parte dei casi, notiamo quanto sia più apprezzabile l'utilizzo di misure omogeneizzate.

Pertanto affermiamo che la teoria dell'omogeneizzazione è un ottimo strumento per analizzare gli effetti che una o più superfici rugose possono avere sulle prestazioni del fluido, poiché gli errori effettuati rispetto al calcolo completo sono decisamente trascurabili, a patto che le dimensioni delle asperità siano microscopiche. Qualora così non fosse, quindi se la geometria delle rugosità superasse una certa soglia di ampiezza e profondità, gli errori commessi dall'analisi omogeneizzata risulterebbero importanti. Inoltre possiamo dire che la soluzione omogeneizzata è rigorosa, essendo una teoria matematica, a differenza delle soluzioni ottenute mediante valori medi, i quali possono provocare ambiguità delle stesse per via di eventuali valori correttivi.

Gli stessi test possono essere effettuati nel caso ancora più realistico in cui entrambe le superfici siano scabre e può essere applicata a qualsiasi tipo di rugosità. Per semplicità, inoltre, abbiamo considerato un dominio stazionario ed un fluido incomprimibile, ma la stessa trattazione potrebbe essere fatta affrontando il caso di comprimibilità e/o in regime tempovariante.

Avere informazioni sul comportamento del fluido considerato può essere assai utile per conoscere le *performances* di eventuali organi ravvicinati in movimento, i quali rappresentano le due generiche superfici.

Aggiungiamo inoltre che questo studio è applicabile a qualunque caso in cui ci siano due corpi rugosi ravvicinati in moto con in mezzo un fluido, come accade in cuscinetti, giunti, snodi, articolazioni anche anatomiche, che siano lubrificati.

Riferimenti bibliografici

- Reynolds O. On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, Including an Experimental Determination of the Viscosity of the oil olive, 1886, Proc. R. Soc. London, 40, 191-203.
- [2] Sun D.C. & Chen K.K., First effects of Stokes roughness on hydrodynamic lubrication, 1977, J. of Lubr. Technol., 99, 2-9.
- [3] Mitsuya Y. & Fukui S., Stokes Roughness Effects on Hydrodynamic Lubrication: Part. 1 - Comparison Between Incompressible and Compressible Lubricating Films, 1986, ASME J. Tribol., 108, 151-158.
- [4] Elrod H.G., Thin-film lubrication theory for Newtonian fluids with surfaces possessing striated roughness or grooving, 1973, J. Tribol., 95, 484-489.
- [5] Michell A.G.M., Lubrication. Its Principles and Practice, 1950, Blackie & Son, Ltd.
- [6] Burton R.A., Effects of Two Dimensional, Sinusoidal Roughness on the Load Support Characteristics of a Lubricant Film, 1963, ASME, Jrl. of Basic Engrg., 84, 258-262.
- Shelly P. & Ettles C., Effect of Transverse and Longitudinal Surface Waviness on the Operation of Journal Bearings, 1972, Jrl. Mech. Engrg. Sci., 14, No. 3, 309-314.
- [8] Tønder K. & Christensen H., Lubrication of Cylindrical Rollers with Surface Corrugation, 1972, Wear, 20, 309-314.
- [9] Rohde S.M. & Whicker D. Some mathematical aspects of the hydrodynamic lubrication of rough surface, 1977, 234-237.
- [10] Tønder K. Lubrication of surfaces having area-distributed isotropic roughness, 1977, J of Lubr. Tech, 99, 323-328.

- [11] Kane M. & Bou-Said B., Comparison of homogenization and direct techniques for the treatment of roughness in incompressible lubrication, 2004, J. Tribol., 126, 733-737.
- [12] Almqvist A., Fabricius J., Spencer A. & Wall P., Similarities and differences between the flow factor method by Patir and Cheng and homogenization, 2011, J. Tribol., 133, 031702.
- [13] Fabricius J., Homogenization of Some Problems in Hydrodynamic Lubrication Involving Rough Boundaries, 2011, PhD Thesis, LuleåTekniska Universitet, 5B27, 76D08.