



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA

SCUOLA POLITECNICA

DIME

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

**Condizioni al contorno per il moto di un fluido su
superfici solide con scabrosità frattale**

—

TESI DI LAUREA

RELATORI:
Chiar.mo Prof. A. BOTTARO

CANDIDATO:
GIOVANNI TROVATO

CORRELATORI:
Dott. Ing. E. ALINOVİ

ANNO ACCADEMICO 2015/2016

Desidero ringraziare il Professor Alessandro Bottaro per avermi dato l'occasione di lavorare a questa tesi che mi ha dato molti strumenti utili per il mio futuro.

Ringrazio il mio correlatore l'Ingegnere Edoardo Alinovi che ha dimostrato grande pazienza, trasmettendomi forza per continuare e dandomi sempre utili consigli che sicuramente non scorderò.

Ringrazio la mia famiglia per avermi permesso di continuare gli studi universitari e per essermi stata vicina nei momenti difficili di questi tre anni.

Ringrazio anche tutti gli amici che si sono interessati a me in questi ultimi tempi.

Sommario

Lo scopo di questo lavoro è definire un modello numerico per analizzare il meccanismo fluidodinamico relativo a superfici con scanalatura a geometria frattale, evidenziandone le caratteristiche in termini di resistenza fluidodinamica.

Partendo dalle equazioni classiche del moto dei fluidi, opportunamente modificate con l'introduzione di una serie di ipotesi semplificative, e concentrando lo studio nella regione del substrato viscoso in prossimità di una parete, si è pervenuti alla definizione di equazioni integrali, "boundary integral equations", che permettono di calcolare il campo di moto, quindi le componenti della velocità del flusso nella zona interessata.

Per la risoluzione del problema si è seguito un procedimento numerico che ha lo scopo di discretizzare il dominio d'integrazione. La validazione del codice è stata ottenuta con dati disponibili in letteratura: l'accordo tra i risultati è ottimo e il modello può essere considerato rappresentativo della fluidodinamica in prossimità di pareti scabre.

Abstract

The purpose of this work is to define a numerical model in order to analyze fluid-dynamics mechanisms in the proximity of grooved surfaces with fractal geometry, pointing out the drag reduction, which can be achieved by the roughness. Starting from the classical equations of motion of the fluid, suitably modified introducing some simplifying assumptions, and concentrating the study on the viscous sublayer, close to the wall, "boundary integral equations", are derived which allow to calculate the flow field, that is the components of the velocity of the flow in the area of interest. For the resolution of the problem a numerical procedure has been used, with the purpose to discretize the integration domain into many subdomains and then to resolve the boundary integral equations are each one of them. The code has been validated against the available literature, finding an excellent agreement with previous the results.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Riduzione della resistenza fluidodinamica	1
1.1.1	Superficie scanalate	2
1.2	Oggetto di studio	5
2	Formulazione del problema	7
2.1	Substrato viscoso	7
2.2	Equazioni di bilancio del problema	9
2.2.1	Equazione di Stokes	10
2.3	Semplificazione e disaccoppiamento	12
2.4	Altezze di Protrusione	14
3	Boundary Integral Method (BIM)	17
3.1	Considerazioni generali sul BIM	17
3.2	BIE applicata all'equazione di Laplace	18
3.3	BIE applicata all'equazione di Stokes	22
4	Boundary element method (BEM)	27
4.1	Calcolo Numerico e Matlab	27
4.2	Discretizzazione della geometria	28
4.2.1	Spline cubica	29
4.3	BEM applicata all'equazione di Stokes	31
4.3.1	Calcolo degli integrali di primo e secondo livello	36
4.3.2	Integrali singolari	41
4.4	BEM applicata all'equazione di Laplace	42
5	Validazione del codice e risultati	46
5.1	Validazione del codice	46
5.2	Geometrie frattali	49
5.3	Calcolo delle altezze di protrusione	52
5.4	Campi di moto	56

6	Conclusione	61
6.1	Sviluppi futuri	62
	Bibliografia	65

Elenco delle figure

1.1	Pallina da tennis con filamenti (sinistra) e pallina da golf con scanalature (destra).	2
1.2	Particolari al microscopio della pelle di squalo.	3
1.3	Geometrie frattali usate nel corso di questa Tesi.	6
2.1	Sforzo tangenziale del moto turbolento.	8
2.2	Regioni dello strato limite, con variabili espresse in unità di parete. . .	9
2.3	Rappresentazione schematica in 3D di flusso longitudinale (figura a sinistra) e trasversale (figura a destra) su una superficie scanalata. . . .	12
2.4	Geometria, equazioni e condizioni al contorno per il problema longitudinale.	13
2.5	Geometria, equazioni e condizioni al contorno per il problema trasversale. .	14
2.6	Altezze di protrusione longitudinale e trasversale e posizione delle relative superficie piane virtuali.	15
3.1	Domini \mathcal{D} e \mathcal{D}_ϵ	19
4.1	Esempio di discretizzazione di un dominio arbitrario.	28
4.2	Rappresentazione di una linea aperta discretizzata con 5 nodi e 4 elementi. .	29
4.3	coefficienti di forma.	32
5.1	(a) profilo cosinusoidale; (b) profilo parabolico.	47
5.2	Curve di validazione: altezze di protrusione parallele per profilo parabolico (curva verde); altezze di protrusione perpendicolari per profilo parabolico (curva grigia); altezze di protrusione parallele per profilo cosinusoidale (curva rossa); altezze di protrusione perpendicolari per profilo cosinusoidale (curva azzurra); i risultati ottenuti dal codice per il profilo parabolico (simboli rossi); i risultati ottenuti dal codice per il profilo cosinusoidale (simboli verdi).	48
5.3	Prima geometria frattale.	49
5.4	Seconda e terza geometria frattale.	50
5.5	Quarta e quinta geometria frattale.	51
5.6	Geometria con contorno discreto.	52
5.7	Studio di convergenza per altezza di protrusione parallela	53

5.8	Studio di convergenza per altezza di protrusione perpendicolare	54
5.9	Altezze di protrusione per le cinque dimensioni frattali	54
5.10	Δh in funzione della dimensione frattale.	55
5.11	Griglia interna per la prima dimensione frattale.	56
5.12	Componenti u, v e w per la prima dimensione frattale (sinistra) e per la seconda (destra).	58
5.13	Componenti u, v e w per la terza dimensione frattale (sinistra) e per la quarta (destra).	59
5.14	(a) Linee di corrente per prima geometria frattale; (b) Linee di corrente per seconda geometria.	60
6.1	Applicazioni attuali di riblet	61
6.2	Superficie idrofobiche: configurazioni solido-acqua-aria	63

Elenco delle tabelle

2.1	Grandezze caratteristiche	11
4.1	Nodi di quadratura Gauss-Legendre	39
4.2	Pesi di Gauss-Legendre	39
5.1	Altezze di protrusione.	55
6.1	Δh per le varie dimensioni frattali	62

Capitolo 1

Introduzione

In questa sezione, vengono richiamati, a carattere generale, alcuni concetti relativi alla riduzione della resistenza fluidodinamica, le principali metodologie conosciute e utilizzate. Sono inoltre sintetizzati i criteri principali che determinano riduzione della resistenza fluidodinamica all'interno di uno strato limite turbolento, in particolare per quanto riguarda l'utilizzo di superficie scanalate. Vengono quindi richiamati i principali studi che sono stati effettuati sull'argomento.

1.1 Riduzione della resistenza fluidodinamica

Negli ultimi anni l'argomento di riduzione della resistenza fluidodinamica ha ottenuto un'importante spazio nell'ambito della ricerca in fluidodinamica. Si è sensibilizzata l'attenzione sul risparmio di combustibile in campo aerospaziale, automobilistico, navale ed energetico per ridurre i consumi ed aumentare le prestazioni. Lo stato dell'arte relativamente alla riduzione della resistenza fluidodinamica è molto ampio.

Vengono citati tre metodi, attualmente tra i più conosciuti: vedere come riferimento Bushnell [1] e Trigui: [2]

1. Ritardo della separazione dello strato limite ed innesco della transizione alla turbolenza precoce: è il metodo tecnologicamente più avanzato, essendo stato usato per molto tempo per le ali degli aeroplani.
Il fenomeno è utilizzato, ad esempio, per diminuire la resistenza di forma nelle palline da tennis/golf ritardando la separazione della vena fluida attraverso una veloce transizione verso il regime turbolento (figura 1.1).
2. Modifica della viscosità di un fluido nello strato limite mediante iniezione (insufflaggio) di un fluido ausiliario differente idoneo oppure con aumento della temperatura di parete.
E' stato proposto principalmente per flussi interni, per esempio per il trasporto di fluidi molto viscosi all'interno di lunghe tubazioni: come riferimento si possono prendere in considerazione gli studi effettuati da Preziosi & Chen [3].
3. Uso di superficie scanalate dette "*riblets*", lungo la direzione del flusso principale.

In questa sezione verranno analizzate teorie ed applicazioni riguardanti la riduzione di attrito dovuto alla modifica della topografia superficiale, quindi riconducibili al terzo caso. In particolare viene focalizzata l'attenzione sui sistemi di riduzione della resistenza fluidodinamica attraverso l'utilizzo di superficie scanalate.



Figura 1.1: Pallina da tennis con filamenti (sinistra) e pallina da golf con scanalature (destra).

1.1.1 Superficie scanalate

Il metodo che utilizza superficie scanalate rappresenta un metodo "passivo", il cui meccanismo di funzionamento è piuttosto complesso.

E' un metodo interessante ma nello stesso tempo poco intuitivo: a priori infatti non è immediato ipotizzare che superficie scanalate possano ridurre la resistenza fluidodinamica.

L'osservazione che tipologie di superficie scanalate sono normalmente presenti in natura (come ad esempio la pelle squamata degli squali in figura 1.2) hanno spinto gli studiosi ad approfondire il comportamento di questa tipologia di superficie. In particolare Burdak [4] e successivamente Chernyshov & Zayets [5] effettuarono osservazioni sulla pelle squamata degli squali, analizzarono le tipologie di squamatura, simili a superficie scanalate, e ne associarono la potenziale capacità di riduzione della resistenza fluidodinamica.

Il meccanismo fisico di riduzione della resistenza fluidodinamica generata da superfici scanalate è stato successivamente approfondito da molti ricercatori, tra i quali Bechert et al. [6], Sawyer & Winter [7], Choi [8], che stimarono sperimentalmente una riduzione media del 4-7% della resistenza su superficie scanalata rispetto ad una superficie liscia e non lavorata, per arrivare fino a 8 % secondo gli studi di Walsh [9] [10].

Una spiegazione qualitativa del meccanismo di riduzione fluidodinamica è stata introdotta da Bechert & Bartenwerfer [11] e da Baron et al. [12].

Essi studiarono teoricamente il fenomeno sulla base di calcoli puramente di tipo viscoso, cioè ipotizzando delle semplificazioni delle equazioni di Navier-Stokes nel substrato viscoso riducendole alle equazioni di Stokes: nel substrato viscoso infatti, come verrà

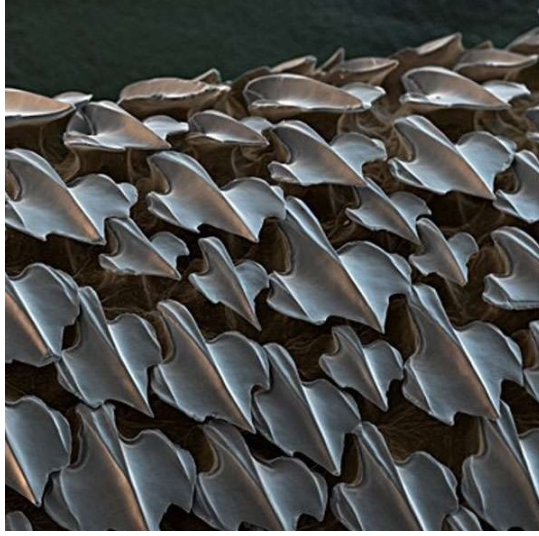


Figura 1.2: Particolari al microscopio della pelle di squalo.

spiegato più avanti nella trattazione, i termini convettivi dell'equazione di Navier-Stokes possono essere trascurati rispetto ai termini viscosi.

In questo modo studiarono le alterazioni prodotte dalla superficie corrugata sul flusso longitudinale.

L'interazione può essere semplicemente considerata come una traslazione dell'origine del profilo di velocità dalla sommità della scanalatura di una quantità che essi denominarono *altezza di protrusione*, concetto particolarmente importante che verrà utilizzato nel corso di questa trattazione.

Essi notarono infatti che il profilo di velocità che è asintoticamente lineare risultava spostato verso il basso e il punto di velocità nulla oltrepassava la parete in un punto fisicamente fittizio.

Osservarono inoltre riduzioni della resistenza all'aumentare della rugosità e dell'altezza delle scanalature microgeometriche.

In seguito, il flusso nel substrato viscoso è stato studiato quantitativamente da Bechert et al. [11] e da Baron et al. [12] e il parametro principale, l'altezza di protrusione, è stato calcolato per un determinato numero di forme di superficie corrugata (compresa una tipologia di superficie con altezza di scanalatura infinita). Inoltre attraverso simulazioni sperimentali di tipo analogico sono pervenuti a misurazioni dell'altezza di protrusione e misure della differenza tra resistenza longitudinale e trasversale.

Luchini et al. [13] e Baron et al. [12] quantizzarono la nozione intuitiva che una superficie scanalata offre una resistenza più elevata al flusso trasversale rispetto a quello longitudinale, che in generale viene accettata come giustificazione del fatto che una superficie scanalata è in grado di ridurre maggiormente la resistenza del flusso. Spiegarono che la riduzione di resistenza fluidodinamica è correlata alla differenza tra le due altezze di protrusione relative al flusso longitudinale e quello trasversale. Dimostrarono che questa differenza è sempre positiva, per qualunque forma e geometria e per geometrie corrugate di profondità tendente all'infinito. Pertanto la riduzione di

resistenza può essere ottimizzata massimizzando la differenza tra queste due altezze. La differenza tra le due altezze di protrusione è il parametro che quantitativamente definisce l'efficacia di un profilo corrugato a ostacolare il flusso trasversale.

Le recenti trattazioni sull'argomento sono molteplici e riguardano metodologie di risoluzione dell'equazione di Navier-Stokes sia analiticamente sia mediante impiego di tecniche di integrazione numerica.

Una descrizione di maggiore dettaglio degli studi e delle trattazioni sull'argomento è contenuta in pubblicazioni recenti di Sayad et al. [14] [15].

A titolo di esempio è possibile citare le imbarcazioni della Coppa America, la famosa competizione di barche a vela nata nel 1851. Lo scafo dell'imbarcazione australiana, che vinse l'edizione della Coppa America del 1983, era stato completamente rivestito da un sottilissima pellicola adesiva di spessore $180\text{ }\mu\text{m}$, realizzata da una famosa industria di materiale plastico, che riproduceva una superficie scanalata a profilo triangolare, con solchi longitudinali alla direzione del flusso principale. L'imbarcazione così configurata ha evidenziato prestazioni decisamente superiori: in seguito è stato deciso di proibire l'impiego di questa tecnologia per le edizioni successive della competizione.

1.2 Oggetto di studio

L'oggetto di studio di questa trattazione è incentrato sulla valutazione della capacità di ridurre l'attrito fluidodinamico da parte di superfici con scanalature a geometria frattale. Un esempio di geometria frattale è riportata nella figura 1.3: queste geometrie sono caratterizzate da autosimilarità interna, con la stessa forma che si ripete su scale diverse.

Che cosa sono nel dettaglio e qual è il procedimento per ottenere le varie geometrie frattali sarà spiegato nel capitolo 5.

Nel capitolo 2 è spiegato il problema da risolvere, analizzando il fenomeno turbolento che agisce nella vicinanza della parete ed esplicitando le equazioni che governano il fenomeno partendo dall'equazione di Navier-Stokes ed arrivando all'equazione approssimata di Stokes.

Il passo successivo avviene al capitolo 3 dove è presentato ed elaborato un metodo, chiamato *boundary integral method* (BIM), che consente di trasformare le equazioni di bilancio in equazioni integrali che tenderanno ad avvantaggiare la risoluzione del problema perché in grado di eseguire i calcoli e trovare la soluzione avendo a disposizione solo le condizioni sulla frontiera del dominio di calcolo.

E' possibile ottenere delle soluzioni analitiche solo per determinate geometrie semplici: è necessario quindi fare uso dell'analisi numerica per discretizzare le equazioni che governano il fenomeno e successivamente fare eseguire un algoritmo risolutivo ad un calcolatore. Con questa tecnica è possibile arrivare ad una soluzione che riesce con buona precisione a risolvere l'equazione di partenza.

Nel capitolo 4 sono presentati tutti questi aspetti che saranno indispensabili per la realizzazione del codice numerico.

Il capitolo 5 racchiude la validazione del codice realizzato: si andranno a confrontare risultati esistenti in letteratura ed i risultati ottenuti con il codice numerico verificando che essi coincidano o che si discostino di pochi punti percentuali. Dopo aver verificato l'attendibilità del codice si prosegue calcolando le altezze di protrusione e ricavando i campi di moto per tutte le geometrie frattali.

Il capitolo 6 racchiude le conclusioni a livello qualitativo e quantitativo del problema studiato.

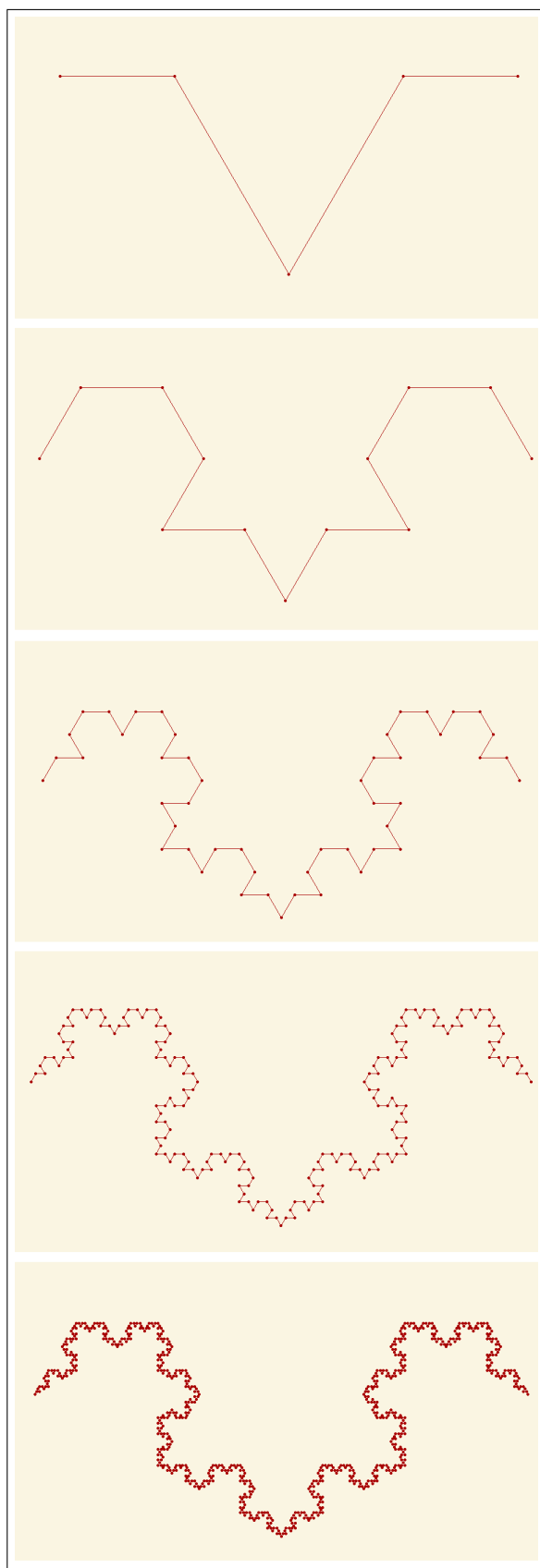


Figura 1.3: Geometrie frattali usate nel corso di questa Tesi.

Capitolo 2

Formulazione del problema

Un fluido in movimento rallenta quando interagisce con una superficie: la decelerazione è causata da una forza chiamata resistenza fluidodinamica. Questa dipende dalla viscosità del fluido e dalla struttura della parete.

Lo scopo di questa sezione è analizzare il comportamento del fluido nella vicinanza dalla parete.

2.1 Substrato viscoso

La riduzione della resistenza fluidodinamica è dovuta alle scanalature poste sulla superficie di parete e all'influenza che esse hanno sulle fluttuazioni del campo di velocità turbolento.

La **turbolenza** è un fenomeno complesso caratterizzato da continue e casuali fluttuazioni di velocità e pressione. Pertanto il flusso non è stazionario e può essere studiato solo mediante esperimenti, relazioni semi-empiriche o simulazioni numeriche. Rispetto al regime laminare la variazione di velocità è molto brusca in prossimità delle pareti aumentando così lo sforzo tangenziale dato dalla seguente formula (cf. fig. 2.1):

$$\tau = \mu \frac{du(y)}{dy}, \quad (2.1)$$

dove:

- μ viscosità dinamica, caratteristica del fluido;
- u velocità tangenziale alla parete;
- y coordinata normale alla parete.

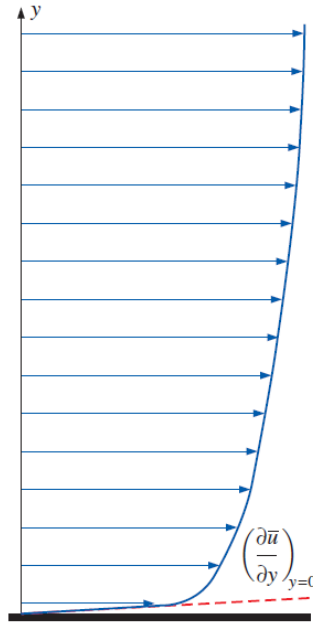


Figura 2.1: Sforzo tangenziale del moto turbolento.

A seconda della distanza y sono definite quattro regioni, come mostrato nel diagramma logaritmico di figura 2.2

1. **Substrato viscoso** o **laminare** (*viscous layer*): substrato sottilissimo dove gli effetti viscosi sono predominanti: il moto avviene per filetti regolari e il profilo di velocità si può approssimare a lineare;
2. **Strato di Buffer** (*Buffer layer*): gli effetti viscosi sono ancora predominanti rispetto agli effetti generati dalle forze di inerzia;
3. **Strato di transizione** o "logaritmico" (*log-law layer*): gli effetti generati dalle forze di inerzia sono più rilevanti ma non ancora predominanti;
4. **Strato turbolento** (*turbulent layer*): gli effetti generati dalle forze di inerzia sono preponderanti rispetto a quelli viscosi.

L'interesse per lo studio oggetto di questa trattazione si concentra nella regione del **substrato viscoso** per i seguenti principali motivi:

- il profilo di velocità può essere approssimato a *lineare*, semplificando in maniera considerevole la risoluzione del problema: per il nostro studio quello che interessa è effettivamente quello che avviene in prossimità della parete.
- all'interno di questa regione il flusso è governato principalmente dalle forze viscosi: i termini convettivi e di inerzia nelle equazioni di Navier-Stokes sono trascurabili rispetto ai termini viscosi: ciò permette di semplificare l'equazione di Navier-Stokes, riconducendola all'equazione di Stokes.

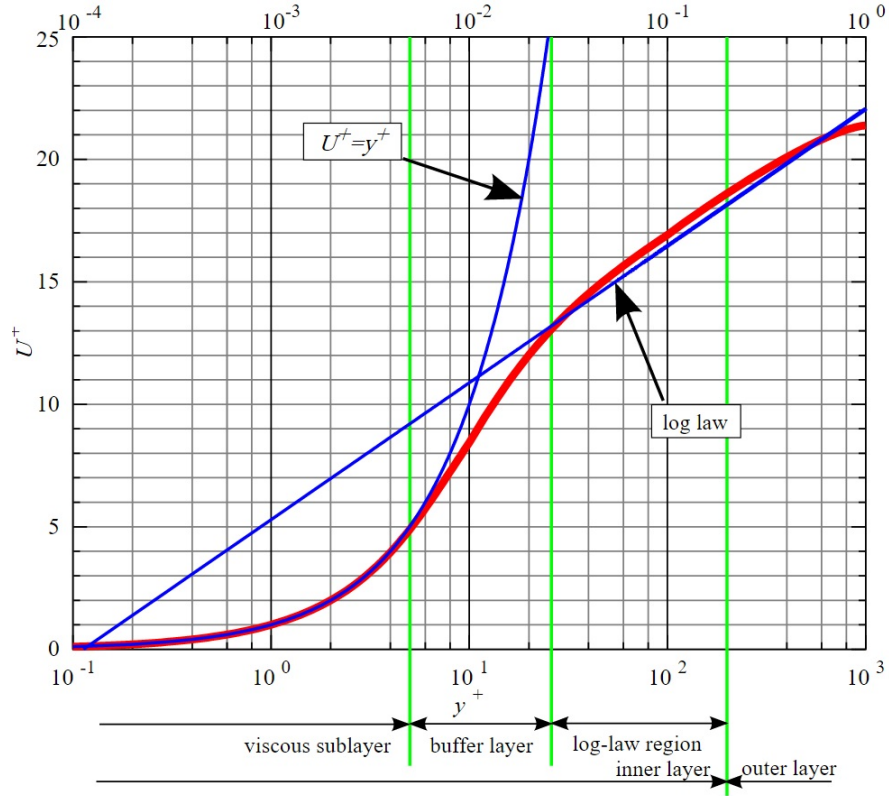


Figura 2.2: Regioni dello strato limite, con variabili espresse in unità di parete.

Per poter modellare quantitativamente il problema da risolvere è necessario avere disponibili una serie di equazioni che ne possano descrivere il fenomeno. Nel paragrafo seguente sono mostrati i passaggi e le semplificazioni che saranno introdotti partendo dalle equazioni di Navier-Stokes e di continuità, arrivando all'equazione che descrive lo stato fisico del problema.

2.2 Equazioni di bilancio del problema

Le equazioni di partenza sono quelle classiche della fluidodinamica viscosa:

- equazione di Navier-Stokes;
- equazione di continuità.

Queste equazioni rappresentano sostanzialmente la formalizzazione matematica di due principi fisici ai quali i fluidi rispondono:

- principio di conservazione della massa (equazione di continuità);

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.2)$$

- secondo principio della dinamica o seconda legge di Newton (equazione della quantità di moto):

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \sigma_{ij}. \quad (2.3)$$

L'equazione (2.2) e le equazioni scalari corrispondenti all'equazione (2.3) danno luogo a un sistema di quattro equazioni in dieci incognite (la densità, le tre componenti della velocità e le sei componenti del tensore degli sforzi).

Per rendere determinato il sistema sono necessarie altre sei equazioni che esprimono le componenti del tensore degli sforzi in funzione delle componenti della velocità e della pressione, equazioni che sono denominate "equazioni costitutive".

Considerando inoltre fluidi incomprimibili ($\rho = \text{costante}$), Newtoniani (con viscosità costante) e trascurando il termine gravitazionale, si perviene all'equazione di Navier-Stokes:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.4)$$

dove:

- p è la pressione;
- \mathbf{u} è la velocità del fluido.

Tenendo conto che:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (2.5)$$

l'equazione di Navier-Stokes si può anche scrivere nella seguente forma:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.6)$$

L'equazione di Navier-Stokes è un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine. Essa viene associata all'equazione di continuità, che per un fluido incomprimibile si semplifica in:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.7)$$

Le equazioni (2.6) e (2.7) costituiscono un sistema di equazioni differenziali con quattro equazioni e quattro incognite (le tre componenti della velocità $u_x = u$, $u_y = v$, $u_z = w$ e la pressione p). Tale sistema ammette soluzione analitica solo per campi di moto dalla geometria semplice e in regime di moto laminare.

In generale nei casi di geometrie più complesse o di moto turbolenti il sistema di equazioni è risolubile solo per via numerica.

2.2.1 Equazione di Stokes

Dall'equazione di Navier-Stokes è possibile passare ad una equazione semplificata sulla base di opportune approssimazioni. Per decidere se un termine sia trascurabile o meno è necessario osservarne gli ordini di grandezza e confrontarli tra loro. E' opportuno

quindi scrivere i termini in forma non dimensionale. In seguito sono definite le variabili non dimensionali, assumendo come parametri caratteristici quelli riportati in tabella 2.1:

$$t^* = ft, \mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L}, \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U}, p^* = \frac{p}{\frac{\mu U}{L}}. \quad (2.8)$$

lunghezza caratteristica	velocità caratteristica
L	U

differenza di pressione di riferimento	frequenza caratteristica
$\frac{\mu U}{L}$	f

Tabella 2.1: Grandezze caratteristiche

Partendo dall'Equazione di Navier-Stokes (2.6) e sostituendo le variabili adimensionali si ottiene:

$$\frac{f}{U} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \rho \frac{U^2}{L} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = -\frac{\mu U}{L^2} \nabla^* p^* + \frac{\mu U}{L^2} \nabla^{*2} \mathbf{u}^*, \quad (2.9)$$

moltiplicando ambo i membri per $\frac{L}{\rho U^2}$:

$$f \frac{L}{U} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = -\frac{\mu}{\rho U L} \nabla^* p^* + \frac{\mu}{\rho U L} \nabla^{*2} \mathbf{u}^*. \quad (2.10)$$

Si definiscono i due numeri non dimensionali nella tabella seguente:

numero di Strouhal (St)	numero di Reynolds (Re)
$f \frac{L}{U}$	$\frac{\rho U L}{\mu}$

Si ottiene così un'equazione non dimensionale:

$$St \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = -\frac{1}{Re} \nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \mathbf{u}^*. \quad (2.11)$$

Come prima ipotesi di semplificazione, si assume un moto quasi-stazionario, considerando $f = 0$ e quindi St trascurabile ($St \sim 0$). Come visto in precedenza è il substrato viscoso che attira l'attenzione del nostro studio. In questa zona gli effetti viscosi sono predominanti rispetto agli effetti convettivi. Ciò significa che il numero di Reynolds è trascurabile ($Re \sim 0$).

Con le ipotesi di approssimazione elencate e trascurando i termini di ordine inferiore si ottiene dalla (2.11) l'equazione di Stokes non dimensionale:

$$\nabla^* p^* = \nabla^{*2} \mathbf{u}^*. \quad (2.12)$$

Da questo momento in avanti i termini non dimensionali saranno indicati senza asterisco per semplicità di scrittura.

2.3 Semplificazione e disaccoppiamento

Per semplificare ulteriormente l'equazione da risolvere nel substrato viscoso si considererà una morfologia ben precisa della parete in modo tale da poter disaccoppiare l'equazione di Stokes e ricondursi alla soluzione di due problemi bidimensionali.

La configurazione che è presa come riferimento per l'analisi è riportata in figura 2.3.

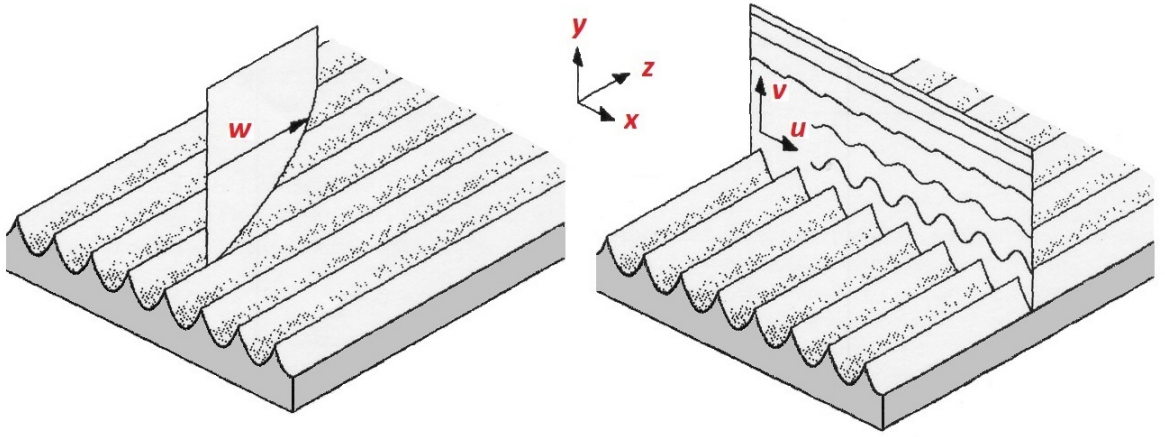


Figura 2.3: Rappresentazione schematica in 3D di flusso longitudinale (figura a sinistra) e trasversale (figura a destra) su una superficie scanalata.

Le ipotesi considerate sono elencate di seguito:

1. Parete invariante lungo l'asse z

Il profilo principale di parete viene considerato nel piano (x, y) e viene estruso nella direzione perpendicolare, cioè nella direzione dell'asse z .

2. Profilo periodico

Il profilo nel piano (x, y) viene considerato periodico lungo la direzione x .

Pertanto, definita $y = y_0(x)$ la funzione arbitraria che descrive la forma della parete (y_0 indipendente da z e periodica di x), essa viene ripetuta all'infinito con numero d'onda:

$$\alpha = \frac{2\pi}{L}, \quad (2.13)$$

con L la periodicità in x delle scanalature.

3. Proprietà e grandezze indipendenti da z

Le componenti di velocità e la pressione sono indipendenti da z . Pertanto:

$$(u, v, w) = f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (2.14)$$

4. Campo di velocità nullo lungo la parete

Lungo la parete del profilo vengono applicate le condizioni di aderenza, ossia:

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{per} \quad y = y_0(x).$$

Con le ipotesi sopra citate è facile osservare che la componente w si disaccoppia dalle altre due.

E' quindi possibile ricondurre il problema tridimensionale a due problemi bidimensionali.

Il problema per la componente w , chiamata problema **parallelo** (vedere fig. 2.4) perché determina la componente di velocità lungo la direzione delle scanalature (asse z), è governato da un'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 w = 0. \quad (2.15)$$

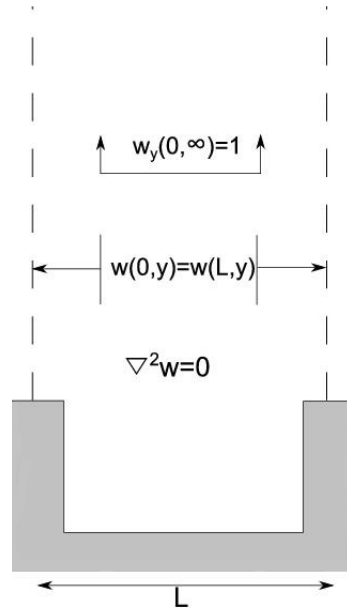


Figura 2.4: Geometria, equazioni e condizioni al contorno per il problema longitudinale.

Le condizioni al contorno del problema differenziale sono:

- $w[x, y_0(x)] = 0$, la velocità è zero lungo la parete di equazione $y_0(x)$;
- $\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{(x,\infty)} = \text{costante} = 1$, a distanza teoricamente infinita dalla parete la velocità w si comporta in maniera lineare.

L'equazione (2.15) con le relative condizioni al contorno è stata studiata per la prima volta da Bechert & Bartenwerfer [11].

Il problema per le altre due componenti di velocità, u e v è denominato problema **perpendicolare** (vedere fig. 2.5), ed è governato dall'equazione di Stokes :

$$\nabla p = \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.16)$$

Le condizioni al contorno del problema differenziale sono:

- $u[x, y_0(x)] = v[x, y_0(x)] = 0$,
- $\frac{\partial u}{\partial y}(x, \infty) = \text{costante} = 1$.

Quindi l'equazione differenziale (2.12) è stato divisa in due equazioni disaccoppiate, rendendo più semplice il procedimento.

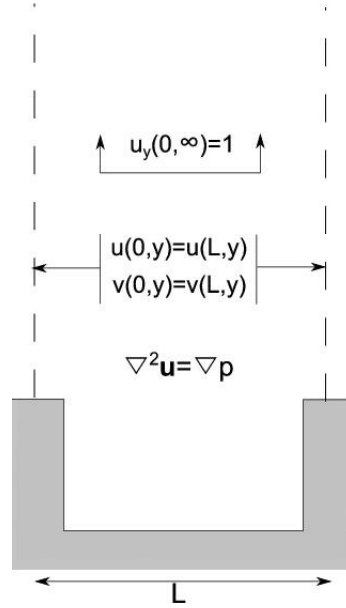


Figura 2.5: Geometria, equazioni e condizioni al contorno per il problema trasversale.

2.4 Altezze di Protrusione

La meccanica del flusso nel substrato viscoso è stato inizialmente studiato da Beckert et al. [11], e implementato successivamente da Luchini et al. [13]: il relativo parametro principale, denominato **altezza di protrusione** è stato calcolato, in modo analitico, per un determinato numero di "forme" di scanalatura.

Gli autori citati precedentemente, per quanto riguarda il problema parallelo relativo al flusso longitudinale, partendo dall'equazione di Laplace (2.15) che ne definisce il moto, e tenendo conto delle condizioni al contorno precedentemente definite hanno dimostrato la seguente relazione:

$$w \sim h_{\parallel} + y. \quad (2.17)$$

Prendendo arbitrariamente come origine dell'asse y la sommità della protusione, si può affermare che l'equazione (2.17) imita il profilo di velocità prodotto da una superficie piana situata a una distanza $y = h_{\parallel}$.

Pertanto si definisce **altezza di protrusione** h_{\parallel} la distanza dalla sommità delle protusioni, assunta come $y = 0$, all'origine virtuale del profilo di velocità longitudinale, come schematizzato in figura 2.6:

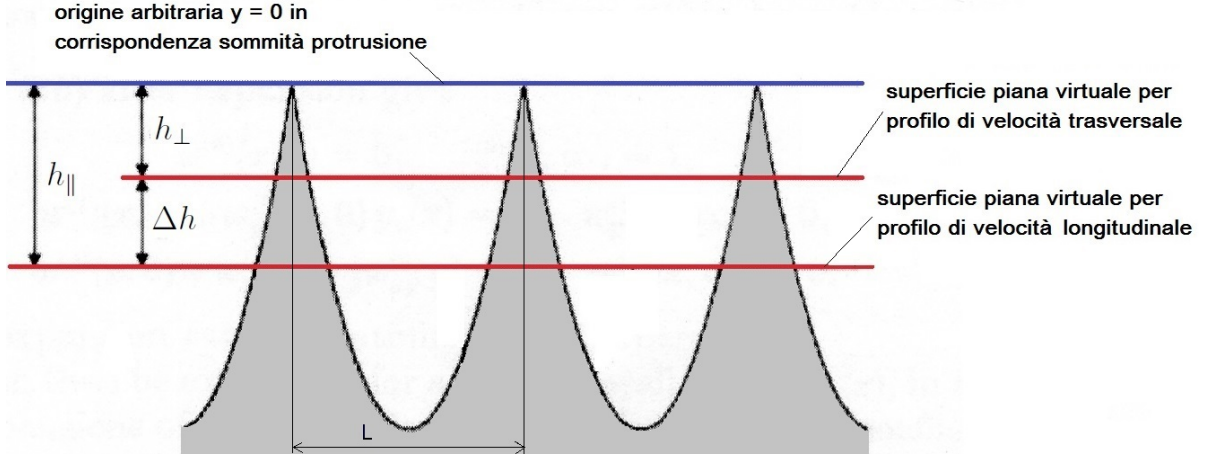


Figura 2.6: Altezze di protrusione longitudinale e trasversale e posizione delle relative superfici piane virtuali.

Allo stesso modo per quanto riguarda il problema perpendicolare relativo al flusso trasversale, si è partiti dall'equazione di Stokes (2.16) che ne definisce il moto, e tenendo conto delle condizioni al contorno precedentemente definite, è stata dimostrata una relazione simile alla precedente:

$$u \sim h_{\perp} + y. \quad (2.18)$$

Si può affermare che l'equazione (2.18) imita il profilo di velocità prodotto da una superficie piana situata a una distanza $y = h_{\perp}$, preso arbitrariamente come origine dell'asse y la sommità delle protusioni.

Pertanto si definisce **altezza di protrusione** h_{\perp} la distanza dalla sommità delle protusioni, assunta come $y = 0$, all'origine virtuale del profilo di velocità trasversale, come schematizzato in figura 2.6.

La figura schematizza le due altezze di protrusione: esse rappresentano le distanze delle due superfici piane virtuali, viste dal flusso longitudinale e trasversale, dalla sommità delle protusioni: come si può notare l'origine virtuale del profilo di velocità trasversale è diverso dall'origine virtuale del profilo di velocità longitudinale.

Chiaramente per una parete liscia le altezze di protrusione sono nulle perché le due superfici piane virtuali coincidono con le superfici reali della parete.

La differenza tra le due superfici piane virtuali, viste dal flusso longitudinale e trasversale, è definita come $\Delta h = h_{\parallel} - h_{\perp}$.

Δh fornisce una rappresentazione quantitativa di quanto la superficie corrugata ostacola il flusso trasversale rispetto a quello longitudinale, ed è l'unico parametro da cui dipende il comportamento turbolento del substrato viscoso.

Utilizzando le equazioni (2.17) e (2.18), considerando l'intera lunghezza L del profilo, è possibile calcolare l'altezza di protrusione come segue:

$$h = \frac{u - y|_H}{L}. \quad (2.19)$$

e quindi:

$$h_{protrusione} = \frac{U_m - H}{L}, \quad (2.20)$$

dove:

- H , distanza arbitraria dalla parete
- L , lunghezza del profilo
- U_m , media aritmetica dei valori della velocità calcolata nel seguente modo:

$$U_m = \frac{\int_0^L u(x) dx}{L}. \quad (2.21)$$

essendo $u(x)$ la distribuzione della velocità sulla parallela.

Nel prosieguo di questa trattazione saranno risolte le condizioni di moto longitudinale e trasversale del fluido sulla superficie scanalata periodica, calcolando le due rispettive altezze di protrusione:

- h_{\perp} , altezza di protrusione perpendicolare calcolata con la distribuzione di velocità u e v ricavata dalla risoluzione dell'equazione di Stokes.
- h_{\parallel} , altezza di protrusione parallela calcolata con la distribuzione di velocità w ricavata dalla risoluzione dell'equazione di Laplace.

Capitolo 3

Boundary Integral Method (BIM)

3.1 Considerazioni generali sul BIM

Come già evidenziato al capitolo precedente la risoluzione delle due equazioni differenziali (2.4) e (2.7) è complessa e non è assicurata la soluzione analitica: in generale il sistema di equazioni è risolubile mediante impiego di tecniche d'integrazione numerica. Il metodo impiegato, denominato **boundary integral method**, si è sviluppato nel secolo scorso ed è stato implementato negli ultimi decenni grazie a nuovi calcolatori di adeguata potenza utili per la risoluzione numerica. Come indica il nome, questo metodo effettua il calcolo unicamente facendo riferimento a quello che avviene sul confine di un qualsiasi dominio.

E' possibile ricavare delle equazioni integrali, chiamate **boundary integral equations**, per calcolare la velocità del flusso in un punto arbitrario all'interno di un dominio mediante una formulazione che coinvolge integrali delle variabili al contorno.

I principali vantaggi del metodo BIM sono i seguenti:

- dal momento che l'integrale si calcola unicamente sui valori al confine del dominio, la dimensione del problema si riduce di un ordine;
- è un metodo estremamente flessibile dal momento che può far fronte a qualunque tipo di geometria. Tenendo conto che molte applicazioni richiedono geometrie complesse, questo costituisce un grosso vantaggio, soprattutto paragonandolo con altre metodologie quali, ad esempio, le differenze finite.

Il BIM sarà utilizzato per ricavare le equazioni integrali di governo sia per il problema parallelo che per quello perpendicolare. Per la descrizione del metodo si è fatto riferimento, tra gli altri, alla pubblicazione di Pozrikidis [16].

3.2 BIE applicata all'equazione di Laplace

Lo scopo di questa sezione è quella di risolvere l'equazione di Laplace all'interno di un dominio \mathcal{D} , con contorno \mathcal{C} :

$$\nabla^2 w = 0. \quad (3.1)$$

Si procede applicando la seconda identità di Green:

$$\psi \nabla^2 w - w \nabla^2 \psi = \nabla \cdot (\psi \nabla w - w \nabla \psi). \quad (3.2)$$

Tra le varie funzioni ψ che verificano l'identità (3.2), scegliamo $\psi = G$ tale che:

$$\nabla^2 G + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0, \quad (3.3)$$

dove:

- G è la soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace o funzione di Green;
- $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ è la funzione delta di Dirac;
- \mathbf{x}_0 è un punto all'interno del dominio denominato *polo* o *punto singolare*.

La funzione delta è una funzione particolare, non continua e il suo valore dipende dal suo argomento nel seguente modo:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0 \\ \infty & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \end{cases}. \quad (3.4)$$

Nell'equazione (3.3) la funzione delta dipende da due vettori $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Si introduce r , la distanza tra i due vettori:

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|. \quad (3.5)$$

Quando $r \neq 0$ la (3.3) si semplifica e diventa:

$$\nabla^2 G = 0. \quad (3.6)$$

Assumendo poi che G dipenda solo da r si ottiene:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG}{dr} \right) = 0, \quad (3.7)$$

e risolvendola si arriva alla soluzione:

$$G = \lambda \log r, \quad (3.8)$$

con λ una costante arbitraria che per convenzione si assume:

$$\lambda = -\frac{1}{2\pi}. \quad (3.9)$$

Si arriva così ad avere la soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace, chiamata anche funzione di Green di *campo libero*.

$$G = -\frac{1}{2\pi} \log r. \quad (3.10)$$

In matematica la funzione di Green è la risposta all'impulso di un'equazione differenziale. Si utilizza per problemi lineari attraverso la sovrapposizione degli effetti, si sommano tutti i contributi calcolati sul dominio e si ottiene la soluzione al problema lineare.

Spesso è utile lavorare con funzioni di Green che soddisfano specifiche condizioni al contorno. Nel nostro caso, in quanto verrà fatto uso di condizioni periodiche, è opportuno utilizzare una funzione di Green che soddisfi la seguente relazione:

$$G(x, y; x_0, y_0) = G(x + L, y; x_0, y_0), \quad (3.11)$$

con $L > 0$.

Si può dimostrare che la funzione di Green, che soddisfa le relazioni (3.3) e (3.11), assume la forma:

$$G = -\frac{1}{4\pi} \log \left\{ \frac{2[\cosh[\omega(y - y_0)] - \cos[\omega(x - x_0)]]}{r} \right\}. \quad (3.12)$$

Per ricavare la BIE, consideriamo un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$ ed integriamo la 3.2 sul dominio \mathcal{D} . Per evitare che la funzione δ risulti singolare, assumiamo di eliminare da \mathcal{D} un piccolo dominio a forma di disco, \mathcal{D}_ϵ , centrato in \mathbf{x}_0 e di raggio pari a ϵ , come schematizzato in figura 3.1.

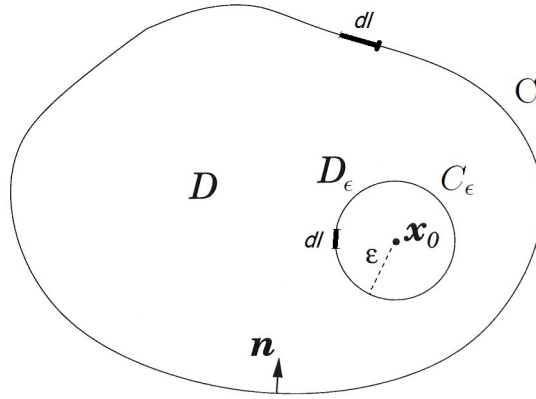


Figura 3.1: Domini \mathcal{D} e \mathcal{D}_ϵ .

Integriamo dunque l'equazione (3.2) sul dominio $\mathcal{D}' = \mathcal{D} - \mathcal{D}_\epsilon$ si ottiene:

$$\iint_{\mathcal{D}'} (G \nabla^2 w - w \nabla^2 G) dS = \iint_{\mathcal{D}'} \nabla \cdot (G \nabla w - w \nabla G) dS = 0. \quad (3.13)$$

Sul dominio \mathcal{D}' si avrà che:

- $\nabla^2 w = 0$;

- $\nabla^2 G = 0$ in accordo all'equazione (3.3) per ogni punto esterno al dominio \mathcal{D}_ϵ , essendo $r \neq 0$.

Applicando il teorema della divergenza si ottiene:

$$\int_{\mathcal{C}+\mathcal{C}_\epsilon} (G\nabla w - w\nabla G) \cdot \mathbf{n} \, dl = 0, \quad (3.14)$$

dove:

- \mathcal{C}_ϵ è il contorno del disco \mathcal{D}_ϵ e \mathcal{C} è il contorno del dominio \mathcal{D} ;
- dl misura la lunghezza dell'arco d'integrazione, sia lungo \mathcal{C} che lungo \mathcal{C}_ϵ ;
- \mathbf{n} è l'unità normale al contorno \mathcal{C} e punta verso l'interno del dominio \mathcal{D} .

Essendo l'integrale un operatore lineare è possibile suddividere il dominio d'integrazione tra \mathcal{C}_ϵ e \mathcal{C} . Integrando su \mathcal{C}_ϵ :

$$I_\epsilon = \int_{\mathcal{C}_\epsilon} (G\nabla w - w\nabla G) \cdot \mathbf{n} \, dl. \quad (3.15)$$

Considerando la (3.8) $G = -\lambda \log r$ e notando che \mathbf{n} è direzione radiale, si ottiene:

$$I_\epsilon = \int_{\mathcal{C}_\epsilon} \left(\lambda \log r \frac{\partial w}{\partial r} - \lambda \frac{w}{r} \right) dl. \quad (3.16)$$

Fissando $r = \epsilon$ e facendo il limite per $\epsilon \rightarrow 0$ si ha:

$$I_\epsilon = -2\pi\lambda w(\mathbf{x}_0).$$

Dalla (3.14) si ottiene la seguente:

$$\int_{\mathcal{C}} (G\nabla w - w\nabla G) \cdot \mathbf{n} \, dl = 2\pi\lambda w(\mathbf{x}_0). \quad (3.17)$$

Scegliendo $\lambda = -\frac{1}{2\pi}$ si ottiene:

$$w(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\mathcal{C}} \log r \, \mathbf{n} \cdot \nabla w \, dl - \int_{\mathcal{C}} w \, \mathbf{n} \cdot \nabla \log r \, dl \right], \quad (3.18)$$

che rappresenta la **terza identità di Green**.

In generale la velocità all'interno del dominio \mathcal{D} è espressa dalla seguente equazione integrale:

$$w(\mathbf{x}_0) = \int_{\mathcal{C}} w(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \, dl(\mathbf{x}) - \int_{\mathcal{C}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla w(\mathbf{x}) \, dl(\mathbf{x}). \quad (3.19)$$

con:

- \mathbf{x}_0 è il punto singolare all'interno del dominio;
- \mathbf{x} è il punto d'integrazione.

L'integrazione è fatta sulla lunghezza d'arco sul confine \mathcal{C} .

All'interno della 3.19 si possono individuare i seguenti termini:

1. $\int_{\mathcal{C}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla w(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x})$, **integrale di primo livello (SLP)**¹
2. $\int_{\mathcal{C}} w(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dl(\mathbf{x})$, **integrale di secondo livello (DLP)**²

Il primo coinvolge il gradiente della velocità al contorno mentre il secondo la velocità stessa.

Notiamo che al secondo membro la velocità incognita w appare all'interno di integrali definiti lungo il contorno \mathcal{C} . Pertanto il secondo membro coinvolge solamente i valori al contorno di w o $\frac{\partial w}{\partial n}$. Questo suggerisce la seguente procedura:

1. si assume che il punto \mathbf{x}_0 sia posizionato sul contorno \mathcal{C} : in tal modo l'equazione integrale riguarda solo valori di w sul contorno.
2. si risolve l'equazione integrale per i valori di w e $\frac{\partial w}{\partial n}$ sul contorno.
3. una volta che le incognite sul contorno sono note, è possibile calcolare la 3.19 per ciascun \mathbf{x}_0 interno al dominio \mathcal{D} e quindi determinare w in ogni punto interno a \mathcal{D} .

I punti 1 – 3 sintetizzano la procedura del BIM.

Imporre che il punto \mathbf{x}_0 giaccia sul contorno \mathcal{C} richiede speciale attenzione. Infatti, mentre SLP gode di continuità quando \mathbf{x}_0 incontra \mathcal{C} , DLP diventa discontinuo e quindi l'integrale diventa improprio ed assume valori diversi a seconda che si integri partendo dall'esterno o dall'interno del dominio.

Procediamo quindi con l'operazione di limite per $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathcal{C}$ dall'interno e dall'esterno. Integrando dall'interno si ottiene:

$$\lim_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathcal{C}} \left\{ \int_{\mathcal{C}} w(\mathbf{x}) [\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)] dl(\mathbf{x}) \right\} = \int_{\mathcal{C}}^{PV} w(\mathbf{x}) [\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)] dl(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} w(\mathbf{x}_0). \quad (3.20)$$

mentre dall'esterno:

$$\lim_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathcal{C}} \left\{ \int_{\mathcal{C}} w(\mathbf{x}) [\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)] dl(\mathbf{x}) \right\} = \int_{\mathcal{C}}^{PV} w(\mathbf{x}) [\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)] dl(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} w(\mathbf{x}_0). \quad (3.21)$$

Per completare il passaggio si assume di integrare dall'interno del dominio, cioè si considera il punto $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathcal{C}$ dall'interno, si ottiene:

$$w(\mathbf{x}_0) = \int_{\mathcal{C}}^{PV} w(\mathbf{x}) [\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)] dl(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} w(\mathbf{x}_0) - \int_{\mathcal{C}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) [\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla w(\mathbf{x})] dl(\mathbf{x}). \quad (3.22)$$

¹SLP acronimo di Single Layer Potential

²DLP acronimo di Double Layer Potential

Portando il termine $\frac{1}{2}w(\mathbf{x}_0)$ al primo membro e sommando si trova l'equazione integrale quando \mathbf{x}_0 appartiene a \mathcal{C} :

$$\frac{1}{2}w(\mathbf{x}_0) = \int_{\mathcal{C}}^{PV} w(\mathbf{x})[\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)] dl(\mathbf{x}) - \int_{\mathcal{C}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)[\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla w(\mathbf{x})] dl(\mathbf{x}). \quad (3.23)$$

Si procede quindi con l'elaborazione dei punti 2 e 3 della procedura descritta precedentemente.

Negli integrali si è utilizzata la notazione del *valore principale dell'integrale* (PV).

3.3 BIE applicata all'equazione di Stokes

Procedimento analogo va fatto per le equazioni di Stokes per un fluido incomprimibile Newtoniano:

$$-\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.24)$$

definendo in questo caso \mathbf{u} la velocità del flusso.

La formula (3.24) può essere scritta in un'altra forma:

$$-\nabla \cdot \sigma = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.25)$$

dove $\nabla \cdot \sigma$ è uguale a $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ e σ_{ij} è il **tensore degli sforzi**, definito come:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (3.26)$$

$$\text{con } e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Così come il *boundary integral method* per l'equazione di Laplace deriva dalla seconda identità di Green, analogamente il *boundary integral method* per l'equazione di Stokes deriva da una identità chiamata **relazione di reciprocità di Lorentz** [17].

Per arrivare a questa relazione si considerino due flussi di Stokes differenti, indipendenti e continui definendone i campi di velocità come u_i e u'_i e i relativi tensori degli sforzi come σ_{ij} e σ'_{ij} . Si assume che i due flussi abbiano la stessa viscosità.

Le equazioni che governano il moto sono:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \sigma = 0, \quad e \quad \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad \nabla \cdot \sigma' = 0. \quad (3.27)$$

Si parte dalla seguente relazione che non è altro che la derivata del prodotto tra due funzioni (u'_i e σ_{ij}):

$$\frac{\partial(u'_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} = u'_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}. \quad (3.28)$$

Si sostituisce al posto di σ_{ij} la (3.26):

$$u'_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial(u'_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} - [-p\delta_{ij} + \mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})] \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}. \quad (3.29)$$

Eliminando la parentesi e sapendo che $p\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0$ si ottiene:

$$u'_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial(u'_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} - \mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}. \quad (3.30)$$

Rifacendo lo stesso procedimento per u_i e σ'_{ij} si ottiene la stessa relazione trovata precedentemente:

$$u_i \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial(u_i \sigma'_{ij})}{\partial x_j} - \mu(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (3.31)$$

Sottraendo la (3.31) dalla (3.30):

$$u'_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial(u'_i \sigma_{ij} - u_i \sigma'_{ij})}{\partial x_j}. \quad (3.32)$$

Sapendo che $\nabla \cdot \sigma = 0$ e $\nabla \cdot \sigma' = 0$ si arriva alla relazione di reciprocità di Lorentz:

$$\frac{\partial(u'_i \sigma_{ij} - u_i \sigma'_{ij})}{\partial x_j} = 0. \quad (3.33)$$

In forma vettoriale:

$$\nabla(\mathbf{u}' \cdot \sigma_{ij} - \mathbf{u} \cdot \sigma'_{ij}) = 0. \quad (3.34)$$

Per continuare con la formulazione è necessario introdurre la funzione di Green per l'equazione di Stokes.

La trattazione per l'equazione di Stokes è del tutto analoga all'equazione di Laplace.

Si include un termine di forzante singolare nell'equazione di Stokes:

$$-\nabla p + \mathbf{b}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mu\nabla^2 \mathbf{u} = 0. \quad (3.35)$$

Il termine $\mathbf{b}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ rappresenta la forzante puntuale nella direzione \mathbf{b} agente nel punto \mathbf{x}_0 .

Una soluzione della (3.35) è la funzione di Green sotto forma di *tensore* di secondo ordine, chiamata *Stokeslet*:

$$G = \begin{bmatrix} -\log r + \frac{(x-x_0)^2}{r^2} & \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r^2} \\ \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r^2} & -\log r + \frac{(y-y_0)^2}{r^2} \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Per semplicità di formulazione da adesso in poi le equazioni tensoriali e vettoriali saranno scritte in notazione indiciale che comprende anche la notazione di Einstein.

La (3.36) con notazione indiciale diventa:

$$G_{ij} = -\delta_{ij} \log r + \frac{\hat{x}_i \hat{x}_j}{r^2}. \quad (3.37)$$

Dove $\hat{\mathbf{x}}$ rappresenta la differenza $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ mentre gli indici i, j le componenti assiali (cioè 1 per x e 2 per y).

Esiste anche per l'equazione di Stokes, come per l'equazione di Laplace, una funzione di Green per domini periodici:

$$\begin{aligned} G_{11} &= 1 - \frac{1}{2} \log \left\{ 2[\cosh[\omega(y - y_0)] - \cos[\omega(x - x_0)]] \right\} - \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{2} \omega \frac{\sinh[\omega(y - y_0)](y - y_0)}{[\cosh[\omega(y - y_0)] - \cos[\omega(x - x_0)]]} \right\}. \\ G_{12} &= G_{21} = \frac{1}{2} \omega \frac{\sinh[\omega(y - y_0)]}{[\cosh[\omega(y - y_0)] - \cos[\omega(x - x_0)]]} (y - y_0). \\ G_{22} &= -\frac{1}{2} \log \left\{ 2[\cosh[\omega(y - y_0)] - \cos[\omega(x - x_0)]] \right\} + \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{2} \omega \frac{\sinh[\omega(y - y_0)](y - y_0)}{[\cosh[\omega(y - y_0)] - \cos[\omega(x - x_0)]]} \right\}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

La soluzione del campo di velocità derivata dalla (3.35) è:

$$u_i = \frac{1}{4\pi\mu} G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) b_j. \quad (3.39)$$

La Stokeslet induce un campo di pressione nel fluido dato da:

$$P = \frac{1}{4\pi} p_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) b_j. \quad (3.40)$$

con:

- 4π , termine scelto per convenzione;
- p_j uguale a $2 \frac{\hat{x}_j}{r^2}$.

Si definisce ora il tensore degli sforzi in funzione di un tensore del terzo ordine:

$$\sigma_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) b_j. \quad (3.41)$$

Il termine T_{ijk} è chiamato **tensore degli sforzi della funzione di Green**. Nel caso bidimensionale prende la forma:

$$T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -4 \frac{\hat{x}_i \hat{x}_j \hat{x}_k}{r^4}. \quad (3.42)$$

Sono stati introdotti fino a questo punto strumenti utili per la dimostrazione della *boundary integral equation*. La relazione di partenza sarà la (3.33):

$$\frac{\partial(u'_i \sigma_{ik} - u_i \sigma'_{ik})}{\partial x_k} = 0. \quad (3.43)$$

Sostituendo nell'equazione il campo di velocità (3.39) e il tensore degli sforzi (3.41) si ottiene:

$$\frac{\partial(G_{ij} \sigma_{ik} - \mu u_i T_{ijk}) b_j}{\partial x_k} = 0. \quad (3.44)$$

Eliminando il vettore arbitrario b_j diventa:

$$\frac{\partial(G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \sigma_{ik}(\mathbf{x}) - \mu u_i(\mathbf{x}) T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0))}{\partial x_k} = 0. \quad (3.45)$$

Integrando l'equazione sull'intero dominio D con contorno C si ottiene:

$$\iint_D \frac{\partial[G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \sigma_{ik}(\mathbf{x}) - \mu u_i(\mathbf{x}) T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)]}{\partial x_k} dS(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.46)$$

Per il teorema della divergenza diventa:

$$\int_C [G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \sigma_{ik}(\mathbf{x}) - \mu u_i(\mathbf{x}) T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)] n_k(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.47)$$

Si divide in due integrali, si pone $f_i = \sigma_{ik} n_k$ e si moltiplica per un coefficiente convenzionale:

$$-\frac{1}{4\pi\mu} \int_C G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) f_i(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi} \int_C u_i(\mathbf{x}) T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) n_k(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.48)$$

Si procede analogamente quanto fatto per Laplace, integrando su un disco di centro \mathbf{x}_0 e raggio ϵ e si arriva a formulazione finale, la **boundary integral equation (BIE) per flusso di Stokes**:

$$u_j(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi\mu} \int_C G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) f_i(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi} \int_C u_i(\mathbf{x}) T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) n_k(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}), \quad (3.49)$$

quando \boldsymbol{x}_0 è situato all'interno del dominio \mathcal{D} , mentre quando \boldsymbol{x}_0 giace sul contorno \mathcal{C} del dominio si ha:

$$u_j(\boldsymbol{x}_0) = -\frac{1}{2\pi\mu} \int_C G_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) f_i(\boldsymbol{x}) dl(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2\pi} \int_C^{PV} u_i(\boldsymbol{x}) T_{ijk}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) n_k(\boldsymbol{x}) dl(\boldsymbol{x}), \quad (3.50)$$

dove, come precedentemente, la notazione PV indica il *valore principale* dell'integrale.

Capitolo 4

Boundary element method (BEM)

Nel capitolo precedente si è mostrata la formulazione delle equazioni differenziali alle derivate parziali che ha portato a determinare le equazioni integrali che risolvono il problema, usufruendo solamente del valore delle variabili al contorno del dominio preso in considerazione. Nella maggior parte dei casi non si può trovare una soluzione analitica per le *boundary integral equations*. Infatti solo per determinate forme del dominio e condizioni al contorno si riesce ad arrivare ad una formulazione analitica: per tutti gli altri casi il procedimento analitico non è possibile.

Si utilizza pertanto un procedimento numerico per la risoluzione delle equazioni integrali che prevede la discretizzazione del contorno in piccoli elementi in numero finito. Discretizzando il dominio si ha necessariamente una perdita di informazioni dovute alla non continuità della risoluzione dell'integrale: si hanno quindi degli *errori* che diminuiranno all'aumentare del numero di divisioni del dominio.

Lo scopo di questo capitolo è di introdurre il metodo numerico utilizzato nella costruzione dei codici che risolvono le equazioni di bilancio mostrate nel capitolo precedente.

Questi codici saranno poi validati nel capitolo 5, con determinate condizioni al contorno e geometrie, in modo da poter essere applicati al problema oggetto del nostro studio.

4.1 Calcolo Numerico e Matlab

Il **calcolo numerico** è una branca della matematica applicata per risolvere i modelli fisici.

Prima del 1870 il calcolo numerico non si era ancora sviluppato come disciplina autonoma ma comunque risale a secoli prima dell'invenzione dei calcolatori elettronici, quando i calcoli erano fatti a mano e venivano stampati libri con formule e tabelle di dati usati per raccogliere dei coefficienti di funzioni e altri strumenti numerici.

Molti grandi matematici si dedicarono all'analisi numerica, come Newton, Lagrange, Jacobi, Gauss ed Eulero.

Quando i calcolatori presero spazio nel mondo moderno si sviluppò ulteriormente la disciplina dell'analisi numerica, permettendo lo svolgimento di calcoli gradualmente sempre più complessi.

Alcuni problemi della matematica del continuo possono essere risolti con un metodo chiamato diretto che utilizza algoritmi che risolvono il problema in un numero finito di passi: questi algoritmi sono caratterizzati in base a velocità di convergenza e stabilità numerica.

Per la maggior parte dei problemi numerici non ci sono metodi diretti. In tali casi, è spesso possibile usare un metodo iterativo: un tale metodo inizia da un tentativo, e trova approssimazioni successive che, sperabilmente, convergono alla soluzione.

Per risolvere le *boundary integral equations* si utilizza un metodo diretto implementato su piattaforma **MATLAB**¹

Questo programma consente di ottenere matrici, visualizzare funzioni e dati, implementare algoritmi, scrivere codici per la risoluzione di algoritmi ed ha molte altre funzioni. MATLAB è stato utilizzato nel corso di questa trattazione per risolvere in maniera veloce ed affidabile l'algoritmo che ci consente di ottenere la soluzione numerica del problema.

4.2 Discretizzazione della geometria

La geometria che sarà utilizzata per la trattazione BEM è una geometria discreta e sarà la stessa per l'equazione di Laplace e l'equazione di Stokes.

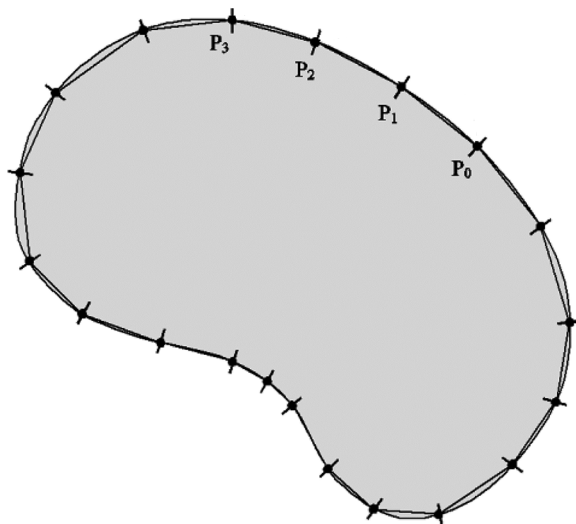


Figura 4.1: Esempio di discretizzazione di un dominio arbitrario.

¹pacchetto MATLAB scaricabile gratuitamente con licenza per tutti gli studenti dell'ateneo di Genova

Per descrivere la geometria discreta si è utilizzato un dominio come quello mostrato in figura 4.1.

Il contorno continuo del dominio è stato suddiviso in tanti elementi i cui estremi ($P_0, P_1, P_2, P_3 \dots$) vengono detti nodi. La forma degli elementi viene approssimata mediante funzioni polinomiali di ordine arbitrario.

Il numero di nodi è chiamato NC mentre il numero di elementi NE . In figura 4.2 è schematizzato, a titolo di esempio, un pannello, rappresentato dalla linea curva, con 5 nodi e 4 elementi ricostruito mediante un polinomio del terzo ordine.

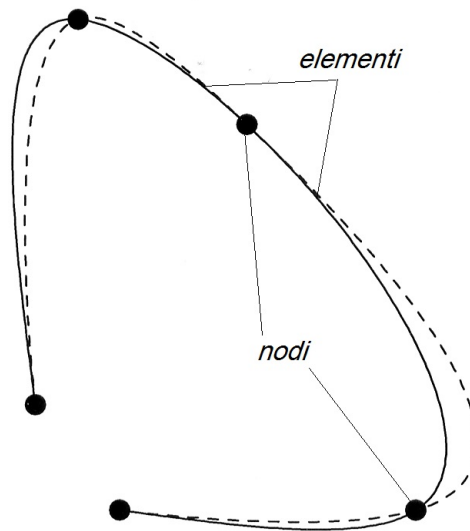


Figura 4.2: Rappresentazione di una linea aperta discretizzata con 5 nodi e 4 elementi.

Si andrà adesso a presentare il modello utilizzato per approssimare le funzioni incognite.

4.2.1 Spline cubica

Per alcuni degli argomenti numerici trattati si è fatto riferimento al libro "Calcolo Scientifico" di Alfio Quarteroni et al. [21].

Approssimare una funzione f significa trovare una funzione \tilde{f} di più semplice forma che verrà usata in sostituzione di f . E' una strategia utilizzata nell'integrazione numerica dove invece di calcolare $\int_a^b f(x)dx$ si calcola $\int_a^b \tilde{f}(x)dx$: \tilde{f} deve essere una funzione facile da integrare come ad esempio un polinomio. In molte applicazioni concrete si conosce una funzione solo attraverso i suoi valori in determinati punti. Si suppone di conoscere le $n + 1$ coppie di valori $x_i, y_i, i = 0, \dots, n$ dove tutti i punti distinti x_i sono detti nodi.

Nel caso più semplice si può sostituire al posto della $f(x)$ un valore costante nell'intorno di x_i ottenuto dalla conoscenza delle coppie di valori.

Generalizzando si richiede che la funzione approssimante \tilde{f} soddisfi le seguenti espressioni:

$$\tilde{f}(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

con $\tilde{f}(x_i)$ la funzione definita **interpolatore** dell'insieme di dati y_i .

Nella figura 4.1 è stata usata un'approssimazione lineare tra i nodi estremi mentre nel nostro caso si preferisce utilizzare una forma polinomiale del tipo:

$$\tilde{f}(x_i) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n. \quad (4.2)$$

Per la costruzione del codice è importante poter descrivere in maniera più precisa possibile il confine del dominio d'integrazione.

Anche un piccolo distaccamento del modello dalla geometria reale può comportare degli errori numerici non trascurabili che quindi portano ad avere dei risultati non affidabili e poco precisi.

Per avere un modello di approssimazione della geometria affidabile è stato usato un interpolatore polinomiale di terzo grado, chiamato nel calcolo numerico **spline cubica**. I vantaggi dell'uso di questo strumento sono che tra i nodi della geometria la funzione approssimata avrà continuità della derivata prima e seconda: ciò non accadeva ad esempio se si approssimava la geometria con dei segmenti, perché così facendo non si soddisfa la continuità della derivata prima nei nodi.

Per implementare questa discretizzazione si descrive il confine del dominio con $N + 1$ punti (o nodi) introducendo il parametro s che rappresenta l'ascissa curvilinea che varierà monotonicamente e in maniera continua lungo il confine d'integrazione.

Per identificare l'ascissa curvilinea sul nodo, si usa la terminologia indiciale s_i : per convenzione avrà valore nullo nel primo nodo, cioè $s_0 = 0$.

L' i -esimo elemento, che giace tra il i -esimo e il $i+1$ -esimo nodo è descritto nella seguente forma parametrica cubica:

$$\begin{cases} x(s) = a_i(s - s_i)^3 + b_i(s - s_i)^2 + c_i(s - s_i) + x_i^G \\ y(s) = a'_i(s - s_i)^3 + b'_i(s - s_i)^2 + c'_i(s - s_i) + y_i^G, \end{cases} \quad (4.3)$$

con:

- le coordinate del punto iniziale, $x(s_i) = x_i^G$ e $y(s_i) = y_i^G$;
- l'ascissa curvilinea s appartenente all'intervallo $[s_i, s_{i+1}]$.

Esistono $3N + 1$ coefficienti per $x(s)$ e $3N + 1$ coefficienti per $y(s)$ che vengono trovate tenendo conto delle condizioni ai nodi, cioè continuità della geometria, continuità della derivata prima e continuità della derivata seconda.

Per l'equazione $x(s)$ nella (4.3), ponendo $h_i = s_{i+1} - s_i$ e andando ad utilizzare la (4.3) su ogni nodo si ottengono le seguenti 3 condizioni:

1. continuità della geometria, $x_{i+1}^G = x_i^G + a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i$, con $i = 1, \dots, N$;
2. continuità della derivata prima, $3a_i h_i^2 + 2b_i h_i + c_i = c_{i+1}$, con $i = 1, \dots, N - 1$;
3. continuità della derivata seconda, $6a_i h_i + 2b_i = 2b_{i+1}$, con $i = 1, \dots, N - 1$.

Si nota che si hanno $3N - 1$ equazioni e $3N + 1$ incognite: si introducono pertanto le condizioni che costituiscono le due equazioni di chiusura vincolando la derivata seconda agli estremi del contorno uguali a 0.

Così facendo il sistema è risolvibile ed è possibile quindi ricavare i coefficienti per poter modellare la geometria del contorno con una funzione polinomiale cubica. Stesso procedimento va fatto per l'equazione $y(s)$ nella (4.3).

4.3 BEM applicata all'equazione di Stokes

In questa sezione si andranno a discretizzare le BIE per le equazioni di Stokes.

La discretizzazione è analoga per le equazioni integrali di Laplace, però nel caso di Stokes assume una forma più complessa essendo un problema bidimensionale vettoriale ed essendo presenti dei tensori del terzo ordine.

Si è quindi preferito descrivere ed analizzare il caso più complicato di Stokes che racchiude il caso di Laplace, che sarà sintetizzato successivamente.

Ricordiamo pertanto le *boundary integral equations* per le equazioni di Stokes:

$$u_j(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi\mu} \int_{\mathcal{C}} G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) f_i(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} u_i(\mathbf{x}) T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) n_k(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}). \quad (4.4)$$

Tale equazione è valida nel caso in cui \mathbf{x}_0 è situato all'interno del dominio \mathcal{D} : mentre quando \mathbf{x}_0 giace sul contorno \mathcal{C} del dominio vale la seguente equazione:

$$u_j(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{2\pi\mu} \int_{\mathcal{C}} G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) f_i(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}}^{PV} u_i(\mathbf{x}) T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) n_k(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}). \quad (4.5)$$

Dividendo il contorno in tanti elementi possiamo calcolare l'integrale come somma di integrali calcolati su ciascun elemento.

Detto ciò possiamo riscrivere l'integrale nel seguente modo:

$$u_j(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{2\pi\mu} \sum_{k=1}^{NE} \int_{E_k} f_i G_{ij} dl + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{NE} \int_{E_k} u_i T_{ijk} n_k dl. \quad (4.6)$$

\mathbf{x}_0 il punto per il quale viene scritta l'equazione integrale.

Nel caso discreto il punto sul contorno è identificato dai nodi che separano gli elementi. Occorre scrivere un numero di equazioni, del tipo (4.6), quanti sono il numero di nodi scelto per discretizzare il contorno.

Ogni elemento del confine viene approssimato con interpolazione spline di terzo ordine e mappato secondo l'ascissa curvilinea partendo da un nodo arbitrario. Si ricavano così le due equazioni (4.3) in funzione di una sola variabile, per l'appunto l'ascissa curvilinea s .

Passando dalle coordinate (x, y) alla parametrizzazione con ascissa curvilinea cambiare variabile occorre negli integrali presenti nelle equazioni e quindi moltiplicare per lo Jacobiano della trasformazione, che per le spline al k -esimo nodo vale:

$$h_s = \sqrt{[3a_k(s - s_k)^2 + 2b_k(s - s_k) + c_k]^2 + [3a'_k(s - s_k)^2 + 2b'_k(s - s_k) + c'_k]^2}, \quad (4.7)$$

che si ottiene da $h_s = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2}$.

Per motivi che verranno chiariti in seguito si effettua un nuovo cambio di variabile parametrizzando l'elemento tale che gli estremi vengano mappati tra $(-1, 1)$. E' facile dimostrare che la trasformazione risulta svolta dalla seguente relazione:

$$s(\xi) = \frac{s^k + s^{k+1}}{2} + \frac{s^{k+1} - s^k}{2}\xi = s_m + s_d \xi, \quad (4.8)$$

Il coefficiente di trasformazione è proprio s_d e dipende solamente dalla coordinata s sui nodi estremi dell'elemento:

$$h_\xi = \frac{s^{k+1} - s^k}{2}. \quad (4.9)$$

Una volta trasformato l'integrale occorre determinare l'andamento delle variabili u ed f lungo un elemento. Nel nostro caso abbiamo scelto una variazione lineare. Pertanto detta ϕ una grandezza da linearizzare, si ha:

$$\phi(\xi) = \psi_1(\xi)\phi_1 + \psi_2(\xi)\phi_2, \quad (4.10)$$

con ϕ_1 e ϕ_2 le grandezze rispettivamente all'estremo iniziale e all'estremo finale dell'elemento. Facendo riferimento alla figura 4.3 si definiscono le due funzioni di forma ψ_1 e ψ_2 .

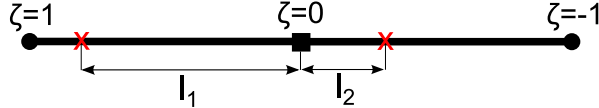


Figura 4.3: coefficienti di forma.

$$\psi_1(\xi) = \frac{(l_2 - \xi)}{l}, \quad (4.11)$$

$$\psi_2(\xi) = \frac{(l_1 + \xi)}{l}, \quad (4.12)$$

Saranno linearizzate su ogni elemento le seguenti grandezze:

- la velocità \mathbf{u} ;
- il prodotto tra il tensore degli sforzi e la normale \mathbf{f} ;
- la normale \mathbf{n} ;

per ottenere i seguenti risultati:

- $f(\xi) = \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 = f_m + f_d \xi$
- $\begin{cases} u(\xi) = \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2 = u_m + u_d \xi \\ v(\xi) = \psi_1 v_1 + \psi_2 v_2 = v_m + v_d \xi \end{cases}$
- $\begin{cases} n_x(\xi) = \psi_1 n_{x1} + \psi_2 n_{x2} = n_{xm} + n_{xd} \xi \\ n_y(\xi) = \psi_1 n_{y1} + \psi_2 n_{y2} = n_{ym} + n_{yd} \xi \end{cases}$

Sostituendo le grandezze linearizzate nell'equazione (4.6) e moltiplicando per i coefficienti della trasformazione si ottiene:

$$u_j(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{2\pi\mu} \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^1 h_s h_\xi [\psi_1 f_i^k + \psi_2 f_i^{k+1}] G_{ij} d\xi + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^1 h_s h_\xi [\psi_1 u_i^k + \psi_2 u_i^{k+1}] M_{ij} d\xi, \quad (4.13)$$

dove:

$$M_{ij} = T_{ijk} n_k(\xi).$$

L'integrale di primo livello I_j^k con notazione di Einstein con gli indici ripetuti diventa:

$$I_j^k = \int_{-1}^1 h_s h_\xi [\psi_1 f_i^k + \psi_2 f_i^{k+1}] G_{ij} d\xi = \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 f_1^k G_{1j} d\xi + \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 f_2^k G_{2j} d\xi + \\ + \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 f_1^{k+1} G_{1j} d\xi + \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 f_2^{k+1} G_{2j} d\xi. \quad (4.14)$$

Essendo f_1^k, f_2^k, f_1^{k+1} e f_2^{k+1} grandezze costanti, si possono portare fuori dall'integrale, ottenendo così:

$$I_j^k = f_1^k \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 G_{1j} d\xi + f_2^k \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 G_{2j} d\xi + \\ + f_1^{k+1} \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 G_{1j} d\xi + f_2^{k+1} \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 G_{2j} d\xi. \quad (4.15)$$

Si vengono a formare così otto integrali per ogni nodo formando due matrici di dimensioni 2×2 . Al k -esimo nodo si può scrivere:

$$C_{1,ij}^k = \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 G_{11} d\xi & \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 G_{21} d\xi \\ \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 G_{12} d\xi & \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 G_{22} d\xi \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$C_{2,ij}^k = \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 G_{11} d\xi & \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 G_{21} d\xi \\ \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 G_{12} d\xi & \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 G_{22} d\xi \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Identico ragionamento e procedimento si dovrà fare per quanto riguarda l'integrale di secondo livello D_j^k , ottenendo un analogo risultato:

$$\begin{aligned} D_j^k = \int_{-1}^1 h_s h_\xi [\psi_1 u_i^k + \psi_2 u_i^{k+1}] M_{ij} d\xi = \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 u_1^k M_{1j} d\xi + \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 u_2^k M_{2j} d\xi + \\ + \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 u_1^{k+1} M_{1j} d\xi + \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 u_2^{k+1} M_{2j} d\xi. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ponendo $u_1 = u$ e $u_2 = v$ e portando fuori dall'integrale i termini costanti u^k , v^k , u^{k+1} e v^{k+1} ottengo:

$$\begin{aligned} D_j^k = u^k \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 M_{1j} d\xi + v^k \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 M_{2j} d\xi + \\ + u^{k+1} \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 M_{1j} d\xi + v^{k+1} \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 M_{2j} d\xi. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Come per il caso dell'integrale di primo livello si formano otto integrali in due matrici di dimensioni 2×2 ad ogni nodo. Al k -esimo nodo si può scrivere:

$$C_{1,ij}^k = \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 M_{11} d\xi & \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 M_{21} d\xi \\ \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 M_{12} d\xi & \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 M_{22} d\xi \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$C_{2,ij}^k = \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 M_{11} d\xi & \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 M_{21} d\xi \\ \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 M_{12} d\xi & \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 M_{22} d\xi \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Si ha che, per un singolo pannello della geometria, i coefficienti del primo nodo saranno esattamente C_1^1 mentre per i coefficienti di tutti i nodi centrali (cioè non il primo e l'ultimo) bisogna sommare i coefficienti del C_2^{k-1} presenti nella formula del nodo precedente con il C_1^k .

Si ottiene così una matrice dei coefficienti di dimensioni $2NC \times 2NC$.

A seconda delle condizioni al contorno i coefficienti delle incognite saranno espressi dalle 4.16 e 4.17 per una condizione di Neumann e dalle (4.20) e (4.21) per una condizione di Dirichlet. Inoltre ai termini diagonali della matrice, per la condizione di Neumann, si dovrà sommare il contributo del coefficiente della velocità u_j che compare al primo membro dell'equazione (4.25). Saranno utilizzati due apici: il primo indica per quale nodo stiamo scrivendo l'equazione, quindi per quale valore di \mathbf{x}_0 , mentre il secondo indica su quale elemento stiamo integrando, quindi l'indice già descritto k . La matrice

dei coefficienti incogniti $C^{m,k}$ prende così la forma:

$$\begin{bmatrix}
 C_{1,11}^{1,1} & C_{1,12}^{1,1} & \dots & C_{2,11}^{1,k} + C_{1,11}^{1,k+1} & C_{2,12}^{1,k} + C_{1,12}^{1,k+1} & \dots & C_{2,11}^{1,2NC} & C_{2,12}^{1,2NC} \\
 C_{1,21}^{1,1} & C_{1,22}^{1,1} & \dots & C_{2,21}^{1,k} + C_{1,21}^{1,k+1} & C_{2,22}^{1,k} + C_{1,22}^{1,k+1} & \dots & C_{2,21}^{1,2NC} & C_{2,22}^{1,2NC} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 C_{1,11}^{m,1} & C_{1,12}^{m,1} & \dots & C_{2,11}^{m,k} + C_{1,11}^{m,k+1} & C_{2,12}^{m,k} + C_{1,12}^{m,k+1} & \dots & C_{2,11}^{m,2NC} & C_{2,12}^{m,2NC} \\
 C_{1,21}^{m,1} & C_{1,22}^{m,1} & \dots & C_{2,21}^{m,k} + C_{1,21}^{m,k+1} & C_{2,22}^{m,k} + C_{1,22}^{m,k+1} & \dots & C_{2,21}^{m,2NC} & C_{2,22}^{m,2NC} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 C_{1,11}^{2NC,1} & C_{1,12}^{2NC,1} & \dots & C_{2,11}^{2NC,k} + C_{1,11}^{2NC,k+1} & C_{2,12}^{2NC,k} + C_{1,12}^{2NC,k+1} & \dots & C_{2,11}^{2NC,2NC} & C_{2,12}^{2NC,2NC} \\
 C_{1,21}^{2NC,1} & C_{1,22}^{2NC,1} & \dots & C_{2,21}^{2NC,k} + C_{1,21}^{2NC,k+1} & C_{2,22}^{2NC,k} + C_{1,22}^{2NC,k+1} & \dots & C_{2,21}^{2NC,2NC} & C_{2,22}^{2NC,2NC}
 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Per assemblare la matrice nel codice sono stati utilizzati dei cicli **for** a struttura *nidi-ficata* (cioè uno all'interno dell'altro).

Nel primo ciclo **for** è inserito un contatore m che ha lo scopo di spostare il punto \mathbf{x}_0 da un nodo all'altro della geometria discretizzata, definendo per ogni punto una diversa equazione.

All'interno del primo ciclo **for** sono presenti altri due cicli **for**: nel primo dei due cicli si definisce un indice contatore che ha lo scopo di identificare su quale pannello della geometria si sta utilizzando l'equazione m , mentre nel secondo ciclo **for** si definisce un altro indice contatore che identifica invece l'elemento di pannello.

Conoscere su che pannello si sta integrando è importante perché è necessario sapere qual è la condizione al contorno da applicare.

Avendo assemblato la matrice dei coefficienti incogniti è necessario anche assemblare il vettore dei coefficienti noti, denominato vettore \mathbf{b} per poter risolvere il sistema di $2NC$ equazioni in $2NC$ incognite.

Il vettore si compone di tutti i termini noti derivati dalle condizioni al contorno: ogni elemento è costituito dalla somma algebrica di tutti i termini conosciuti che fanno parte dell'equazione m , vedi equazioni (4.15) e (4.19) dove i termini:

$$f_1^k, f_2^k, f_1^{k+1}, f_2^{k+1}, u^k, v^k, u^{k+1} e v^{k+1} \quad (4.23)$$

sono noti.

Si è visto in precedenza che il termine u_j che compare alla sinistra dell'equazione (4.5) si sommava ai coefficienti diagonali della matrice per condizioni al contorno di Neumann. Per l'assemblamento del vettore dei termini noti, per condizioni al contorno di Dirichlet, il termine u_j è noto e per le condizioni al contorno di no-slip impostate è uguale a 0.

Detta \mathbf{C} la matrice dei coefficienti incogniti è possibile ricavare il vettore delle incognite \mathbf{x} risolvendo il seguente sistema lineare:

$$\mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (4.24)$$

La risoluzione del problema è possibile utilizzando il comando \ presente in MATLAB. E' importante evidenziare che tale comando richiama uno specifico algoritmo a seconda di come è configurata la matrice dei coefficienti delle incognite.

Nel caso più generare di matrice sparsa, MATLAB calcola una generica eliminazione di Gauss.

Il vettore calcolato \mathbf{x} contiene tutti i valori incogniti sul contorno del dominio: è quindi adesso possibile utilizzare la (4.4) per poter calcolare il campo di moto sul dominio.

L'equazione diventa:

$$u_j(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi\mu} \sum_{k=1}^{NE} \int_{E_k} f_i^k G_{ij} dl + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{NE} \int_{E_k} u_i^k T_{ijk} n_k dl. \quad (4.25)$$

Con passaggi analoghi al caso precedente si ottiene:

$$\begin{aligned} u_j(\mathbf{x}_0) = & -\frac{1}{4\pi\mu} \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^1 h_s h_\xi [\psi_1 f_i^k + \psi_2 f_i^{k+1}] G_{ij} d\xi + \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^1 h_s h_\xi [\psi_1 u_i^k + \psi_2 u_i^{k+1}] M_{ij} d\xi. \end{aligned} \quad (4.26)$$

I due integrali, utilizzando la notazione degli indici ripetuti diventano:

$$\begin{aligned} I_j^k = & f_1^k \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 G_{1j} d\xi + f_2^k \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 G_{2j} d\xi + \\ & + f_1^{k+1} \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 G_{1j} dl + f_2^{k+1} \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 G_{2j} d\xi. \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} D_j^k = & u^k \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 M_{1j} d\xi + v^k \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 M_{2j} d\xi + \\ & + u^{k+1} \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 M_{1j} d\xi + v^{k+1} \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 M_{2j} d\xi. \end{aligned} \quad (4.28)$$

I valori degli integrali su ciascun nodo è conosciuto: infatti, come già evidenziato, le condizioni al contorno sono conosciute riuscendo così ad ottenere direttamente i valori di I_j^k e D_j^k .

4.3.1 Calcolo degli integrali di primo e secondo livello

Fino ad adesso è stato discusso il procedimento principale per poter trasformare il problema in un sistema di $2NC$ equazioni e $2NC$ incognite e per poter risolvere l'equazione

per trovare il campo di moto nel dominio. Tutto questo tralasciando la risoluzione degli integrali che hanno un ruolo fondamentale perché entrano in gioco sia nella matrice \mathbf{C} che nel vettore \mathbf{b} .

La risoluzione analitica di questi integrali non è possibile nella maggior parte dei casi: è utile quindi introdurre dei metodi numerici utili per la trattazione: l'integrazione numerica.

L'integrazione numerica ha lo scopo di approssimare l'integrale del tipo:

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx, \quad (4.29)$$

con f una funzione arbitraria che deve essere continua nell'intervallo d'integrazione $[a, b]$.

Una delle strategie più utilizzate per il calcolo approssimato degli integrali è quella di approssimare la funzione $f(x)$ come mostrato nella sezione precedente attraverso un interpolatore polinomiale.

Si suddivide l'intervallo d'integrazione $[a, b]$ in sotto-intervalli

$$I_k = [x_{k-1}, x_k], k = 1, \dots, M, \quad (4.30)$$

con $x_k = a + kH$ e $H = \frac{(b-a)}{M}$ si ottiene:

$$I(f) = \sum_{k=1}^M \int_{I_k} f(x) dx. \quad (4.31)$$

Per ogni intervallo si sostituisce l'integrale di f con l'integrale di un polinomio \tilde{f} ottenuto dall'interpolazione polinomiale.

Il caso più semplice è quello della scelta di un valore costante che interpola f nel punto medio dell'intervallo I_k :

$$\bar{x}_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}. \quad (4.32)$$

In questo modo si ottiene la formula di quadratura composita del punto medio:

$$I_{punto\ medio} = H \sum_{k=1}^M f(\bar{x}_k). \quad (4.33)$$

La formula del punto medio classica si ottiene prendendo $M = 1$ nella (4.33), applicando la formula del punto medio direttamente sull'intervallo (a, b) :

$$I_{pm}(f) = (b - a)f\left[\frac{(a + b)}{2}\right]. \quad (4.34)$$

Se invece si sceglie un valore che non è più costante sull'intervallo I_k ma lineare si ottiene la *formula del trapezio*:

$$I_{trapezio} = \frac{H}{2} \sum_{k=1}^M [f(x_{k-1}) + f(x_k)]. \quad (4.35)$$

Prendendo $M = 1$ nella (4.35) come nella formula di quadratura del punto medio si ottiene:

$$I_{trapezio} = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]. \quad (4.36)$$

Queste approssimazioni sono possibili per ogni tipo di polinomio interpolatore di grado più alto.

Per la costruzione del codice per risolvere gli integrali è stata utilizzata una particolare formula chiamata di Gauss-Legendre dimostrata nel seguito. Le formule (4.34) e (4.36) si dicono *semplici*. Sono due rappresentazioni particolari della seguente espressione generale:

$$I_{approssimata}(f) = \sum_{j=0}^n w_j f(y_j). \quad (4.37)$$

Dove:

- $\{w_j\}$ sono detti *pesi*;
- $\{y_j\}$ sono i punti chiamati *odi*.

Il grado di esattezza di una formula di quadratura è il più grande intero $r \geq 0$ per il quale l'integrale approssimato di un qualsiasi polinomio di grado r è uguale all'integrale esatto. Dalla (4.37) si avrà un grado di esattezza almeno pari a n se:

$$I_{appr}(f) = \int_a^b \Pi_n f(x) dx, \quad (4.38)$$

con $\Pi_n f \in \mathbb{P}_n$ chiamato il **polinomio interpolatore di Lagrange** di una funzione f nei nodi y_i , $y_i = 0, \dots, n$.

Proposizione 4.3.1. *Per un dato $m > 0$, la formula di quadratura (4.37) ha grado di esattezza $n + m$ se e soltanto se è di tipo interpolatorio e se il polinomio nodale $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - \bar{y}_i)$ associato ai nodi $\{\bar{y}_i\}$ è tale che:*

$$\int_{-1}^1 \omega_{n+1}(x) p(x) dx = 0, \quad \forall p \in \mathbb{P}_{m-1}. \quad (4.39)$$

E' dimostrabile che il valore massimo che m può assumere è $n + 1$ e viene raggiunto quando ω_{n+1} è proporzionale al polinomio di Legendre di grado $n + 1 \rightarrow L_{n+1}(x)$. I polinomi di Legendre si possono ricavare in maniera ricorsiva tramite la seguente serie a tre termini:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \quad L_1(x) = x, \\ L_{k+1}(x) &= \frac{2k+1}{k+1} x L_k(x) - \frac{k}{k+1} L_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.40)$$

Qualsiasi polinomio $p_n \in \mathbb{P}_n$ è riscrivibile come combinazione lineare dei polinomi di Legendre L_0, L_1, \dots, L_n fino al termine n .

Si può dimostrare che il massimo grado di esattezza è pari a $2n + 1$ e si ottiene con la formula di **Gauss-Legendre** (4.39) i cui nodi e pesi sono:

- $\{\bar{y}_j\}$ = zeri di $L_{n+1}(x)$, rappresentano i nodi e sono tutti interni all'intervallo $(-1,1)$.
- $\bar{w}_j = \frac{2}{(1-\bar{y}_j^2)[L'_{n+1}(\bar{y}_j)]^2}$, $j = 0, \dots, n$

I pesi e i nodi nell'intervallo $(-1,1)$ sono tabulati e quindi conosciuti.

Nelle seguenti tabelle 4.1 e 4.2 sono indicati i pesi al variare del numero di nodi scelto:

numero di nodi	nodi di quadratura $\{y_j\}$
2	± 0.5773502691
3	$\pm 0.774596669241, 0$
4	$\pm 0.8611363115, \pm 0.33998104358$
6	$\pm 0.93246951, \pm 0.66120938, \pm 0.23861918$
8	$\pm 0.96028985, \pm 0.79666647, \pm 0.52553240, \pm 0.18343464$

Tabella 4.1: Nodi di quadratura Gauss-Legendre

numero di nodi	pesi $\{\alpha_j\}$
2	1,1
3	0.55555555555555, 0.888888888888, 0.55555555555555
4	0.3478548451, 0.652145154, 0.652145154, 0.3478548451
6	0.171324, 0.3607615, 0.46791393, 0.46791393, 0.3607615, 0.171324
8	0.1012, 0.22238, 0.31370, 0.36268, 0.36268, 0.31370, 0.22238, 0.10122

Tabella 4.2: Pesì di Gauss-Legendre

Per il calcolo degli integrali si è scelto un numero di nodi pari a 6.

Gli integrali da risolvere sono:

$$I = \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi G_{ij} d\xi, \quad D = \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi T_{ijk} u_k d\xi. \quad (4.41)$$

rispettivamente di primo e di secondo livello.

La risoluzione di questi due integrali é numericamente accurata quando gli stessi non sono singolari.

Come già visto, la funzione di Green è una funzione particolare che dipende da \mathbf{x} e \mathbf{x}_0 e quando questi coincidono la funzione tende all'infinito trasformando così l'integrale in un'integrale improprio.

Quando l'integrale diventa improprio si ottiene un caso singolare e l'unico modo per risolverlo è analiticamente seguendo determinati passaggi matematici. Nel caso della *boundary integral equation* su un dominio interno non si verifica mai la singolarità perché qualunque punto preso all'interno del dominio non sarà mai coincidente con il bordo del dominio.

I due integrali sono curvilinei, cioè calcolati su una linea su di un piano. Per poterli risolvere è necessario, con dovute trasformazioni cambiare il dominio di integrazione, da curva bidimensionale a intervallo di Gauss- Legendre $(-1, 1)$, come spiegato precedentemente.

Sono riportati i passaggi partendo da un integrale con funzione generica $f(x, y)$ che nel nostro caso corrisponde a $\psi G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ oppure a $\psi T_{ijk} n_k$:

$$\begin{aligned} I &= \int_{E_k} f(x, y) dl(x, y) = \\ &= \int_{s_k}^{s_{k+1}} h_s(s) f(s) ds = \\ &= \int_{-1}^1 h_\xi h_s(\xi) f(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.42)$$

E' possibile adesso utilizzare il metodo di Gauss-Legendre che trasforma l'integrale in una sommatoria dei valori della funzione in punti prefissati tra $(-1, 1)$, chiamati nodi e li moltiplica per un peso w_i :

$$\int_{-1}^1 h_\xi h_s f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{NQ} h_s(\xi_i) h_\xi f(\xi_i) w_i. \quad (4.43)$$

I nodi e i pesi sono tabulati e sono dipendenti dal numero di nodi che si sta adoperando per il metodo.

Concludendo possiamo riscrivere gli integrali di primo e secondo livello (4.41) sotto forma di sommatoria nel seguente modo:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi(\xi) G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) d\xi(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{NQ} h_s(\xi_k) h_\xi \psi G_{ij}(\xi_k, \mathbf{x}_0) w_k, \\ D &= \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi(\xi) T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) n_k(\mathbf{x}) d\xi(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{NQ} h_s(\xi_k) h_\xi \psi M_{ij}(\xi_k, \mathbf{x}_0) w_k. \end{aligned} \quad (4.44)$$

4.3.2 Integrali singolari

Per quanto riguarda invece la risoluzione degli integrali (4.41) quando essi risultano singolari e quindi non risolvibili numericamente in maniera diretta si utilizza la trattazione che segue.

Il valore dell'integrale di secondo livello quando diventa singolare è zero e quindi non genera problemi di risoluzione: ciò semplifica il codice da scrivere.

Per l'integrale di primo livello il discorso è diverso: il termine logaritmico delle componenti diagonali della funzione di Green genera una discontinuità in \mathbf{x}_0 .

Per poter risolvere questo integrale è utile eliminare la singolarità del termine che contiene il logaritmo.

Uno dei metodi è quello di sommare e sottrarre dal termine logaritmico la seguente quantità:

$$h_s \psi(s) \log(r), \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|,$$

ottenendo così:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} h_s(s) \psi_n(s) \log\{2[\cosh(\omega \hat{x}_2) - \cos(\omega \hat{x}_1)]\} ds = \\ & -\frac{1}{2} \left[\int_{s_1}^{s_2} h_s(s) \psi_n(s) \log\left\{\frac{2}{r}[\cosh(\omega \hat{x}_2) - \cos(\omega \hat{x}_1)]\right\} + h_s \psi_n(s) \log(r) ds \right]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Così facendo il primo termine dell'integrale diventa non singolare e può essere risolto numericamente.

Il secondo termine $\log(r)$ è invece singolare ed è quindi necessario riutilizzare un metodo analogo a quanto visto precedentemente: sommando e sottraendo il termine

$$h_s(s) \psi_n(s) \log(|s - s_0|),$$

passando alla variabile ascissa curvilinea, si chiamerà s_0 l'ascissa curvilinea del punto singolare. Si ottiene:

$$\int_{s_1}^{s_2} h_s \psi_n(s) \log(r) ds = \int_{s_1}^{s_2} h_s(s) \psi_n(s) \log\left(\frac{r}{|s - s_0|}\right) + h_s \psi_n(s) \log(|s - s_0|) ds. \quad (4.46)$$

Come nel caso precedente, si ha che il primo integrale è non singolare mentre il secondo presenta una singolarità.

Procedendo con lo stesso metodo, sommando e sottraendo il termine $h_s(s_0) \psi_n(s_0) \log(|s - s_0|) ds$:

$$\begin{aligned} & \int_{s_1}^{s_2} h_s(s) \psi_n(s) \log(|s - s_0|) ds \\ & = \int_{s_1}^{s_2} [h_s \psi_n(s) - h_s(s_0) \psi_n(s_0)] \log(|s - s_0|) + h_s(s_0) \psi_n(s_0) \log(|s - s_0|) ds. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Si sono ottenuti due integrali non singolari. Infatti il secondo integrale risulta:

$$h_s(s_0)\psi_n(s_0)\log(|s-s_0|)ds$$

ed è quindi risolvibile analiticamente secondo il metodo d'integrazione per parti:

$$\int_{s_1}^{s_2} h_s(s_0)\psi_n(s_0)\log(|s-s_0|)ds = h_s(s_0)\psi_n(s_0)[|s_1-s_0|\log(|s_1-s_0|) + |s_2-s_0|\log(|s-s_0|)]. \quad (4.48)$$

Si ottengono così tutti integrali che sono risolvibili numericamente seguendo il metodo di Gauss-Legendre:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2} h_s(s)\psi_n(s)\log\{2[\cosh(\omega\hat{x}_2) - \cos(\omega\hat{x}_1)]\}ds = \\ & -\sum_{i=1}^{NQ} \frac{h_\xi w_i}{2} \left[h_s(\xi_i)\psi_n(\xi_i)\log\left\{\frac{2}{r}[\cosh(\omega\hat{x}_2(\xi_i)) - \cos(\omega\hat{x}_1(\xi_i))]\right\} + \right. \\ & \left. h_s(\xi_i)\psi_n(\xi_i)\log\left(\frac{r}{|s(\xi_i)-s_0|}\right) + [h_s(\xi_i)\psi_n(\xi_i) - h_s(s_0)\psi_n(s_0)]\log(|s(\xi_i)-s_0|) \right] - \\ & \frac{h_s(s_0)\psi_n(s_0)}{2} \left(|s_1-s_0|\log(|s_1-s_0|) + |s_2-s_0|\log(|s-s_0|) \right). \end{aligned}$$

4.4 BEM applicata all'equazione di Laplace

Come già detto, la trattazione *boundary element method* per l'equazione di Laplace è del tutto analoga a quella per l'equazione di Stokes.

A parte cambiare la forma delle equazioni integrali, per il resto la metodologia rimane la stessa. La geometria discreta, la risoluzione degli integrali e l'approssimazione della funzione sugli elementi tramite coefficienti di forma non verrà ripetuta in questa sezione perché la stessa.

Le *boundary integral equations* per l'equazione di Laplace sono:

$$w(\mathbf{x}_0) = \int_C w(\mathbf{x})[\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)] dl(\mathbf{x}) - \int_C G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)[\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla w(\mathbf{x})] dl(\mathbf{x}). \quad (4.49)$$

con \mathbf{x}_0 interno al dominio \mathcal{D} .

$$\frac{1}{2}w(\mathbf{x}_0) = \int_C w(\mathbf{x})[\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)] dl(\mathbf{x}) - \int_C G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)[\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla w(\mathbf{x})] dl(\mathbf{x}). \quad (4.50)$$

con \mathbf{x}_0 sul contorno \mathcal{C} del dominio.

E' necessario utilizzare la (4.50) per trovare tutte le incognite sul contorno, successivamente si userà la (4.49) per trovare il campo di moto all'interno del dominio. Discretizzando gli integrali della (4.50) come in precedenza e ponendo $\mathbf{n} \cdot \nabla w = w_n$ si ottiene:

$$\frac{1}{2}w(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^{NE} \int_{E_k} w^k [\mathbf{n} \cdot \nabla G] dl - \sum_{k=1}^{NE} \int_{E_k} G w_n^k dl. \quad (4.51)$$

L'equazione integrale di Laplace è scalare e quindi di più facile interpretazione, non avendo indici e non dovendo applicare la notazione di Einstein. Scegliendo le stesse trasformazioni ed approssimando le variabili con un modello di approssimazione di funzione di tipo lineare uguale a quello utilizzato per Stokes, la (4.51) assumerà la seguente forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}w(\mathbf{x}_0) = & \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^1 h_s h_\xi [\psi_1 w^k + \psi_2 w^{k+1}] \{ [\psi_1 \mathbf{n}^k + \psi_2 \mathbf{n}^{k+1}] \cdot \nabla G \} d\xi - \\ & + \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^1 h_s h_\xi G [\psi_1 w_n^k + \psi_2 w_n^{k+1}] d\xi. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Il prodotto scalare tra la normale e il gradiente di G può essere scritto sotto forma di somma, diventa così:

$$\psi_1 \left[n_x^k \frac{\partial G}{\partial x} + n_y^k \frac{\partial G}{\partial y} \right] + \psi_2 \left[n_x^{k+1} \frac{\partial G}{\partial x} + n_y^{k+1} \frac{\partial G}{\partial y} \right], \quad (4.53)$$

cioè la somma di quattro elementi che si conoscono avendo a disposizione i coefficienti delle splines. Da questo punto in poi si indicherà questa somma con G_n . Dall'integrale di primo livello $\int_{-1}^1 h_s h_\xi G [\psi_1 w_n^k + \psi_2 w_n^{k+1}] d\xi$ si possono portare fuori dall'integrale i termini costanti, cioè w_n^k e w_n^{k+1} che sono calcolati sui nodi estremi all'elemento E_k preso in considerazione, si ottiene:

$$\begin{aligned} I^k &= \int_{-1}^1 h_s h_\xi G [\psi_1 w_n^k + \psi_2 w_n^{k+1}] d\xi = \\ &= w_n^k \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 G d\xi + w_n^{k+1} \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 G d\xi. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Si definiscono così due coefficienti calcolati al nodo k :

$$C_1^k = \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 G d\xi, \quad C_2^k = \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 G d\xi. \quad (4.55)$$

Per l'integrale di secondo livello $\int_{-1}^1 h_s h_\xi [\psi_1 w^k + \psi_2 w^{k+1}] d\xi$ il procedimento è analogo: portando fuori dall'integrale i termini costanti w^k e w^{k+1} :

$$\begin{aligned} D^k &= \int_{-1}^1 h_s h_\xi [\psi_1 w^k + \psi_2 w^{k+1}] d\xi = \\ &= w^k \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 G_n d\xi + w^{k+1} \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 G_n d\xi. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Anche in questo caso si definiscono i due coefficienti:

$$C_1^k = \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_1 G_n d\xi, \quad C_2^k = \int_{-1}^1 h_s h_\xi \psi_2 G_n d\xi. \quad (4.57)$$

Rispetto al caso di Stokes, il numero di integrali da risolvere è diminuito.

Per ogni nodo centrale, e quindi non estremo al pannello, bisogna calcolare non più otto ma due integrali.

Tenendo conto delle condizioni al contorno su ogni pannello si costruisce, come per il caso di Stokes, la matrice delle incognite di dimensioni $NC \times NC$:

$$\begin{bmatrix} C_1^{1,1} & C_2^{1,1} + C_1^{1,2} & \dots & C_2^{1,k} + C_1^{1,k+1} & \dots & C_2^{1,NC} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_1^{m,1} & C_2^{m,1} + C_1^{m,2} & \dots & C_2^{m,k} + C_1^{m,k+1} & \dots & C_2^{m,NC} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_1^{NC,1} & C_2^{NC,1} + C_1^{NC,2} & \dots & C_2^{NC,k} + C_1^{NC,k+1} & \dots & C_2^{NC,NC} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Ai termini diagonali della matrice, con condizione al contorno di Neumann bisogna aggiungere il coefficiente che compare a sinistra della (4.50), cioè $\frac{1}{2}$.

Dopo aver assemblato la matrice \mathbf{C} dei coefficienti delle incognite, bisogna definire il vettore \mathbf{b} dei termini noti.

Il vettore si compone di tutti i termini noti derivati dalle condizioni al contorno, ogni elemento è costituito dalla somma algebrica di tutti i termini noti che fanno parte della m -esima equazione.

Per questa somma i termini w_n^k , w_n^{k+1} , w_n^k e w_n^{k+1} sono costanti e conosciuti.

Si ottiene un sistema di NC equazioni in NC incognite da cui è possibile ricavare il vettore delle incognite \mathbf{x} risolvendo il seguente sistema lineare:

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (4.59)$$

Una volta trovato il vettore \mathbf{x} delle incognite si hanno a disposizione tutti gli elementi necessari per poter risolvere la (4.49) e poter così ricavare il campo di moto. Discretizzando gli integrali della (4.49) si ottiene:

$$w(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^1 h_s h_\xi w^k [\mathbf{n} \cdot \nabla G] d\xi - \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^1 h_s h_\xi G w_n^k d\xi. \quad (4.60)$$

assumendo un modello lineare e introducendo i coefficienti di forma:

$$w(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^1 h_s h_\xi [\psi_1 w^k + \psi_2 w^{k+1}] \{[\psi_1 \mathbf{n}^k + \psi_2 \mathbf{n}^{k+1}] \cdot \nabla G\} d\xi - \\ + \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^1 h_s h_\xi G [\psi_1 w_n^k + \psi_2 w_n^{k+1}] d\xi. \quad (4.61)$$

Avendo a disposizione tutte le condizioni al contorno, è possibile risolvere l'equazione (4.61) per un punto arbitrario del dominio sommando i contributi integrali (4.54) e (4.56) di tutti gli elementi del contorno.

Capitolo 5

Validazione del codice e risultati

In questo capitolo finale saranno affrontati i seguenti punti:

1. validazione del codice, andando a confrontare i risultati ottenuti con risultati presenti nella letteratura esistente.
2. descrizione della geometria utilizzata per risolvere il problema: verranno analizzate in particolare le geometrie frattali andando a definire come vengono costruite.
3. calcolo delle altezze di protrusione per ogni geometria frattale: verrà verificata la diminuzione della resistenza fluidodinamica all'aumentare delle scanalature in piccola scala.
4. visualizzazione dei vari campi di moto legati alle geometrie frattali, utile per l'analisi del comportamento del flusso all'interno del dominio e per poter spiegare determinati fenomeni.

5.1 Validazione del codice

Dopo aver realizzato un codice, è importante, prima di effettuare delle simulazioni, assicurarsi che il codice sia effettivamente funzionante, che fornisca risultati coerenti dal punto di vista numerico e che sia in accordo con la letteratura esistente.

Uno dei metodi utilizzati per validare un codice è quello di scegliere un problema già risolto da altri studiosi, e confrontarli con i risultati ottenuti con il codice. Se i valori numerici coincidono o differiscono di pochi punti percentuali si può considerare validato il codice.

Per validare il codice di questa trattazione si utilizzeranno i risultati ottenuti in [11] [12] [13] considerando due profili $y_0 = f(x)$ delle protrusioni superficiali dati da:

- profilo parabolico, $y_0 = \frac{2s}{\pi}x^2 - 4sx$;
- profilo cosinusoidale, $y_0 = \pi s \cos(x) - \pi s$.

dove s un parametro compreso tra 0 e 1, correlato alla profondità del profilo, mentre x rappresenta l'ascissa e comprende 401 punti equidistanti tra loro nell'intervallo $(0, 2\pi)$. In figura 5.1 sono schematizzati i due profili. Entrambi hanno l'altezza uguale al periodo.

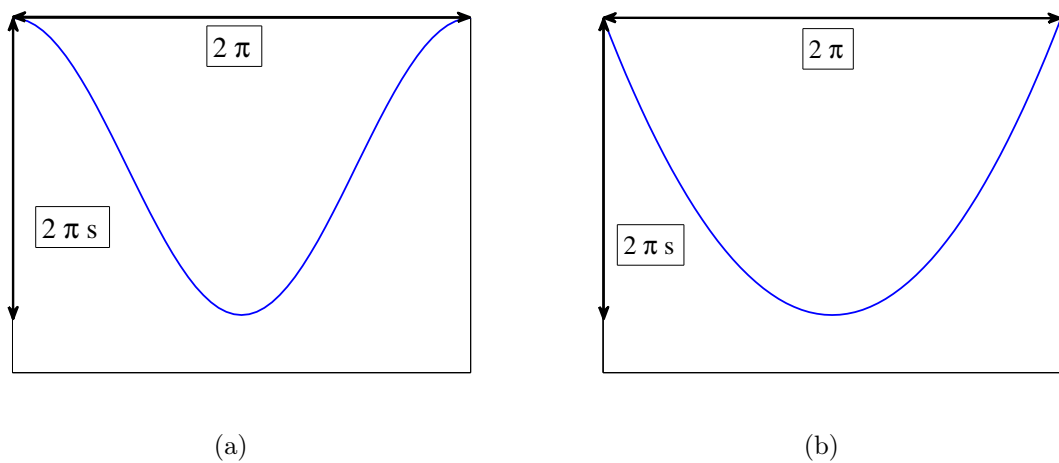


Figura 5.1: (a) profilo cosinusoidale; (b) profilo parabolico.

Il grafico in figura 5.2 mette in relazione le altezze di protrusione con s . Le curve rappresentate sono quelle ottenute in letteratura. Sovrapponendo i dati calcolati con i risultati ottenuti in letteratura, si ottengono errori inferiori al punto percentuale. In questo modo si può affermare che il codice è validato.

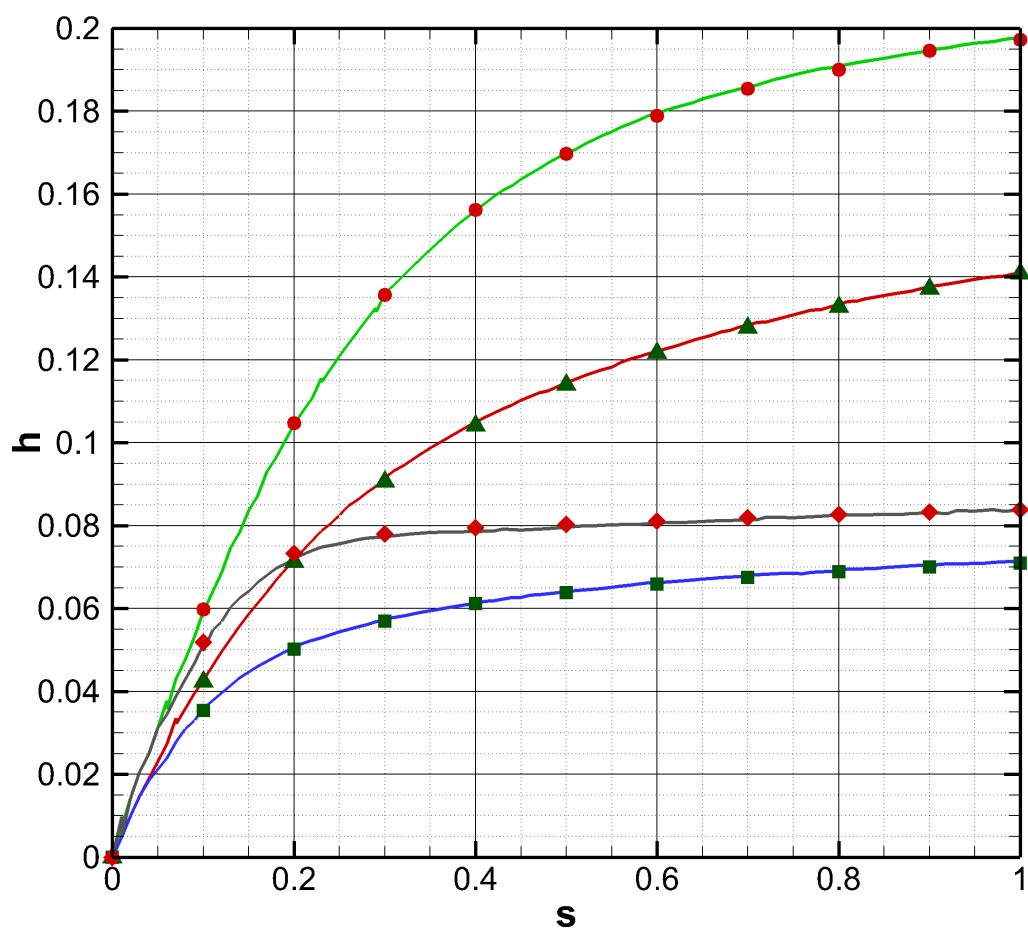


Figura 5.2: Curve di validazione:

altezze di protrusione parallele per profilo parabolico (curva **verde**);
 altezze di protrusione perpendicolari per profilo parabolico (curva **grigia**);
 altezze di protrusione parallele per profilo cosinusoidale (curva **rossa**);
 altezze di protrusione perpendicolari per profilo cosinusoidale (curva **azzurra**);
 i risultati ottenuti dal codice per il profilo parabolico (simboli rossi);
 i risultati ottenuti dal codice per il profilo cosinusoidale (simboli verdi).

5.2 Geometrie frattali

Un frattale è una geometria particolare dotata di omotetia interna, che si ripete nello stesso modo e nella stessa forma su scale diverse. E' il ripetersi sino all'infinito di uno stesso motivo su scala sempre più ridotta.

Le geometrie frattali che ci interessano in questa analisi sono le cosiddette *curve di Koch*. Saranno utilizzate infatti queste superfici nel codice numerico e saranno confrontati i vari risultati ottenuti in funzione della dimensione frattale che stiamo considerando.

Per generare la curva di Koch è necessaria una procedura ripetitiva riassunta dal seguente algoritmo:

1. si divide un segmento in tre parti congruenti
2. si elimina il segmento centrale e lo si sostituisce con due segmenti della stessa lunghezza del segmento sostituito in modo da formare un triangolo equilatero.
3. per ogni segmento generato si ripetono i passaggi.

Si ottiene così la prima geometria frattale, figura 5.3 e proseguendo con lo stesso algoritmo, si generano anche le altre dimensioni frattali, figure 5.4 e 5.5 .

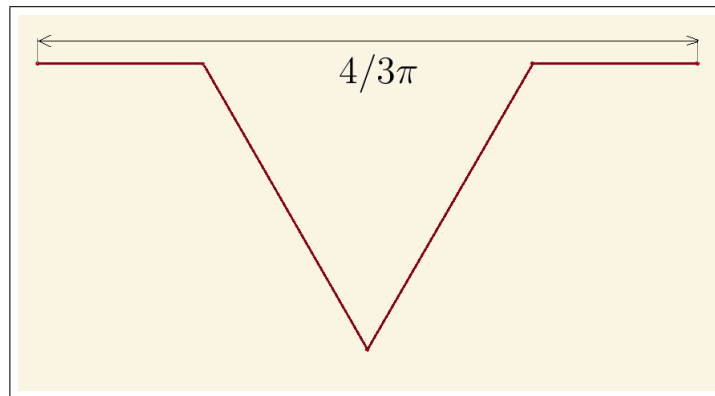


Figura 5.3: Prima geometria frattale.

Il codice scritto deve ricevere una serie di punti che poi andranno a delineare la geometria. I punti così inseriti verranno interpolati da un polinomio spline che definiranno la geometria discreta.

Per far questo si è utilizzato un CAD esterno, cioè un software che consente di far scegliere all'utente una geometria, disegnandola e definito il numero di punti di discretizzazione restituisce attraverso un file di testo una serie di punti che poi saranno letti con il codice scritto su piattaforma MATLAB.

Questo procedimento ci consente di aver pronta la geometria discretizzata in poco tempo e compatibile con il codice scritto.

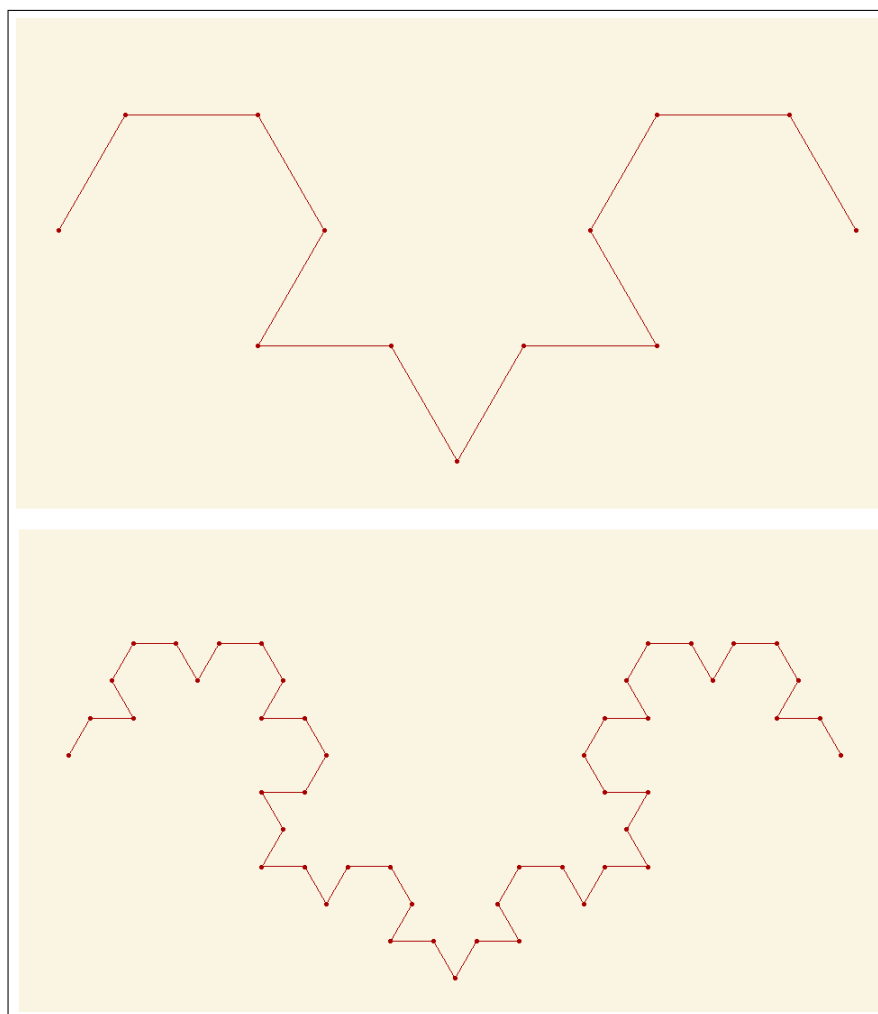


Figura 5.4: Seconda e terza geometria frattale.

Per il pannello superiore è stato utilizzato un numero di punti di discretizzazione pari a 40. Per tutti gli altri pannelli, cioè quelli inferiori, si è utilizzato un numero di punti di discretizzazione variabile e ciò servirà per andare a studiare la convergenza.

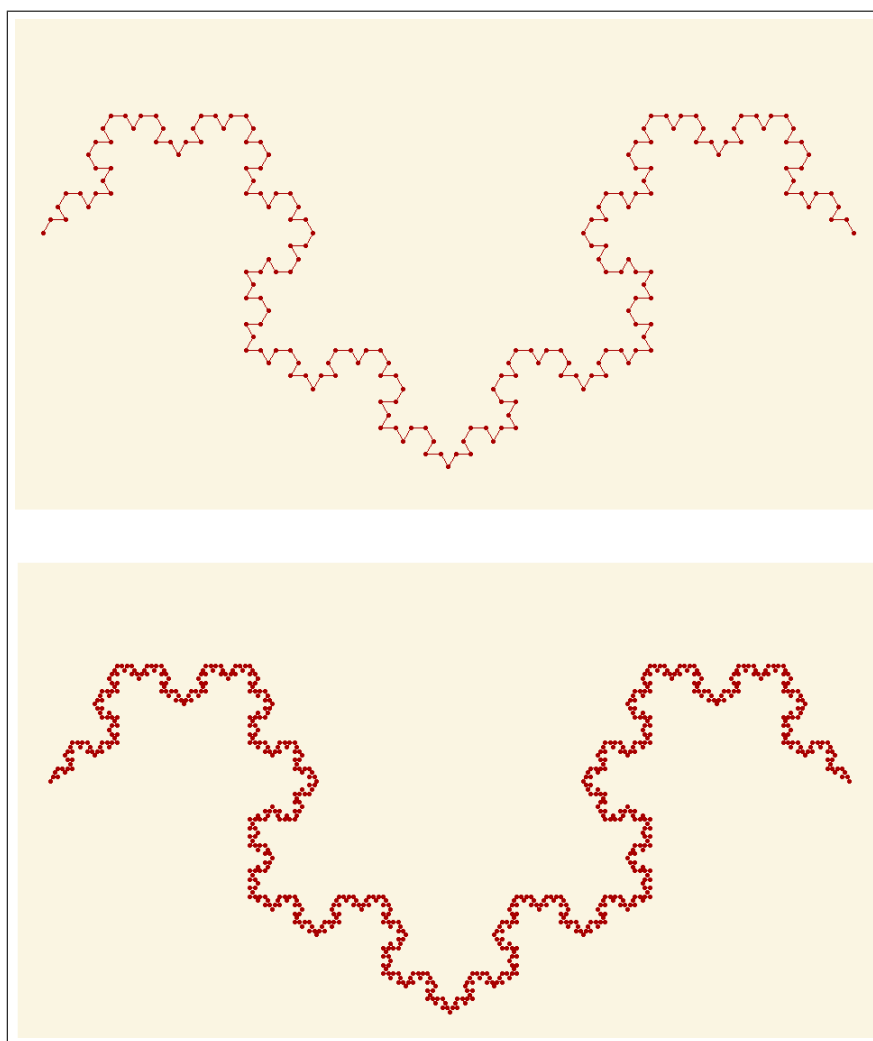


Figura 5.5: Quarta e quinta geometria frattale.

5.3 Calcolo delle altezze di protrusione

Nel capitolo 2 è data la definizione di altezza di protrusione, come calcolarla e da cosa dipende.

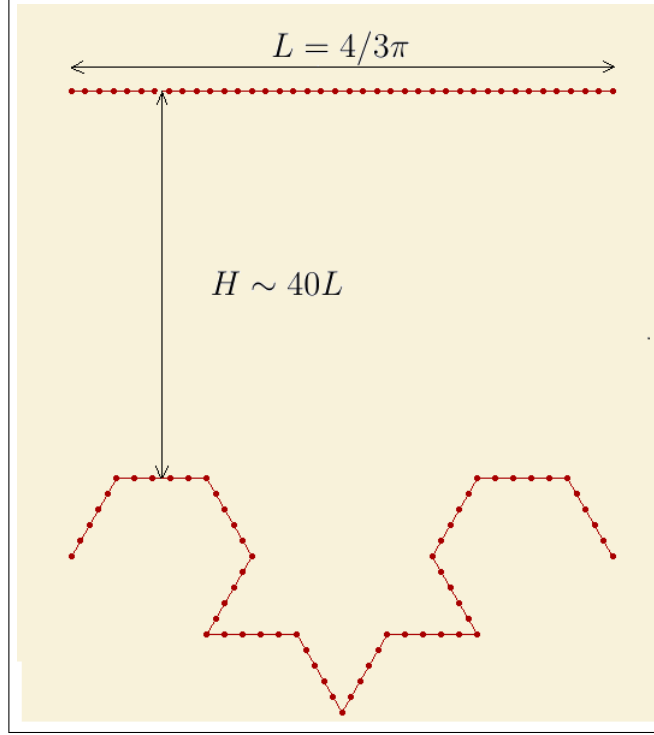


Figura 5.6: Geometria con contorno discreto.

Il pannello superiore, come mostrato in 5.6, dove si calcola la distribuzione di velocità deve essere posto ad una distanza y elevata rispetto alla lunghezza del profilo analizzato x . Questo per essere sicuri che gli effetti causati dalla vicinanza del fluido dalla parete non vadano a disturbare la distribuzione delle componenti di velocità U_m e W_m , andando a calcolare in modo sbagliato l'altezza di protrusione. Avendo usato funzioni di Green periodiche non è necessaria l'integrazione sui pannelli laterali che non vengono quindi contati.

Per il calcolo delle altezze di protrusione non è necessario conoscere le componenti delle velocità sul dominio, è indispensabile invece conoscere le velocità sul pannello superiore e questo è possibile utilizzando la *boundary integral equation* sul contorno \mathcal{C} andando così a ricavare le velocità incognite.

L'altezza di protrusione *parallela* si ricava risolvendo con il codice la *boundary integral equation* di Laplace, trovando così la distribuzione delle velocità w :

$$h_{\parallel} = \frac{W_m - H}{L} \quad (5.1)$$

Analogamente con il codice che risolve la *boundary integral equation* di Stokes si ricava la distribuzione di velocità u , calcolando così l'altezza di protrusione *perpendicolare*:

$$h_{\perp} = \frac{U_m - H}{L} \quad (5.2)$$

con i valori medi W_m , U_m in forma discreta, definendo con N il numero di nodi sul pannello superiore :

- $W_m = \frac{\sum_{k=1}^N w_k}{N}$
- $U_m = \frac{\sum_{k=1}^N u_k}{N}$

Per questo problema si è utilizzando un profilo simmetrico di lunghezza $L = \frac{4}{3}\pi$ con un'altezza $H \simeq 40L$.

Per ogni singolo pannello inferiore si è utilizzato un numero di discretizzazione variabile. Questo è necessario per andare a studiare la convergenza delle altezze di protrusione per ogni dimensione frattale, trovando così un valore asintotico che può essere considerato di riferimento.

Sono riportati due grafici rispettivamente a sinistra nelle figure 5.7 e 5.8 derivati dallo studio di convergenza, parallelo e perpendicolare, riferite alla seconda geometria frattale. Si nota un aumento della precisione di calcolo all'aumentare del numero di punti di discretizzazione per pannello.

Sono riportati rispettivamente a destra nelle figure 5.7 e 5.8 i grafici semi-logaritmici che rappresentano la variazione dell'errore relativo al valore asintotico rispetto al numero di punti di discretizzazione, sempre per la seconda geometria frattale. Con errore si intende il distacco del valore preso in considerazione (h) e il valore asintotico preso come riferimento (h_a). L'errore è calcolato nel seguente modo:

$$errore = \frac{|h - h_a|}{h_a} \quad (5.3)$$

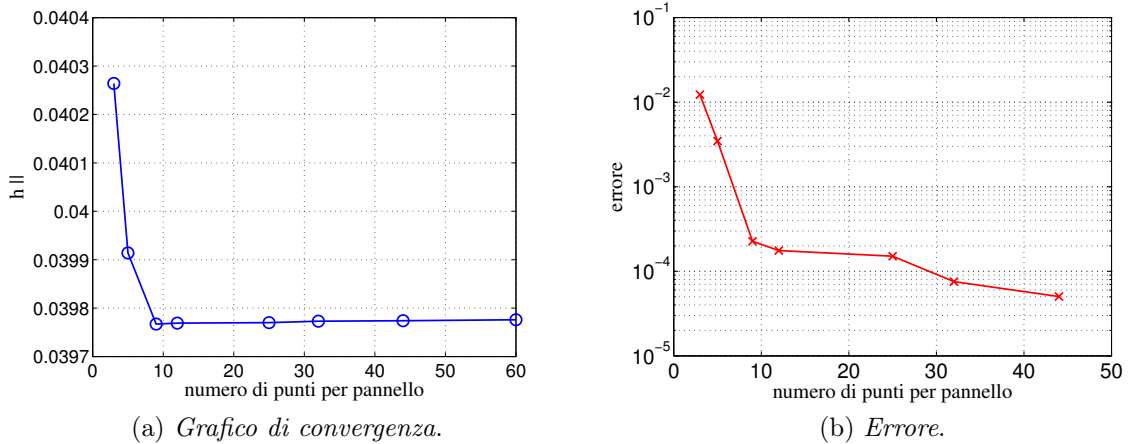


Figura 5.7: Studio di convergenza per altezza di protrusione parallela

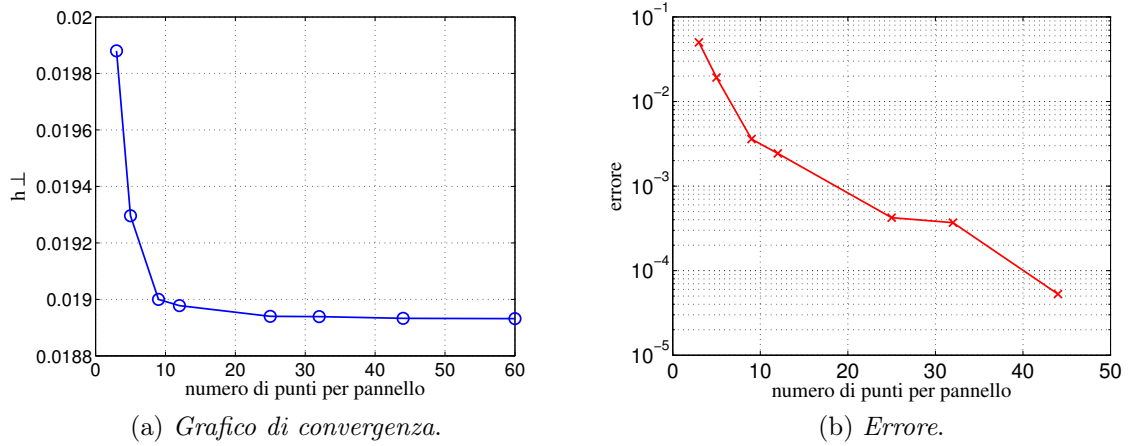


Figura 5.8: Studio di convergenza per altezza di protrusione perpendicolare

Fatte le analisi di convergenza per ogni geometria frattale, si ottengono dei valori asintotici delle altezze di protrusione. Il valore asintotico viene selezionato quando all'aumentare del numero di discretizzazione il valore dell'altezza di protrusione non varia, o varia di pochi punti percentuali.

I risultati ottenuti per le varie geometrie frattali sono riportati in figura 5.9:

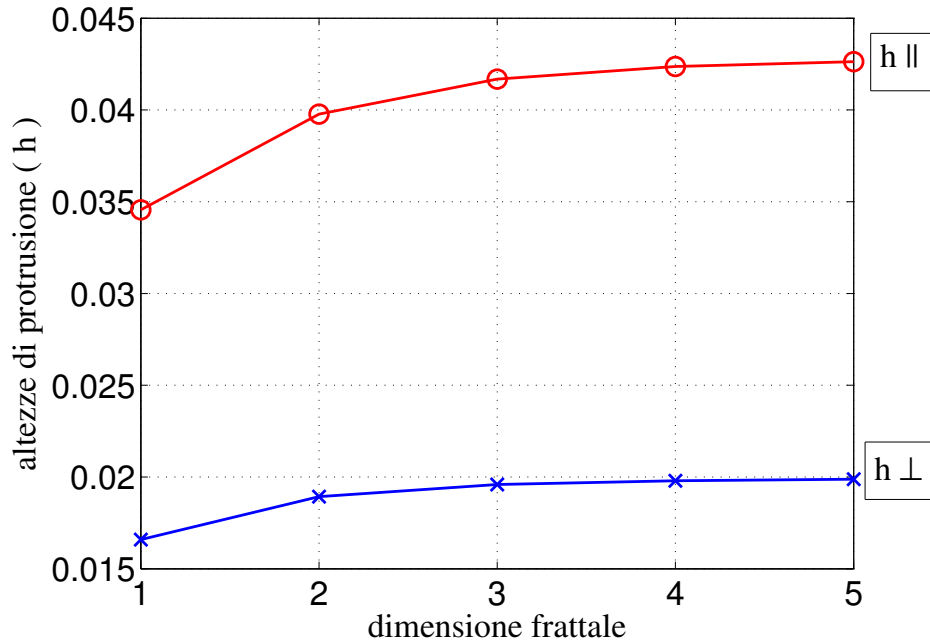


Figura 5.9: Altezze di protrusione per le cinque dimensioni frattali

Il grafico 5.9 rappresenta l'altezza di protrusione al variare della dimensione frattale:

- la curva **rossa** rappresenta l'altezza di protrusione parallela.
- la curva **blu** rappresenta l'altezza di protrusione perpendicolare.

Si nota un aumento dell'altezza di protrusione fino ad un valore convergente alla quinta geometria frattale.

Nella tabella che segue sono riportati i valori numerici di tali altezze di protrusione sia per il caso parallelo che perpendicolare.

dimensione frattale	altezza di protrusione \parallel	altezza di protrusione \perp
Case 1	0.034561	0.01659
Case 2	0.039776	0.018932
Case 3	0.041684	0.019591
Case 4	0.042368	0.019794
Case 5	0.042633	0.019881

Tabella 5.1: Altezze di protrusione.

Siccome la riduzione di attrito dipende dalla differenza tra le due altezze di protrusione, $\Delta h = h_{\parallel} - h_{\perp}$, tale valore viene riportato in figura 5.10.

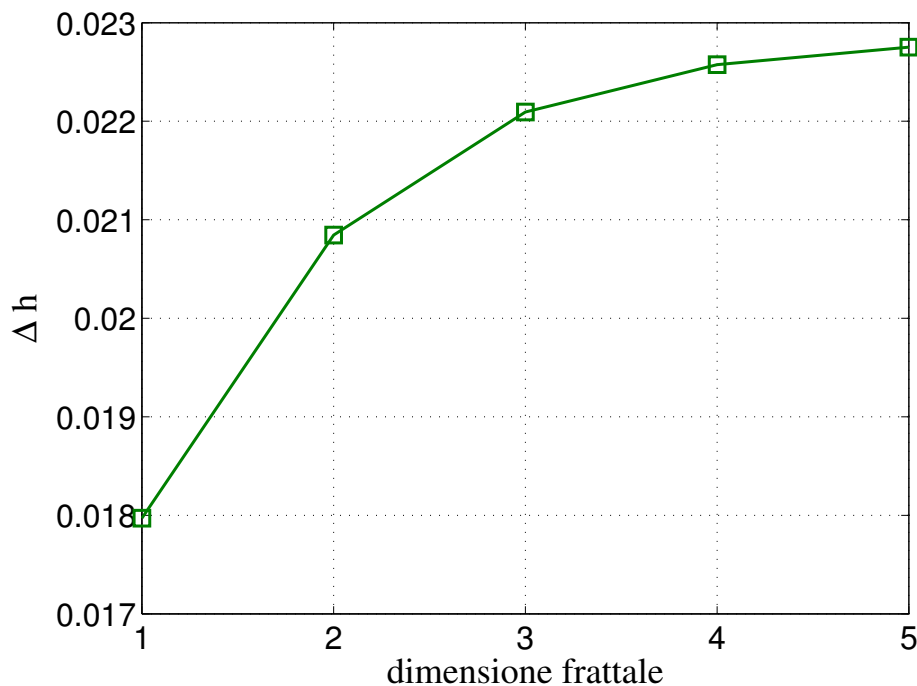


Figura 5.10: Δh in funzione della dimensione frattale.

La figura mostra che, all'aumentare della complessità topografica della superficie, ci si deve aspettare un miglioramento per quanto riguarda la capacità della parete di ridurre l'attrito viscoso.

5.4 Campi di moto

Utilizzando il codice scritto si risolve la *boundary integral equation* all'interno del dominio \mathcal{D} . Sono richiamate le equazioni utilizzate:

$$u_j(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi\mu} \int_C G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) f_i(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi} \int_C u_i(\mathbf{x}) T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) n_k(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) \quad (5.4)$$

è l'equazione integrale di Stokes (5.4) con la quale si determinano le componenti delle velocità u e v nel piano (x, y) .

$$w(\mathbf{x}_0) = \int_C w(\mathbf{x}) [\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)] dl(\mathbf{x}) - \int_C G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) [\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla w(\mathbf{x})] dl(\mathbf{x}) \quad (5.5)$$

è l'equazione integrale di Laplace 5.5 con la quale si ricava la componente della velocità w nel piano (x, y) .

I campi di moto sono utili perché la mappatura delle velocità all'interno del dominio aiuta a spiegare l'aumento dell'altezza di protrusione all'aumentare della dimensione frattale.

La griglia di punti rappresentata nella figura 5.11 ha lo scopo di identificare una serie di punti all'interno del dominio \mathcal{D} ; per ciascuno di essi vengono calcolate le componenti del vettore velocità usufruendo delle equazioni (5.4) e (5.5).

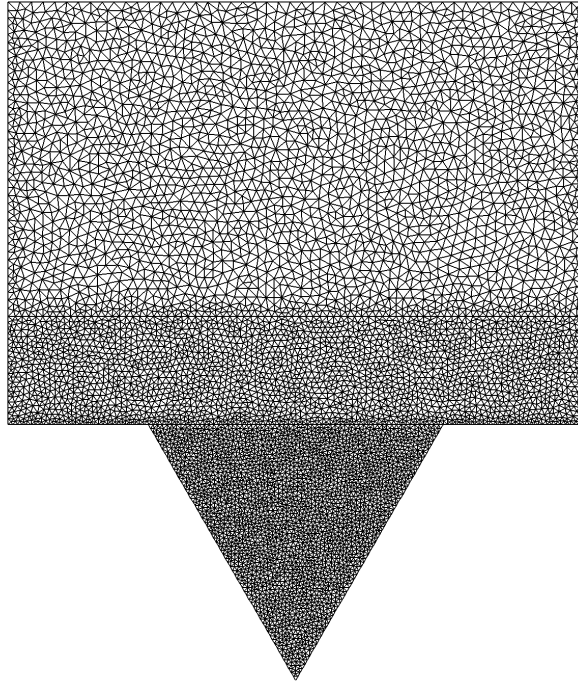


Figura 5.11: Griglia interna per la prima dimensione frattale.

Per creare la griglia interna è stato utilizzato un CAD che consente di far scegliere all'utente il contorno del dominio desiderato e un numero di discretizzazione che indica in quanti sottoparti deve essere suddiviso il contorno. Il CAD restituisce una griglia e la finitura dipenderà da quanti punti di discretizzazione si è scelto. Più è alto il numero e più sarà fitta ed efficace la griglia interna. Una griglia fitta è più efficace perché ha più punti all'interno, e per ogni punto il codice calcola le componenti di velocità ottenendo così una risoluzione migliore.

Per tutte le geometrie si è fatto in modo che la griglia interna risultasse più fitta nella vicinanza delle scanalature, dove è più importante avere una buona definizione e quindi poter osservare più attentamente le componenti di velocità del fenomeno.

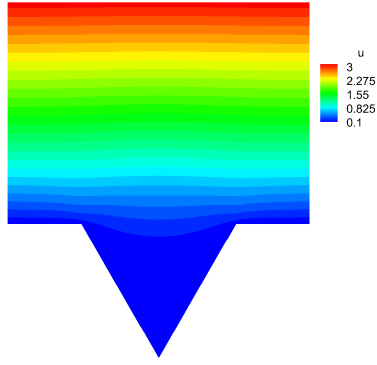
Si è scelto per questo caso una griglia *triangolare*. Una griglia triangolare non ha la caratteristica di distribuire i punti in modo omogeneo all'interno del dominio come invece avviene per una griglia quadrata.

Una griglia triangolare può dare problemi applicata al *metodo ai volumi finiti*: una diversa distribuzione di punti all'interno del dominio può provocare un aumento dell'errore, che si trasmette da punto a punto all'interno del dominio stesso.

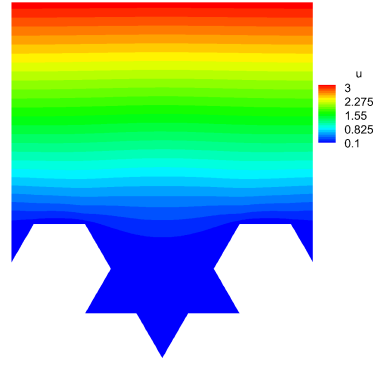
Utilizzando il BEM non ha importanza la distribuzione dei punti all'interno del dominio: ogni calcolo delle componenti di velocità è indipendente dall'altro e dipende solo dalle grandezze sul contorno.

Il visualizzatore approssima linearmente i valori tra due punti vicini. La griglia utilizzata è composta da quasi 15000 punti, di cui circa 10000 nella zona prossima alla parete per i motivi prima citati.

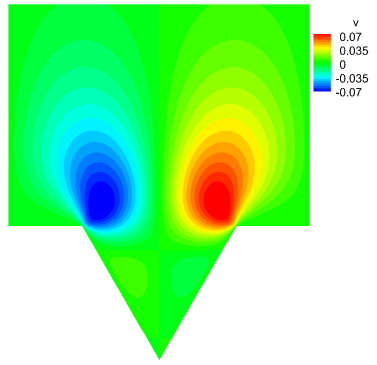
Nelle figure 5.12 e 5.13 sono schematizzati i vari campi di moto per le prime quattro geometrie frattali.



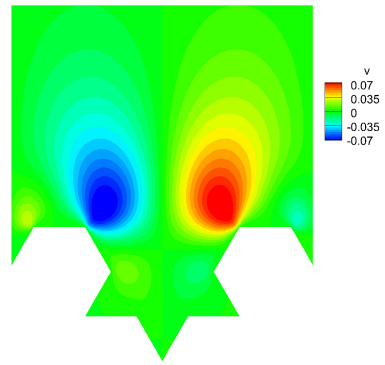
(a)



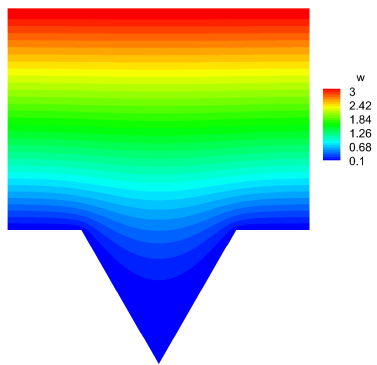
(b)



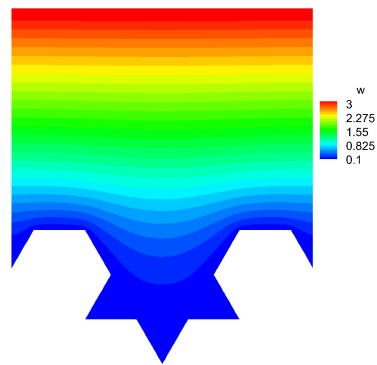
(c)



(d)

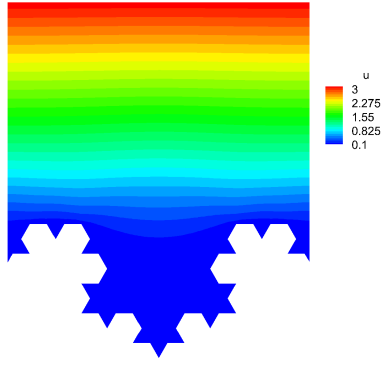


(e)

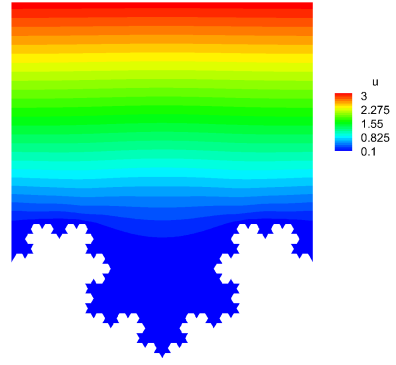


(f)

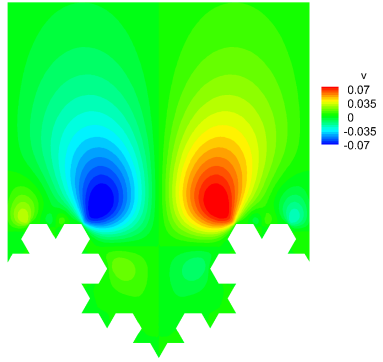
Figura 5.12: Componenti u , v e w per la prima dimensione frattale (sinistra) e per la seconda (destra).



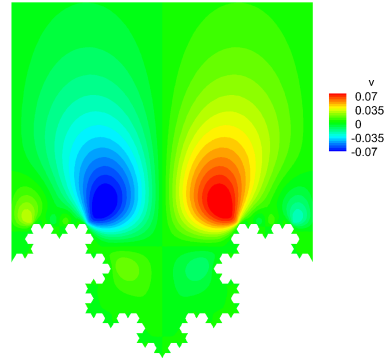
(a)



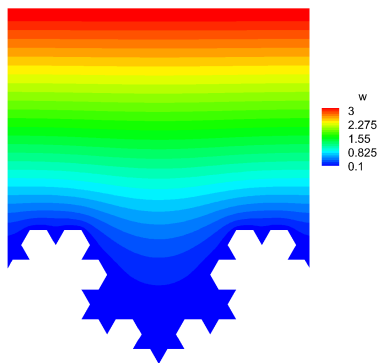
(b)



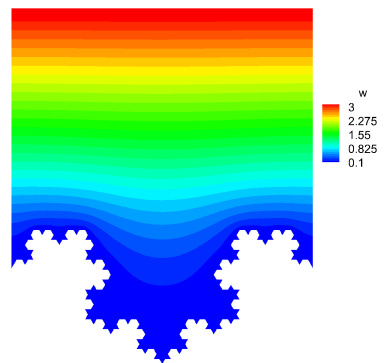
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 5.13: Componenti u , v e w per la terza dimensione frattale (sinistra) e per la quarta (destra).

Uno dei fenomeni che caratterizza il campo di moto all'interno di una scanalatura, dove vige l'approssimazione di Stokes, è la presenza di ricircoli chiamati *corner eddies*, studiati per la prima volta da Moffat [18].

Questi ricircoli che si vengono a generare, sono teoricamente infiniti, diventando sempre più piccoli come dimensione all'aumentare della profondità delle scanalature.

In pratica non risulta possibile visualizzare tutti i corner eddies relativi ad una protrusione utilizzando un codice numerico: solo costruendo una griglia con maglie molto fitte in prossimità della parete si riesce a visualizzare qualche fenomeno di ricircolo. All'interno di ogni scanalatura si vengono a generare questi fenomeni di ricircolo, di dimensione proporzionale alla grandezza della rientranza.

In figura 5.14 sono rappresentate le linee di corrente per la prima e seconda geometria frattale, mettendo in luce i vortici di Moffat.

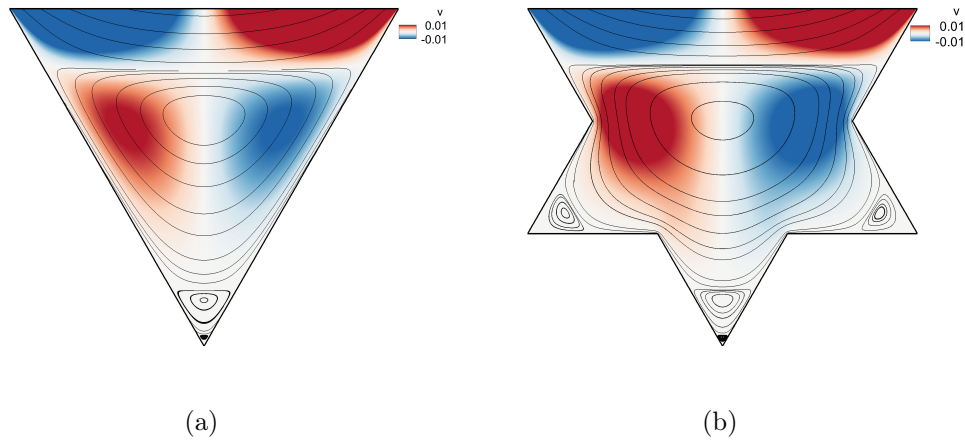


Figura 5.14: (a) Linee di corrente per prima geometria frattale; (b) Linee di corrente per seconda geometria.

Dai campi di moto della componente v visualizzati nelle figure 5.12 e 5.13 appare evidente un moto discendente e uno ascendente del flusso, che si genera in prossimità delle scanalature.

Essendo il fenomeno in scala con la dimensione della geometria, questo effetto appare più evidente per la scanalatura centrale dal momento che è la più grossa.

Dai campi di moto u e w viene evidenziato che questi moti ascendenti e discendenti spostano il profilo delle velocità u e w verso l'interno della protrusione, e considerato il fenomeno dal punto di vista macroscopico, si nota che la linea fittizia lungo la quale le velocità si annullano rimane al di sotto della superficie del profilo. Di conseguenza l'altezza di protrusione aumenta provocando una diminuzione della resistenza fluidodinamica.

Dai campi di moto u e w è inoltre osservabile il comportamento lineare deformato dalla scanalatura. La condizione di adesione vincola a 0 le componenti delle velocità a parete: all'aumentare dell'altezza y tali componenti aumentano in maniera lineare.

Capitolo 6

Conclusione

Negli ultimi decenni la resistenza fluidodinamica all'interno del substrato turbolento è diventata un'importante area di ricerca nell'ambito fluidodinamico.

In modo particolare la tecnica che utilizza superficie scanalate di tipo "*riblets*", oggetto principale di questa trattazione, rappresenta una metodologia particolarmente attrattiva e semplice, anche se poco intuitiva come è stato evidenziato all'inizio della trattazione.

E' una tecnica molto attuale in quanto correlata alle problematiche di risparmio energetico della nostra epoca.

Anche se questa metodologia conduce a riduzioni della resistenza fluidodinamica comunque inferiore al 10 %, il contributo globale nell'ambito di risparmio di combustibile e quindi di risparmio energetico è comunque sostanziale. Attualmente esistono applicazioni nel settore aerospaziale, nel trasporto aereo, in campo navale (navi e sommergibili), in campo automobilistico, nel settore del trasporto ferroviario, nel settore energetico (pale eoliche ad esempio), nel settore relativo al convogliamento di fluidi (tubazioni che trasportano, combustibili, acqua, olio, gas, ecc).

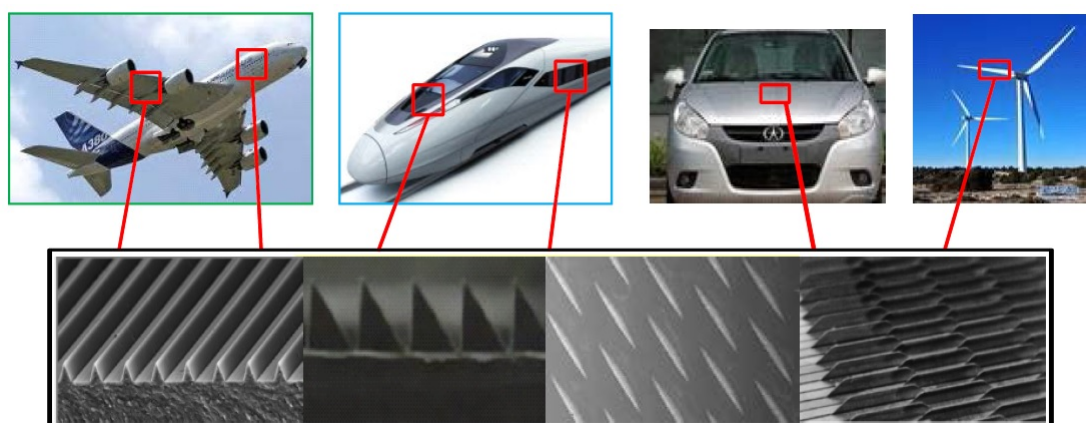


Figura 6.1: Applicazioni attuali di riblet

Con questo lavoro è stata data evidenza degli ulteriori benefici, in termini di resistenza fluidodinamica, che si possono ottenere nel momento in cui si scompone una

scanalatura di tipo "semplice", come potrebbe essere una superficie scanalata a V, in una scanalatura a geometria "complessa" come può essere considerata una geometria frattale.

Per un'analisi qualitativa del fenomeno si sono osservati i vari campi di moto ottenuti e descritti al cap.5.

Dai grafici si deduce infatti quanto segue: più la geometria frattale è complessa, più il relativo profilo di velocità longitudinale è traslato verso la parete, maggiore sarà l'altezza di protrusione e di conseguenza minore sarà la resistenza fluidodinamica.

Per un'analisi quantitativa del fenomeno si richiama il parametro Δh definito come differenza tra l'altezza di protrusione parallela e quella perpendicolare.

Prendendo in considerazione alcune conclusioni degli studi di Luchini, Manzo e Pozzi [13], Δh fornisce una rappresentazione di quanto la superficie corrugata ostacola il flusso trasversale rispetto a quello longitudinale, ed è il parametro principale responsabile del comportamento turbolento del substrato viscoso.

Richiamando inoltre i valori dalla tabella 5.1, sono calcolati i valori di Δh per le varie dimensioni frattali: i valori di Δh sono riportati nella tabella 6.1 che segue:

dimensione frattale	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
Δh	0.017971	0.020844	0.022093	0.022574	0.022752

Tabella 6.1: Δh per le varie dimensioni frattali

Come si nota dalla tabella, espressa in forma grafica in figura 5.10, il Δh della dimensione frattale 5 è incrementato rispetto alla dimensione frattale 1 di circa il 20%: questo si traduce teoricamente in una sostanziale diminuzione della resistenza fluidodinamica.

6.1 Sviluppi futuri

Negli ultimi anni si sono sviluppate teorie per ottenere superficie idrofobiche: l'idrofobicità è definita come capacità di un certo materiale di respingere l'acqua: essa è dovuta a particolari proprietà fisiche/chimiche della superficie di contatto materiale-acqua.

La capacità di una superficie di respingere l'acqua è utilizzata per ridurre la resistenza fluidodinamica. Quando questa capacità diventa molto accentuata si comincia a parlare di superfici **Super-Idrofobiche(SH)**.

Le proprietà dei materiali SH sono studiate in molti centri di ricerca per il loro possibile utilizzo in applicazioni idrodinamiche in cui è fondamentale ridurre l'attrito: l'esempio tipico il campo navale, con possibilità di applicare particolari rivestimenti innovativi sulla chiglia delle imbarcazioni, con sostanziale abbattimento di carburante stimabile fino al 40%. Se all'interno delle rugosità di una superficie è intrappolata dell'aria, in modo tale da diminuire la superficie di contatto solido-liquido, può essere ottenuta una

superficie SH.

A seconda del tipo di scanalatura rettangolare, come in figura 6.2, si ottengono diverse configurazioni aria-liquido.

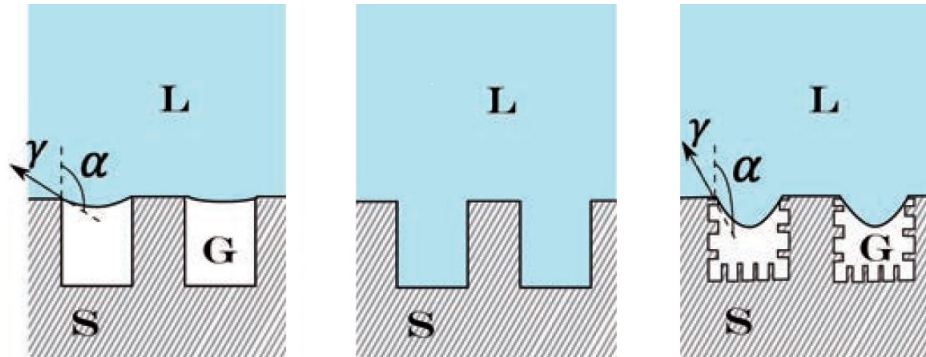


Figura 6.2: Superficie idrofobiche: configurazioni solido-acqua-aria

La figura di sinistra rappresenta una superficie scanalata con rugosità microstrutturata mentre la figura di destra la medesima configurazione con rugosità micro-nanostrutturata.

Anche in questo caso si nota che, più la superficie è di tipo "complesso" (figura di destra), minore è la resistenza fluidodinamica.

In conclusione, utilizzando le potenzialità della nanotecnologia applicata ai materiali, la possibilità di realizzare superficie di tipo "complesso", assimilabili a geometrie frattali, può essere sicuramente approfondita e ampliata in un immediato futuro: il tutto finalizzato a riduzioni ulteriori dei fenomeni di resistenza dei fluidi e di conseguente risparmio energetico.

Bibliografia

- [1] Bushnell D.M. Turbulent drag reduction for external flows. *AIAA 21 st Aerospace Scienze meeting, Reno, Nevada, AIAA Paper 83-0227*, 1983.
- [2] Trigui N & Guezennec Y. G. Turbulence modification by large eddy breakup devices in a passively heated turbulent boundary layer. *ASME forum on Turbulent Flows, Toronto 4-7 June 1990*, vol.FED-94, pp.17-22, 1990.
- [3] Preziosi L., Chen K. & Joseph D.D., Lubricated pipelining: stability of core-annular flow. *J. Fluid Mech*, vol.201, pp.323-356, 1989.
- [4] Burdak V.D. Function of the ctenoid apparatus of fish in the presence of a turbulent boundary layer. *Zool. Zh*, vol.48, pp.1053-1055, 1969.
- [5] Chernyshov O.B. & Zayets V.A. Some peculiarities of the structure of the skin of sharks. *Hydrodynamics problems of Bionics*, vol.4, pp.77-83, 1970.
- [6] Bechert D.W., Hoppe G. & Reif W.E. On the drag reduction of the shark skin. *AIAA 21 st Aerospace Scienze meeting, Reno, Nevada, AIAA Paper*, 85-0546, 1985.
- [7] Sawyer W.G. & Winter K.G. An investigation of the effect on turbulent skin friction of surface with streamwise grooves. *Proc. Turbulent Drag Reduction by Passive Means R. Aero Soc. London 15-17 Sept 1987*, vol.1, p 330, 1987.
- [8] Choi K.S. Test of the drag reducing riblet on a one-third scale racing yacht. *Proc. Turbulent Drag Reduction by Passive Means R. Aero Soc. London 15-17 Sept 1987*, 1987.
- [9] Walsh M.J. Effect of detailed surface geometry on riblet drag reduction performance. *Journal of Aircraft*, vol.27, pp.572-573, 1990.
- [10] Walsh M.J. Riblet as a viscous drag reduction technique. *AIAA Journal*, vol.21, pp.485-486, 1983.
- [11] Beckert, D.W. & Bartenwerfer M. The viscous flow on surface with longitudinal ribs. *J.Fluid Mech*, vol.206, pp.105-129, 1989.

- [12] Baron A, Quadrio M. & Vigevano L. Riduzione della resistenza di attrito in correnti turbolente e altezza di protrusione di pareti scanalate. *Proc. X AIDAA Conf. Pisa 16-20 October 1989*, pp.92-100, 1989.
- [13] Luchini P., Manzo F. & Pozzi A. Resistance of a grooved surface to parallel flow and cross-flow. *Journal of Fluid Mechanics*, vol.228, pp.87-109, 1991.
- [14] Saravi S.S. & Cheng K. A review of drag reduction by riblet and micro-texture in the turbulent boundary layers. *European Scientific Journal*, vol.9, pp.62-80, 2013.
- [15] Saravi S.S. An investigation on design and analysis Micro-Structured surfaces with application to friction reduction. *School of Engineering and Design, Brunel University*, pp.33-45, 2014.
- [16] Pozrikidis C. Boundary Integral & Singularity Methods for Linearised Viscous Flow. *Cambridge University Press*, pp.1-73, 1992.
- [17] Lorenz H.A. Lorenz reciprocal relation. *Journal of Engineering Mathematics 1996*, vol.30, 1996.
- [18] Moffat H.K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner. *Journal of Fluid Mechanics*, vol.18, pp.1-18, 1964.
- [19] Alessandro Bottaro. Superhydrophobic surfaces for drag reduction. *Istituto Lombardo-Accademia di Scienze e Lettere-Rendiconti di Scienze*, vol.148, 2014.
- [20] Cengel Y.A., Cimbala J.M. Giuseppe Cozzo, Cinzia Santoro. Fluid Mechanics: Fundamental and applications. *McGraw-Hill Companies*, pp.437-606, 2010.
- [21] Quarteroni A., Saleri F., Gervasio P. Calcolo Scientifico - esercizi e problemi risolti con Matlab e Octave. *Springer*, pp.81-129, 2012.