



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

TRANSIZIONE ALLA TURBOLENZA  
NELLO STRATO LIMITE  
SU UNA LASTRA PIANA

RELATORE:

CHIAR.MO PROF. ALESSANDRO BOTTARO

CORRELATORE:

DOTT. HÅKAN WEDIN

ALLIEVO:

NORMAN LUCA

Tesi per il conseguimento della Laurea Triennale

in

INGEGNERIA MECCANICA

Anno Accademico 2009/2010

Settembre 2011

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA

## *Thesis Abstract*

### TRANSITION TO TURBULENCE IN THE BOUNDARY LAYER OVER A FLAT PLATE

The transition from a laminar flow to a turbulent flow rised high interest and curiosity among the scientists due to the various scientific and industrial consequences involved and the enormous difficulty to mathematically express the phenomenon of turbulence. In order to understand how the transition occurs, we have to imagine that a laminar flow becomes subject to external disturbances that grow in space and/or time and give rise to perturbations so that the laminar state is no longer stable. This thesis has the purpose to numerically find the nonlinear solutions that may be connected to the process of transition, namely to examine the stability of a laminar flow within the boundary layer over a flat plate.

Having defined the equations governing a fluid in motion and the relevant computational domain, the first phase of this study started by taking inspiration from a similar survey carried out earlier by Henningson with the purpose to characterize the linear stability analysis, considering that the amplitudes of the perturbations are infinitesimal. The first results show a representation of the modulus and eigenfunctions for both 2D and 3D disturbances and, at the same time, they validate the linear code in use. The results also correspond to the neutral stability curves for both 2D and 3D disturbances. These curves separate the region of stability from the instability of a flow.

In the second phase, having considered the neutral stability curve for two-dimensional disturbances and having selected a linear solution as a starting point, non-linear solutions called Travelling Wave Solutions were consequently found. The results gave evidence that for wavelengths, in a direction parallel to the flow smaller than the critical one, the bifurcation is supercritical while for higher values the bifurcation is subcritical. This fact demonstrates that, in case of subcritical bifurcation, finite amplitude disturbances can activate the process of flow transition even before reaching the critical point of the linear stability.

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA

## *Prefazione*

### TRANSIZIONE ALLA TURBOLENZA NELLO STRATO LIMITE SU UNA LASTRA PIANA

La transizione di un flusso da regime laminare ad uno turbolento ha suscitato molto interesse e curiosità fra gli scienziati, sia per la molteplicità dei campi scientifici ed industriali su cui si inserisce, sia per l'enorme difficoltà nell'esprimere matematicamente il fenomeno della turbolenza. Per rendere l'idea di come avviene la transizione si immagini che all'interno delle correnti laminari entrino dei disturbi esterni che, crescendo nello spazio e/o nel tempo, diano origine a delle perturbazioni rispetto alle quali la corrente laminare non è più stabile: si ha quindi la transizione da corrente laminare a corrente turbolenta. Questa tesi ha come finalità quella di trovare numericamente le soluzioni non lineari che possono causare la transizione, esaminando la stabilità di un flusso laminare all'interno dello strato limite sopra una lastra piana.

Dopo aver definito le equazioni che governano il moto del fluido e dopo aver identificato il dominio di calcolo si è affrontata la prima fase di questo studio, prendendo come spunto un'indagine analoga compiuta precedentemente da Henningson ed avente lo scopo di caratterizzare l'analisi della stabilità lineare, ritenendo che le ampiezze delle perturbazioni fossero infinitesime. I primi risultati ottenuti ora riportano una rappresentazione del modulo e delle autofunzioni sia per disturbi 2D che 3D e convalidano, nello stesso tempo, il codice utilizzato. Si sono inoltre ricavate le curve di stabilità neutra sia per disturbi 2D che 3D. Queste curve separano la regione di stabilità del flusso da quella d'instabilità.

Nella seconda fase, considerando proprio la curva di stabilità neutra per disturbi bidimensionali e scegliendo la soluzione lineare come punto iniziale, si sono trovate le soluzioni non lineari denominate come "Travelling Wave Solutions". I risultati hanno dimostrato che per lunghezze d'onda in direzione parallela al flusso minori di quella critica, la biforcazione risulta sottocritica mentre per valori superiori la biforcazione risulta supercritica. Ciò consente di dimostrare che nel caso di biforcazione sottocritica i disturbi di ampiezza finita possono innescare il processo di transizione del flusso anche prima del punto critico della stabilità lineare.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
1.1	Esperimenti precedenti . . . . .	3
1.1.1	Transizione in un condotto a sezione circolare . . . . .	3
1.2	Stabilità . . . . .	12
1.2.1	Stabilità lineare . . . . .	13
1.3	Influenza della viscosità . . . . .	15
1.3.1	Stabilità non viscosa . . . . .	16
1.3.2	Stabilità viscosa . . . . .	16
1.4	Travelling Wave Solutions . . . . .	17
1.5	Scopo della Tesi . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Definizioni</b>	<b>19</b>
2.1	Equazioni di bilancio . . . . .	19
2.1.1	Equazione di continuità . . . . .	19
2.1.2	Equazioni di Navier-Stokes . . . . .	19
2.2	Soluzione di Blasius . . . . .	21
2.3	L'equazione di Orr-Sommerfeld . . . . .	22
2.4	Onde di Tollmien-Schlichting . . . . .	24
2.5	Teorema di Squire . . . . .	24
2.6	Equazioni perturbative adottate . . . . .	25
2.7	Espansioni adottate . . . . .	26
2.8	Problema agli autovalori . . . . .	28
2.9	Polinomi di Chebyshev . . . . .	29
2.10	Metodo di Galerkin . . . . .	30
2.11	Metodo di Newton Raphson . . . . .	30
2.12	Codice di calcolo . . . . .	31

---

2.12.1 LAPACK . . . . .	31
2.12.2 PITCON . . . . .	31
<b>3 Risultati (1<sup>a</sup> parte)</b>	<b>33</b>
3.1 Validazione del codice . . . . .	33
3.2 Curva neutra . . . . .	40
<b>4 Risultati (2<sup>a</sup> parte)</b>	<b>43</b>
4.1 Validazione del codice . . . . .	45
<b>5 Conclusioni</b>	<b>47</b>
5.1 Studi futuri . . . . .	49
<b>A Derivazione dell'equazione di Blasius</b>	<b>50</b>
<b>B Equazione di Orr-Sommerfeld</b>	<b>55</b>
<b>C Teorema di Squire</b>	<b>58</b>
<b>D Influenza della viscosità</b>	<b>60</b>
D.1 Stabilità non viscosa . . . . .	60
<b>E Metodo di Newton Raphson</b>	<b>62</b>
E.1 Derivazione . . . . .	63
<b>F Serie di Fourier</b>	<b>65</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

La transizione da regime laminare a turbolento è un fenomeno che ha suscitato molto interesse negli scienziati e nei ricercatori. Gli albori di questo studio risalgono alla fine del XIX secolo con il celeberrimo esperimento di Reynolds sul colorante (1883) [27], (vedi Sez. 1.1.1). La transizione da regime laminare a turbolento ha comportato una profonda influenza in vasti ambiti della scienza.

Per regime laminare s'intende il moto di un fluido che scorre in maniera ordinata e regolare mentre per regime turbolento s'intende moto di un fluido disordinato e irregolare.

Nel campo biomedico, la ricerca si concentra sul flusso sanguigno nelle vene e sullo studio delle forme più adatte per i cuori artificiali, visto che all'interno del corpo il regime del moto dev'essere strettamente laminare. In effetti durante la transizione e anche nella fase turbolenta si verificano delle fluttuazioni di pressione notevoli, tali da causare vibrazioni strutturali ed il conseguente danneggiamento dei dispositivi che regolano il flusso sanguigno.

In tutti gli altri campi tecnologici il regime di moto è di fondamentale importanza soprattutto nello scambio termico attraverso pareti ad alettature.

Anche nel caso dei profili alari e nello studio dell'aerodinamica esterna questo fenomeno gioca un ruolo centrale e lo studio di costose soluzioni per il controllo dello strato limite ne sono un lampante esempio.

Nel caso specifico delle turbomacchine, la transizione influenza il livello di perdita e soprattutto l'angolo di scarico delle palettature.

Questo significa che una corretta simulazione dello strato limite, o meglio della sua transizione, permette di determinare il lavoro scambiato tra fluido e macchina e le prestazioni di quest'ultima.

## 1.1 Esperimenti precedenti

### 1.1.1 Transizione in un condotto a sezione circolare

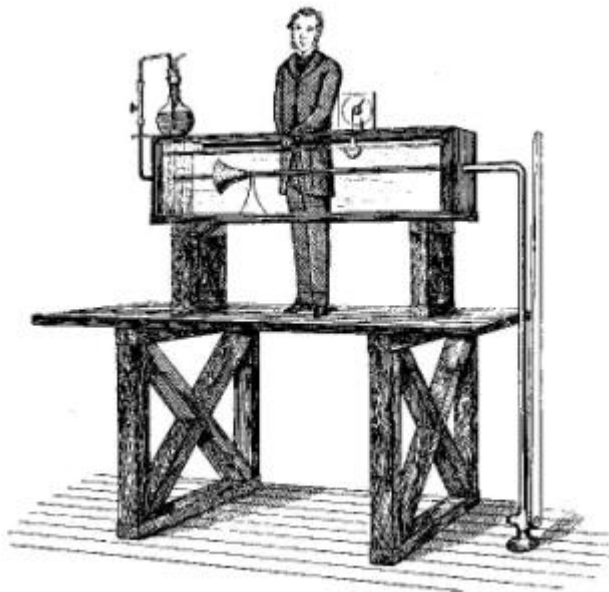


Figura 1.1: Schematizzazione dell'esperimento di Reynolds con il colorante (vedi punto [27])

Storicamente, la transizione da corrente laminare a corrente turbolenta fu studiata da Reynolds nel famoso esperimento con il colorante pubblicato nel 1883 [27] e riportato in figura 1.1. L'esperimento consisteva nell'osservazione di una corrente d'acqua in un tubo a sezione circolare, nota come corrente di Hagen-Poiseuille [10], [20], caratterizzata da un profilo assialsimmetrico tipo paraboloidale. Questo tipo di flusso prende il nome dai due scienziati che per primi trovarono una correlazione che esprimesse la caduta di pressione di un moto laminare in un tubo orizzontale :  $p_1 - p_2 = \frac{8\mu l \bar{U}}{r_0^2}$ , dove  $\mu$  è la viscosità dinamica,  $l$  la lunghezza oltre la quale si verifica la caduta di pressione, la velocità media  $\bar{U}$  e il raggio  $r_0$  del tubo. La corrente segue, come legge particolare, la soluzione esatta monodirezionale delle equazioni di Navier-Stokes (Sez. 2.1.2) o flusso di Hagen-Poiseuille:  $v(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (r^2 - r_0^2)$  in direzione della corrente. Reynolds notò col crescere del numero che porta il suo nome,  $Re = \frac{\bar{U}d}{\nu}$ , essendo  $\bar{U}$  la velocità media della corrente ( $\bar{U} = \frac{Q}{A}$ , dove  $Q$  è la portata in volume e  $A$  l'area della sezione del tubo),  $d$  il diametro del tubo e  $\nu$  la viscosità dell'acqua, il colorante rilasciato al centro della corrente si comportava in modo progressivamente sempre più irregolare (vedi Fig.1.2).

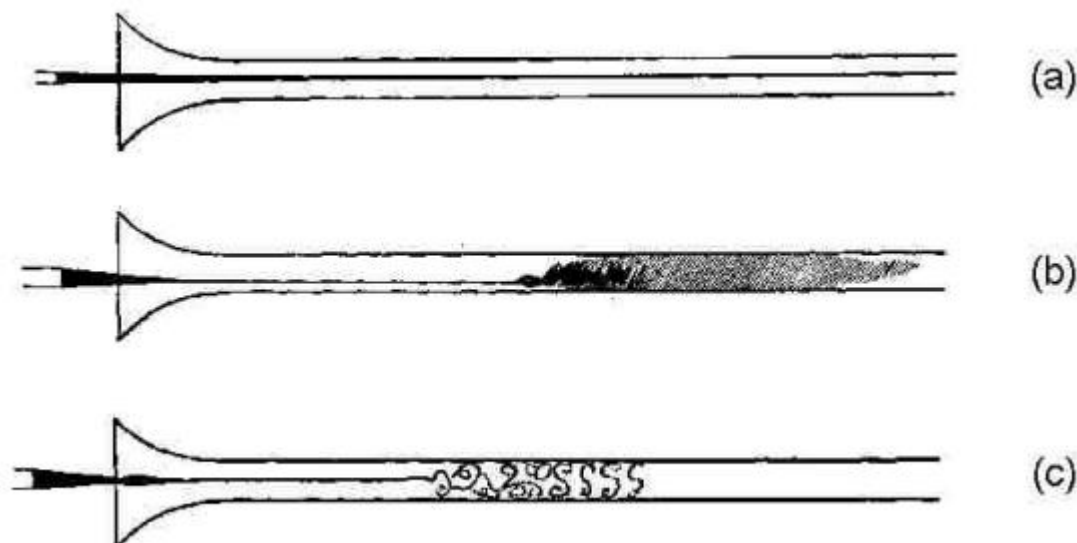


Figura 1.2: Il processo del passaggio progressivo da un moto ordinato ad uno disordinato può essere visualizzato in modo efficace tramite un sottile filamento di colorante rilasciato nell'acqua. a) fintanto che la corrente si mantiene laminare il filamento di colorante è ben definito e si mantiene sottile; b) e c) aumentando il numero di Reynolds (ossia la velocità della corrente), ad un certo punto si osserva l'insorgere di ondulazioni del filamento colorato che diventano sempre più complicate al crescere di  $Re$ .

Indicando con  $Re_{cri}$ <sup>1</sup> il numero di Reynolds *critico*, al quale si osserva lo scostamento dalla corrente laminare, Reynolds osservò che il comportamento irregolare si presentava ad un  $Re_{cri}$  basso se l'imboccatura del tubo presentava un raccordo poco levigato mentre se l'imboccatura e tutto l'interno del tubo erano molto ben levigati  $Re_{cri}$  era più elevato. Successivamente alcuni ricercatori hanno cercato di ottimizzare sempre più l'esperimento di Reynolds, minimizzando in ingresso i disturbi al fluido. Il limite inferiore del numero di Reynolds fu trovato sperimentalmente anche da Wygnansky e Champagne nel 1973 [50]. Wygnansky e altri nel 1975 [51] eseguirono uno studio sperimentale della transizione per la turbolenza in un flusso nel tubo. Essi trovarono che il limite inferiore, in corrispondenza del quale si verifica la prima fase della transizione è di  $Re_{cri} = 2000$ . Più tardi Darbyshire & Mullin nel 1995 [5] e Mullin & Peixinho [15] affermarono che il limite inferiore fosse di  $1760 - 2000$ . Il motivo per il quale il limite inferiore è di  $Re_{cri} \approx 2000$  significa che una perturbazione molto grande tende a smorzarsi fino a quando  $Re < Re_{cri}$ . Il limite superiore di  $Re_{cri}$  è stato spinto fino a  $10^5$  in un esperimento di Pfenninger (1961) [19]. Una recente

<sup>1</sup>per numero di Reynolds s'intende il rapporto fra le forze d'inerzia e le forze viscosive



scoperta di Hof e altri (2003) [11] indica che l'ampiezza della perturbazione richiesta per causare la transizione è dell'ordine di  $Re^{-1}$  su un range di  $Re$  pari a 2000-18000.

Invece dal punto di vista teorico ci sono state conclusioni differenti, infatti l'analisi della stabilità lineare del flusso alla Poiseuille stazionario in un tubo di sezione circolare sembra condurre ad un numero di Reynolds critico infinito, secondo Drazin & Reid [7], infatti, il flusso in un tubo a sezione circolare risulta essere stabile per tutti i numeri di Reynolds. Molto probabilmente la discrepanza tra teoria ed esperimenti è dovuta a difetti o imperfezioni del condotto, come la non perfetta cilindricità.

Un altro tipo di ricerca fu affrontata da Tatsumi & Yoshimura (1990) [40] in merito ad uno studio sulla stabilità lineare di un flusso in un condotto a sezione rettangolare. I due scienziati giapponesi dimostrarono che il flusso rimane stabile fino a quando l'aspect ratio (per aspect ratio s'intende il rapporto fra il lato maggiore e il lato minore della sezione rettangolare) raggiunge il valore di 3.2.

Recentemente Uhlmann & Nagata (2006) [42] studiarono la stabilità lineare di un flusso in un condotto rettangolare verticale, sottoposto ad una sorgente di calore distribuita internamente in maniera omogenea. Essi trovarono delle instabilità per  $A = 1$  quando il flusso base risultava flesso. In un altro studio recente H. Wedin *et al.* considerarono un flusso in un condotto quadrato [47]-[48]. Essi trovarono tre soluzioni approssimative alle equazioni di Navier Stokes (TWS<sup>2</sup> di ampiezza finita) utilizzando un metodo particolare proposto da Waleffe [45] denominato SSP (Self-Sustaining-Process). Questo approccio era stato già adottato nello studio del flusso in un tubo circolare da Wedin & Kerswell (2004) [49].

Nonostante storicamente lo studio della transizione da una corrente laminare a una turbolenta sia iniziato con il flusso in un condotto chiuso a sezione circolare, fin dai primi del '900 lo studio stesso si estese allo strato limite. Una prima conclusione fu quella di affermare che il passaggio allo strato limite turbolento provocava un aumento dello spessore dello strato limite, accompagnato da un cambiamento del profilo di velocità. Ciò venne confermato sperimentalmente dai risultati riportati in Fig. 1.3.

---

<sup>2</sup>vedi Sez. 1.4

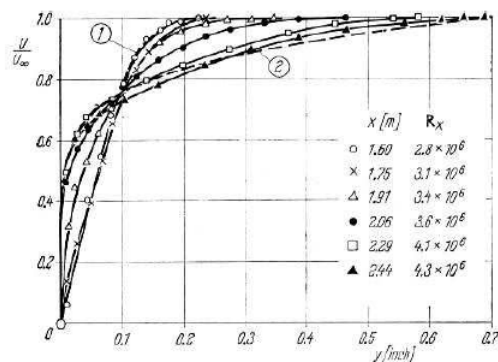


Figura 1.3: Profili di velocità per lo strato limite su lamina piana misurati da Shubauer e Klebanoff [37]. (1) Profilo laminare di Blasius; (2) Turbolento.

Gli esperimenti di Shubauer e Klebanoff [37] dimostrano che anche per la lastra piana, come nel caso della transizione alla turbolenza nel tubo, il profilo di velocità turbolenta è più “pieno” di quello laminare. Questo fatto causa un decremento del fattore di forma  $H$  ( $H = \delta_1/\delta_2$ , dove  $\delta_1$  denota lo spessore di spostamento e  $\delta_2$  lo spessore della quantità di moto), che passa da un valore di  $H_{laminare} = 2.59$  nel caso laminare ad un valore  $H \approx 1.5$  in regime turbolento. La ripercussione maggiore del fatto che il profilo di velocità cambi e diventi più “pieno” si ha dal punto di vista ingegneristico. Infatti il coefficiente di attrito viscoso dipende dalla derivata della velocità alla parete. Siccome nei profili turbolenti questa derivata è maggiore che nel caso laminare (vedi Fig. 1.3), la resistenza d’attrito viscoso per strati limite turbolenti è maggiore che nel caso laminare. In conseguenza di questo fatto si tende a mantenere la corrente laminare il più possibile su aerei (ali e fusoliere), sommergibili, automobili e su tutte le macchine che si muovono all’interno di un fluido, consumando energia.

Un’altra conclusione fu di definire il moto all’interno dello strato limite turbolento non completamente casuale. A dimostrazione di ciò, si sono individuate porzioni di fluido in cui le grandezze fondamentali del flusso, come potrebbero essere le componenti di velocità o la temperatura, rimangono correlate tra loro o con altre grandezze su un intervallo di spazio e/o di tempo superiore a quello delle scale più piccole del moto. Queste regioni di fluido vengono dette strutture coerenti. Particolarmente significative sono le strutture coerenti di parete la cui definizione fu proposta da Robinson (1991) [28]:

Una struttura coerente è una regione tridimensionale di un flusso turbolento nella quale almeno una variabile fondamentale (velocità, densità, temperatura, ...) mostra una significativa correlazione con se stessa o con un’altra variabile su un intervallo spazio-temporale

decisamente più ampio della più piccola scala locale del flusso. Generalmente, tuttavia, con il termine di strutture coerenti si indicano soprattutto quelle aventi dimensioni caratteristiche dell'ordine della scala spaziale tipica del fenomeno considerato (in questo caso l'altezza dello strato limite) e dunque strettamente connesse alla configurazione geometrica della corrente.

Tra i primi esperimenti nel convalidare l'esistenza delle strutture coerenti di parete furono Kline e altri (1967) [12]. Essi giunsero a due importanti conclusioni:

1. il sottostrato laminare non è bidimensionale e stabile, come ipotizzato fino ad allora, ma contiene moti tridimensionali e instabili per via dell'influenza della viscosità,
2. è possibile, attraverso accurate operazioni di visualizzazione con bolle di idrogeno, provare la presenza nella regione interna della turbolenza di parete, di strisce di fluido (*low speed streaks*) in moto con velocità minore di quella del flusso medio locale.

Nello studio dello strato limite subentrano in gioco diversi valori di Reynolds critici ovvero i valori in corrispondenza dei quali si passa da una regime di flusso ad un altro:

1.  $Re_{\delta_{instabile}}$  che per lo strato limite è stato calcolato attorno al valore di  $\approx 301.65$ , ovvero è quel punto in corrispondenza del quale si presenta l'instabilità di conseguenza i disturbi tendono a crescere.
2.  $Re_{\delta_{transitorio}}$  che è quel punto in corrispondenza del quale si è misurata sperimentalmente la transizione.
3.  $Re_{\delta_{turbolento}}$  che è quel punto in corrispondenza del quale si è misurata sperimentalmente la turbolenza.

In ogni caso questi numeri di Reynolds cambiano ovviamente anche per l'influenza del rumore esterno ad esempio corrente turbolenta e rugosità.

Altra caratteristica importante della transizione alla turbolenza, che si riscontra non solo nello strato limite ma anche nella corrente in un condotto come nell'esperimento di Reynolds, è il fenomeno dell'*intermittenza*.

Secondo gli esperimenti di Schubauer e Klebanoff [37] su una lastra piana il processo di transizione è *intermittente*, nel senso che in certe regioni irregolari non c'è il passaggio totale alla turbolenza ma si osserva principalmente lo strato limite turbolento alternato a quello laminare (*spots turbolenti*) [50]-[51].

Molti studi, sia numerici che sperimentali, hanno portato ad una serie di affermazioni in merito alla stabilità di un flusso nello strato limite, basandosi inizialmente sui fondamenti

matematici di Reynolds. Molti sforzi, durati decenni con pochi esiti soddisfacenti furono seguiti da un esito positivo quando, nel 1930 L. Prandtl *et al.* [21]-[23] determinarono con buona precisione il numero critico di Reynolds, o meglio quello in corrispondenza del quale l'ampiezza del disturbo aumenta con il tempo e quindi il flusso risulta instabile.

Una delle prime conclusioni fu quella di affermare che il flusso non rimane costante se si trova in presenza di turbolenza nella corrente libera circostante. Infatti, secondo un'analisi generale della stabilità lineare, una variazione piccola porta ad una divergenza finita dallo stato base se il flusso fosse instabile. In questo caso, a perturbare lo stato sono proprio le fluttuazioni di velocità nello strato limite, imposte dalla corrente libera turbolenta circostante. Queste fluttuazioni sono ritenute la causa primaria della transizione.

Nel corso delle ricerche si giunse ad affermare che la crescita o smorzamento di un piccolo disturbo è determinata dalla viscosità cinematica del fluido (Rayleigh [26] affermò che la viscosità stabilizza il flusso, Appendice D), dallo spessore dello strato limite, dalla velocità fuori dallo strato e dalla frequenza o lunghezza dell'onda del disturbo.

In passato gli esperimenti non supportarono in maniera coerente la teoria della stabilità. I risultati accumulati in galleria del vento hanno condotto all'opinione generale, tra i ricercatori, che la transizione nasce dalla separazione dello strato limite causato da gradienti di pressione sufficientemente grandi (Taylor [41]).

Al contrario, la teoria della stabilità richiedeva che lo strato limite potesse essere stabile o instabile, in funzione semplicemente della frequenza o della lunghezza d'onda del disturbo presente o del numero di Reynolds e sosteneva che le oscillazioni fossero il risultato dell'amplificazione di piccoli disturbi.

La verifica sperimentale della teoria della stabilità avvenne quando H. L. Dryden [8] e i suoi colleghi furono in grado di fornire una certa compatibilità fra gli esperimenti e la teoria. Questi studi erano improntati sul più semplice ma pratico dei problemi dello strato limite: quello della distribuzione di Blasius [3] (vedi Sez. 2.2) vicino alla superficie di una lastra piana. Lo scopo originale di questo esperimento si basava su uno studio generale della transizione su una lastra piana con gradiente di pressione nullo sotto le condizioni di corrente a bassa turbolenza. Nel corso di questo studio si aprì una nuova indagine perché vennero notate delle oscillazioni nello strato limite laminare.

Le ricerche rivelarono che le oscillazioni erano il risultato dell'amplificazione di piccoli disturbi, in accordo alla teoria della stabilità.

Quando le oscillazioni venivano prodotte artificialmente, le loro caratteristiche venivano studiate in dettaglio e confrontate con le caratteristiche descritte nella teoria.

Sembra evidente dai risultati di queste ricerche che la transizione comportava due cose:

1. il disturbo stesso, la sua origine e il suo comportamento nello strato limite;
2. l'effetto del disturbo, sia prodotto nello strato limite, sia entrante dall'ambiente esterno, portava il flusso ad uno stato turbolento.

Dei resoconti completi (o quasi) sulla teoria della stabilità furono dati da H. Schlichting [32]-[35], da Tollmien [42]-[43] da R. Betchov & W.O. Criminale [2] e da C.C. Lin [13].

I primi due investigarono la stabilità dello strato limite della lastra piana e furono i primi a trovare le soluzioni dell'equazione di Orr-Sommerfeld (Sez. 2.3), che rendono instabile il flusso. Il loro lavoro fu confermato anche da Schubauer e Skramstad [38] i quali dimostrarono che le onde dei disturbi possono avvenire naturalmente nello strato limite di Blasius su una lastra piana.

Sono proprio questi disturbi a causare la transizione su una lastra piana, con gradiente di pressione nullo, fino a quando l'ampiezza è sufficientemente grande. Il confronto tra la teoria lineare e gli esperimenti per il caso di stabilità spaziale è riportato in Fig. 1.4.

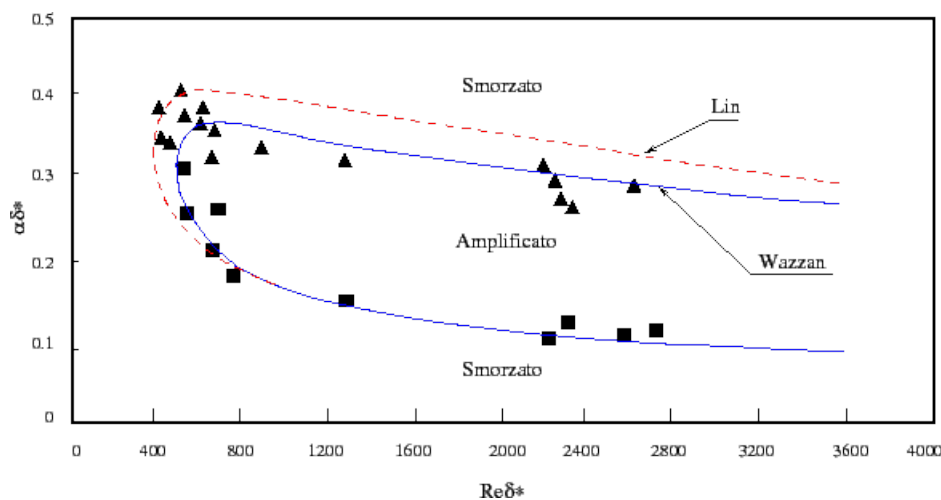


Figura 1.4: Lastra piana: confronto tra i dati di Lin (1955) [13] e Wazzan (1968) [46] ottenuti con la teoria della stabilità idrodinamica e le misure sperimentali di Schubauer e Skramstad [38].

Nel 1969 Morkovin introdusse uno “schema di flusso della transizione” [14]. Questo schema (Fig.1.5), aggiornato dallo stesso Morkovin nel 1994, mostra il processo di transizione suddiviso principalmente in tre fasi: ricettività (Receptivity), crescita dei disturbi (Transient Growth) e rottura o disgregazione del flusso (Breakdown). La ricettività è il mezzo con cui i disturbi entrano nello strato limite e forniscono le condizioni iniziali per la crescita del disturbo.

Disturbi come la turbolenza in direzione della corrente, la rugosità superficiale e il suono entrano nello strato limite come delle perturbazioni costanti e/o instabili.

Questi aspetti non sono ancora stati completamente compresi per tutte le situazioni, ma sono fondamentali per fornire le ampiezze iniziali, le fasi e le frequenze dei disturbi.

Una volta che i disturbi sono entrati nello strato limite si procede lungo uno dei percorsi da A ad E (vedi Fig. 1.5) in funzione non solo delle loro ampiezze iniziali, come pensava Morkovin, ma anche come suggeriscono studi recenti, di altre caratteristiche quali i numeri d'onda spaziali e le frequenze temporali. I disturbi si amplificano o si smorzano a seconda delle caratteristiche del flusso e molti tipi di disturbo possono coesistere ed eventualmente interagire una volta che raggiungono grandi ampiezze. La fase finale è la disgregazione sotto forma di turbolenza (“breakdown”).

Nel caso delle onde di Tollmien-Schlichting<sup>3</sup> (modi principali del percorso A), una volta che il disturbo raggiunge una certa ampiezza (vicino all'1% della velocità in direzione della corrente), il flusso laminare non è più sostenuto e si presenta quindi come un flusso più complesso. Questa instabilità, dovuta alle onde Tollmien-Schlichting di grande ampiezza, è nota come instabilità secondaria perché il disturbo primario è talmente grande da generare una seconda crescita dell'instabilità a frequenze che non sono inizialmente instabili.

L'instabilità secondaria decade rapidamente e appaiono “bursts” turbolenti ossia sorte di scoppi turbolenti.

Nel caso di transizione “bypass”, i disturbi si smorzano senza passare attraverso il ramo dell'instabilità secondaria e formano direttamente “bursts” turbolenti; questi sembrano fondersi completamente al flusso turbolento (Fig. 1.6).

Quindi è possibile osservare una diversa evoluzione della transizione alla turbolenza, anche a valori sensibilmente inferiori a quelli previsti dalla teoria di stabilità lineare, così in presenza di un disturbo di entità notevolmente superiore al valore di attivazione della transizione classica, si sviluppano, all'interno del flusso di strato limite, delle regioni estremamente allungate in direzione della corrente principale ( $x$ ) di alta e di bassa velocità assiale ( $u$ ) (“high-and-low-speed streaks”). La formazione di queste strisce di alta e di bassa velocità è legata ad uno spostamento di particelle fluide in direzione ortogonale alla parete, denominato “lift-up effect”. Il prerequisito per la formazione di queste strutture è infatti la presenza di vortici controrotanti diretti come  $x$ , ed alternati in direzione trasversale al flusso ( $z$ ). Tali vortici inducono un movimento verso l'alto di particelle fluide caratterizzate da bassa velocità assiale, e di un movimento verso la parete di particelle ad

---

<sup>3</sup>Vedi Sez. 2.4

alta velocità. Le particelle che vengono spostate sono in grado inizialmente di mantenere il proprio contenuto di quantità di moto in direzione del flusso principale, imponendo così una variazione locale di velocità assiale nella regione in cui vengono ospitate.

Se l'intensità delle strisce raggiunge un'ampiezza di circa il 26% della velocità indisturbata, si attiva una seconda instabilità, con la conseguente rottura delle strutture e la comparsa di fenomeni turbolenti.

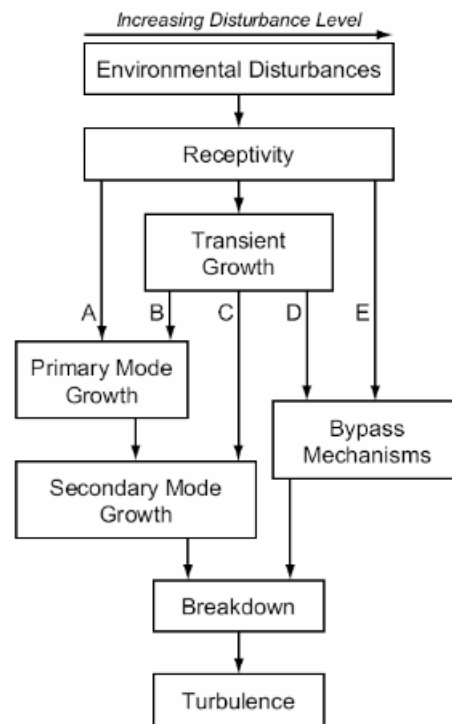


Figura 1.5: “Schema di flusso” della transizione, adottata da Morkovin et al. (1994).

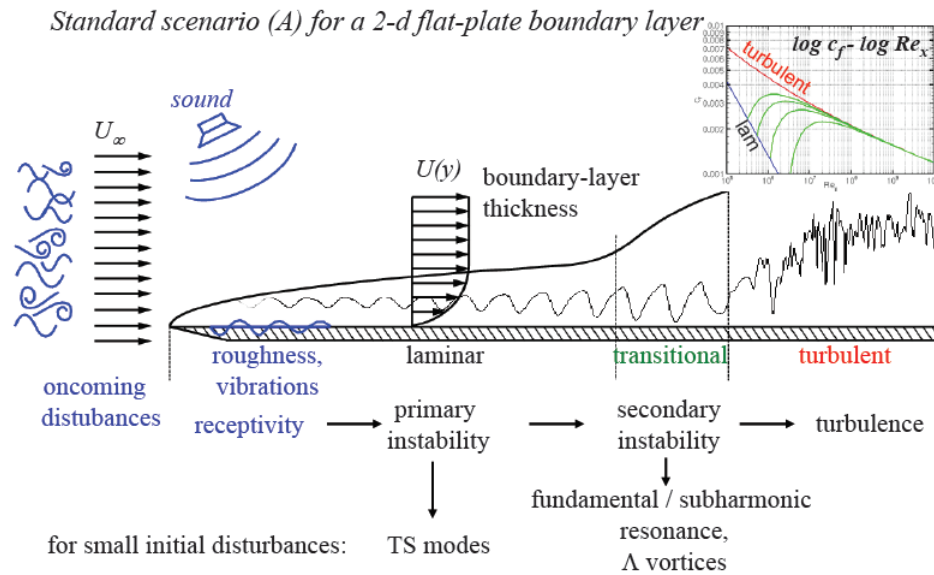


Figura 1.6: Rappresentazione dello strato limite secondo il ramo A dello schema di Morkovin

## 1.2 Stabilità

Il concetto di stabilità di uno stato di un sistema fisico o matematico fu capito già nel XVIII secolo, e Clerk Maxwell [4] espresse chiaramente il concetto qualitativo nel XIX secolo:

*When ... an infinitely small variation of the present state will alter only by an infinitely small quantity the state at some future time, the condition of the system, whether at rest or in motion, is said to be stable; but when an infinitely small variation in the present state may bring about a finite difference in the state of the system in a finite time, the condition of the system is said to be unstable.*

Infatti nelle correnti laminari possono entrare dei disturbi esterni che, crescendo nello spazio e/o nel tempo, danno origine a delle perturbazioni rispetto alle quali la corrente laminare non è più stabile. Si ha quindi la transizione da corrente laminare a corrente turbolenta.

In generale, si può dire che l'instabilità si verifica perché c'è qualche disturbo dell'equilibrio delle forze esterne, d'inerzia e sforzi viscosi di un fluido.



### 1.2.1 Stabilità lineare

Il primo passo per l'analisi numerica della stabilità lineare di un flusso base sta nella ricerca delle soluzioni o meglio della velocità  $\mathbf{U}$  della pressione  $\mathbf{P}$  e della temperatura  $\mathbf{T}$ , necessarie per specificare il flusso laminare in ogni punto  $\mathbf{x}$  e tempo  $\mathbf{t}$ . Questi campi definiscono il flusso base. I campi possono essere continui o non e dovrebbero soddisfare le equazioni appropriate del moto e le condizioni al contorno. In base alle definizioni di Drazin e Reid [5] sulla teoria della stabilità dei sistemi di equazioni differenziali, si definisce un fluido stabile se, per qualsiasi  $\varepsilon > 0$ , esiste un numero positivo  $\delta$  (dipendente da  $\varepsilon$ ) tale che se

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) - \mathbf{U}(\mathbf{x}, 0)\|, \|\mathbf{p}(\mathbf{x}, 0) - \mathbf{P}(\mathbf{x}, 0)\|, \|\mathbf{t}(\mathbf{x}, 0) - \mathbf{T}(\mathbf{x}, 0)\| < \delta,$$

allora

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{U}(\mathbf{x}, t)\|, \|\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)\|, \|\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\| < \varepsilon \text{ per } t \geq 0,$$

dove  $\mathbf{u}$  è il campo di velocità,  $\mathbf{p}$  è il campo di pressione e  $\mathbf{t}$  è il campo della temperatura che soddisfano le equazioni del moto e le condizioni al contorno. Da questa definizione si spiega che il flusso è stabile se la perturbazione è piccola per tutto il tempo, a condizione che sia piccola fin dall'inizio, o, se la soluzione per ciò che riguarda le condizioni iniziali è uniformemente continua per tutto il tempo. Il significato preciso di perturbazione "piccola" o "continua" nasce dalla definizione di norma. Qui è utile scegliere

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{U}(\mathbf{x}, t)\| = \max_{\mathbf{x} \in V} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{U}(\mathbf{x}, t)|$$

dove  $V$  è il dominio. Analogamente si può dire che il flusso base è stabile asintoticamente se inoltre<sup>4</sup>

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{U}(\mathbf{x}, t)\|, \|\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)\|, \|\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\| \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow +\infty.$$

Le equazioni evolutive per le perturbazioni possono essere derivate considerando uno stato base  $(\mathbf{U}_i, P)$  e uno stato perturbato  $(\mathbf{U}_i + \mathbf{u}'_i, P + p')$ , entrambi soddisfacenti le equazioni che governano il moto di un fluido note come equazioni di Navier-Stokes.

Spesso si prende come riferimento il disturbo dell'energia cinetica contenuta in un volume

---

<sup>4</sup>Queste definizioni possono essere insoddisfacenti quando la norma dello stesso flusso base diminuisce o aumenta sostanzialmente nel tempo.

$V$  è

$$E_V = \frac{1}{2} \int_V u_i u_i dV. \quad (1.1)$$

La scelta del dominio è dipendente dalla geometria del flusso. Per esempio, per un flusso piano è lo spazio seminfinito, oppure, per un flusso in un canale piano può essere una scatola contenente un periodo del disturbo.

Alcune definizioni in merito alla stabilità di un flusso base sono elencate qui di seguito [36]:

1. Una soluzione  $\mathbf{U}_i$  per le equazioni di Navier-Stokes è stabile per le perturbazioni se l'energia della perturbazione soddisfa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_V(t)}{E_V(0)} \rightarrow 0$$

2. Se esiste l'energia di soglia  $\delta > 0$  tale che  $\mathbf{U}_i$  è stabile quando  $E(0) < \delta$ , allora la soluzione  $\mathbf{U}_i$  è definita condizionatamente stabile. Un caso speciale di stabilità condizionata risulta nella definizione di stabilità globale (vedi sotto).
3. Se la soglia di energia è infinita, per esempio  $\delta \rightarrow \infty$ , la soluzione è definita globalmente stabile. In conclusione, la definizione di stabilità monotona aggiunge ulteriori restrizioni imponendo che l'energia della perturbazione diminuisca sempre, non solo asintoticamente, per tempi molto lunghi.

4. Se

$$\frac{dE_V}{dt} < 0 \quad \text{per } t > 0,$$

allora la soluzione è definita monotonamente stabile. Basandosi sulle definizioni di stabilità è appropriato introdurre i seguenti numeri critici di Reynolds:

1. DEFINIZIONE ( $Re_E$ ): Per  $Re < Re_E$  il flusso è monotonamente stabile. Questo è il numero critico di Reynolds dato dalla teoria dell'energia e derivato dalle equazioni di Orr-Reynolds.
2. DEFINIZIONE:  $Re < Re_G$  il flusso è globalmente stabile. Questo numero critico di Reynolds è difficile da derivare analiticamente ma può essere determinato dall'analisi della biforcazione. A volte si assume che  $Re_G$  corrisponda al più basso numero di

Reynolds in corrispondenza del quale può mantenersi la turbolenza. Questa assunzione, comunque, non vale per tutti i flussi, in taluni casi è necessario introdurre un numero critico di Reynolds diverso  $Re_T$  sotto cui il flusso sarà di nuovo laminare.

3. DEFINIZIONE ( $Re_L$ ): per  $Re > Re_L$  il flusso è linearmente instabile o non condizionatamente stabile. A questo numero di Reynolds esiste almeno un disturbo infinitesimo che è instabile.

Le definizioni di stabilità, date in precedenza, si riferiscono alla crescita nel tempo del disturbo. Questo presuppone che si stia considerando un disturbo localizzato dove  $V$  è un volume abbastanza grande da includere lo sviluppo completo del disturbo durante il periodo d'interesse o di una perturbazione periodica nello spazio in cui il volume  $V$  contiene uno o più periodi completi.

Per disturbi che sono generati in punti fissi nello spazio il concetto di crescita temporale non è appropriato e le definizioni di stabilità devono essere modificate. Un disturbo è allora definito spazialmente instabile se cresce senza limiti con il crescere della distanza percorsa in direzione della corrente fino all'infinito. Formalmente il concetto di stabilità spaziale è qualcosa di più complicato da definire rispetto a quella temporale perché non è chiaro come si debba misurare la grandezza dei disturbi. Se, ad esempio, si è scelta come grandezza l'energia cinetica in un piano perpendicolare alla direzione del flusso si possono trovare posizioni dove questa misura è identicamente nulla sebbene il disturbo non scompaia oltre valle.

### 1.3 Influenza della viscosità

Confrontando il flusso di un fluido viscoso con uno non viscoso a condizione che entrambi i flussi abbiano la stessa distribuzione della velocità base, si arriva a formulare due ipotesi fondamentali:

1. Il fluido non viscoso può essere instabile, quello viscoso stabile. L'effetto della viscosità è allora puramente stabilizzante.
2. Il fluido non viscoso può essere stabile e il fluido viscoso instabile. In questo caso la viscosità ne causa l'instabilità.

### 1.3.1 Stabilità non viscosa

Se s'ipotizza un flusso con viscosità nulla, quindi con un valore di Reynolds tendente all'infinito, i profili di velocità con punti di flesso vengono considerati instabili (per la dimostrazione vedere Appendice D Sez.D.1). Pertanto, profili deceleranti possono portare rapidamente alla transizione.

Inizialmente si credeva che un profilo senza punto di flesso, come quello di Blasius, fosse stabile rispetto ai piccoli disturbi.

Nel 1921 Prandtl [21]-[23] dimostrò che l'effetto della viscosità può essere destabilizzante per certi numeri d'onda  $\alpha$  (dove  $\alpha$  indica il numero d'onda in direzione della corrente) e numeri di Reynolds finiti.

Questa realtà fu verificata nel 1929 grazie ai calcoli di Tollmien [42]-[43] per il profilo di Blasius e definitivamente confermata negli anni '40 dai celeberrimi esperimenti di Schubauer e Skramstad [38], per lo strato limite su lamina piana ad incidenza nulla in una galleria del vento a basso livello di turbolenza. Il criterio del punto di flesso è di fondamentale importanza per la teoria della stabilità perché fornisce, eccetto una correzione dovuta all'omissione dell'influenza della viscosità, una prima, approssimata classificazione dei flussi laminari.

Da un punto di vista pratico il criterio è importante dato il legame diretto tra l'esistenza del punto di flesso e la presenza di un gradiente di pressione.

### 1.3.2 Stabilità viscosa

L'influenza della viscosità sulla soluzione dell'equazione della stabilità cambia leggermente le precedenti conclusioni.

Come si può notare dalla figura (Fig. 1.7) per numeri di Reynolds tendenti all'infinito, il range delle lunghezze d'onda instabili è ristretto a un punto e i domini delle oscillazioni instabili sono assunti solo per numeri di Reynolds finiti.

In generale, la quantità di amplificazioni è molto più grande nel caso d'instabilità in assenza d'attrito che nel caso d'instabilità viscosa.

L'esistenza dell'instabilità viscosa può essere scoperta solo in relazione alla discussione dell'equazione completa di Orr-Sommerfeld (Sez. 2.3), che costituisce inoltre il caso analitico più difficile.

Il caso più semplice del flusso cioè quello lungo una lastra piana con gradiente di pressione nullo appartiene alla tipologia dove si ha solo instabilità viscosa.

Nella figura (1.7) sono rappresentate le curve di stabilità neutra per uno strato limite laminare con disturbi bidimensionali, sia per il caso non viscoso (curva a) che viscoso (curva b).

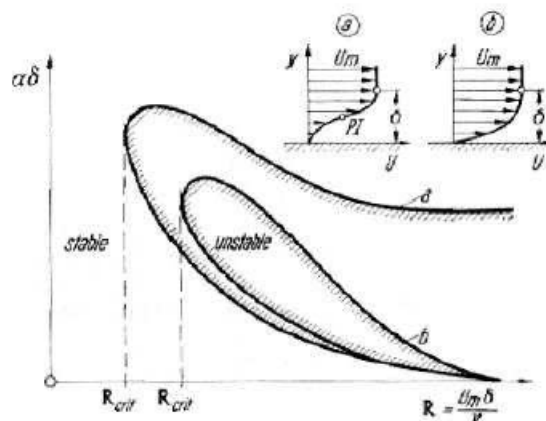


Figura 1.7: Curva di stabilità neutra nel caso di analisi spaziale. (a) flusso base con punto di flesso (instabilità non viscosa); (b) flusso base dello strato limite su lastra piana o accelerante (instabilità viscosa). Si notino le diverse regioni di stabilità all'esterno e d'instabilità all'interno dipendentemente dal tipo di stabilità (viscosa o non viscosa) considerata.

## 1.4 Travelling Wave Solutions

Le TWS (“exact coherent structures”<sup>5</sup>) sono soluzioni non lineari delle equazioni di Navier-Stokes e risultano in generale instabili fin dall’inizio per il flusso in un tubo e per il flusso piano alla Couette. La loro instabilità è un’interessante caratteristica per il motivo che la turbolenza è spesso vista come una sequenza di instabilità. Queste TWS sono immaginate come dei punti di sella nello spazio delle fasi verso i quali il flusso, da una condizione d’instabilità si dirige seguendo una traiettoria “stabile”. Una volta giunto a queste soluzioni, che sono dei particolari stati del flusso, il campo del moto permarrà per un po’ di tempo attorno a questi “nodi” instabili per poi essere espulso verso un’altra soluzione mantenendo in questo modo il flusso lontano dallo stato laminare.

Nagata (1990) [16] fu il primo a scoprire queste soluzioni regolari non lineari per il flusso alla Taylor-Couette tra due cilindri rotanti e trovò delle soluzioni tridimensionali indipendenti dal tempo. Le soluzioni per PCF furono ottenute portando a zero la velocità di

<sup>5</sup>perché non possiedono una struttura disordinata del flusso turbolento ma bensì ne presentano una struttura abbastanza semplificata della turbolenza [37].

rotazione dei cilindri. Più tardi sono state ottenute soluzioni non lineari per il flusso in un tubo, prima da Faisst & Eckhardt (2003) [9], Wedin & Kerswell (2004) [49], Pringle & Kerswell (2007) [24], Duguet e altri (2008) [6] e Pringle e altri (2009) [25]. Rotenberry [29], invece, trovò numericamente le TWS per lo strato limite di Blasius in presenza di disturbi di ampiezza finita per due diversi valori di  $\alpha$ .

L'importanza delle TWS risulta dal fatto che queste soluzioni danno una statistica dei flussi turbolenti.

## 1.5 Scopo della Tesi

Lo scopo finale della tesi è di trovare delle TWS (Travelling Wave Solutions) non lineari per le equazioni di Navier-Stokes nello strato limite.

Per trovare queste soluzioni non lineari è stata effettuata un'analisi preliminare della stabilità lineare di un flusso base. *Lo scopo dell'analisi della stabilità lineare è di trovare le soluzioni iniziali necessarie per lo studio non lineare.*

Lo studio comincia proprio con il ricavare prima le equazioni perturbative del flusso dalle equazioni di Navier-Stokes linearizzate e adimensionalizzate, considerando le prime come problema agli autovalori generalizzato.

Utilizzando poi una tecnica di collocazione spettrale, descritta più avanti, si ricaveranno successivamente le opportune soluzioni delle equazioni della stabilità lineare.

La possibilità di linearizzare le equazioni di Navier-Stokes risulta dal fatto che si devono considerare le ampiezze delle perturbazioni piccole abbastanza da poter essere trascurate. Calcolate un numero necessario di soluzioni lineari nello spazio dei parametri, si tracciano le corrispondenti curve di stabilità neutra, facendo un confronto tra le diverse curve variando il parametro che rappresenta la lunghezza d'onda nella direzione trasversale alla direzione della corrente.

Una volta ricavate le soluzioni lineari si affronterà lo studio non lineare delle equazioni di Navier-Stokes considerando le prime come "initial guess" dal quale si possono poi cercare le soluzioni non-lineari, cioè quelle soluzioni dell'equazione della stabilità che tengono conto anche dei termini non lineari e che sono rappresentate da TWS tridimensionali con ampiezza finita.

# Capitolo 2

## Definizioni

### 2.1 Equazioni di bilancio

#### 2.1.1 Equazione di continuità

L'equazione di continuità esprime la conservazione della massa. Per un fluido incomprimibile avente proprietà costanti, dove l'aggettivo costanti deve intendersi di fatto, come *costante* nel tempo ed *uniforme* nello spazio l'equazione di bilancio si legge:

$$\left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} \right) = 0$$

oppure, in forma vettoriale:

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{V}} = 0.$$

#### 2.1.2 Equazioni di Navier-Stokes

Le equazioni di Navier-Stokes assumono un ruolo molto importante nella fluidodinamica perché governano l'evoluzione generale del flusso. Esse descrivono infatti la quantità di moto di un flusso. Per la componente  $x$  dell'equazione per la quantità di moto si ha:

$$\left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} \right) = -\frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \hat{\nu} \left( \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2} \right) + \hat{a}_x$$

dove  $\hat{a}_x$  esprime un'accelerazione generica nella direzione  $x$ .

Per la componente  $y$  dell'equazione per la quantità di moto si ha:

$$\left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{z}} \right) = -\frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} + \hat{\nu} \left( \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{z}^2} \right) + \hat{a}_y$$

dove  $\hat{a}_y$  esprime un'accelerazione generica nella direzione  $y$ .

Per la componente  $z$  dell'equazione per la quantità di moto si ha:

$$\left( \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{y}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} \right) = -\frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} + \hat{\nu} \left( \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{z}^2} \right) + \hat{a}_z$$

dove  $\hat{a}_z$  esprime un'accelerazione generica nella direzione  $z$ . In forma vettoriale invece si ha:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \hat{t}} + \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\nabla} \hat{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\hat{\rho}} \hat{\nabla} \hat{\mathbf{p}} + \hat{\nu} \hat{\nabla}^2 \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{a}}. \quad (2.1)$$

Una prima ipotesi è che si considera un dominio esente da forze esterne quindi viene trascurato il termine  $\hat{\mathbf{a}}$  nelle equazioni di Navier-Stokes. In seguito le equazioni descritte sopra dovranno essere adimensionalizzate in maniera opportuna, quindi le scale per la velocità, la lunghezza, la pressione e il tempo saranno:

$$\mathbf{u} = \frac{\hat{\mathbf{u}}}{\hat{U}_\infty}, \quad \mathbf{x} = \frac{\hat{x}}{\hat{\delta}}, \quad \mathbf{p} = \frac{\hat{p}}{\hat{\rho} \hat{U}_\infty^2}, \quad \mathbf{t} = \frac{\hat{t} \hat{U}_\infty}{\hat{\delta}}$$

dove  $\hat{\delta}$  è lo spessore convenzionale dello strato limite. Considerando che il numero di Reynolds vale

$$Re_\delta = \frac{\hat{\delta} \hat{U}_\infty}{\hat{\nu}} \quad \text{con} \quad \hat{\delta} = \sqrt{\frac{\hat{x} \hat{\nu}}{\hat{U}_\infty}},$$

Lo spessore dello strato limite vale  $5\hat{\delta}$ ,  $\hat{\nu}$  è la viscosità cinematica. L'equazione adimensionale sarà:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla \mathbf{p} + \frac{1}{Re_\delta} \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.2)$$

Si ricorda che lo spessore  $5\hat{\delta}$  dello strato limite, in una stazione fissata  $\hat{x}$ , è definito convenzionalmente come la distanza misurata a partire dalla parete, in corrispondenza della quale il valore della velocità locale  $\hat{u}(\hat{y})$  è pari al 99.5% del valore della velocità  $\hat{U}_\infty$ . L'equazione di continuità adimensionale risulta invece pari a:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_i} = 0 \quad (2.3)$$



dove  $\mathbf{u}_i$  sono le componenti della velocità e  $\mathbf{x}_i$  sono le coordinate spaziali. Il motivo principale per cui le equazioni di Navier-Stokes e di continuità vengono adimensionalizzate è per far comparire il numero di Reynolds all'interno delle equazioni, essendo una combinazione di  $\hat{U}_\infty$ ,  $\hat{\delta}$  e  $\hat{\nu}$ . Quindi dato che si adimensionalizza con  $\hat{U}_\infty$  si avrà un'idea se la velocità/ampiezza dell'onda sarà piccola o no. Queste equazioni devono essere integrate con le condizioni al contorno, tipicamente della forma

$$\mathbf{u}(x, y = 0, z, t) = \mathbf{u}(x, y = y_{max}, z, t) = 0 \quad (Dirichlet) \quad (2.4)$$

ovvero la condizione di perfetta aderenza del fluido alla lastra e

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \Big|_{y=y_{max}} = 0 \quad (Neumann) \quad (2.5)$$

ovvero la condizione che la tangente al profilo della velocità per  $y = 0$  sia nulla.

## 2.2 Soluzione di Blasius

Per essere in grado di trovare le TWS (cioè le soluzioni non lineari) si deve prima studiare la stabilità lineare del moto di Blasius. Quindi per lo strato limite laminare, stazionario e monodimensionale su lastra piana a incidenza nulla (Fig.2.1), l'equazione che governa il moto di Blasius è:

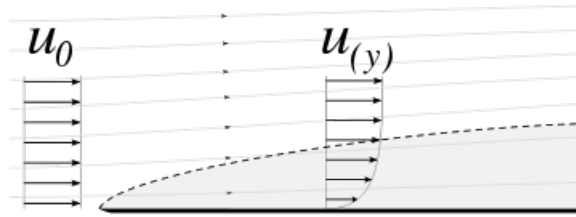


Figura 2.1: Profilo del moto Blasius nello strato limite

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0$$

dove  $f = f(\eta)$ ,  $\eta = \hat{y} \sqrt{\frac{\hat{U}_\infty}{\hat{\nu} \hat{x}}}$ , invece le velocità  $\hat{U}$  e  $\hat{V}$  sono:

$$\hat{U} = \hat{U}_\infty \frac{df(\eta)}{d\eta};$$

$$\hat{V} = \sqrt{\frac{\hat{\nu}\hat{U}_\infty}{\hat{x}} \left[ \eta \frac{df(\eta)}{d\eta} - f(\eta) \right]} = \frac{\hat{U}_\infty}{2Re_\delta} \left( \eta \frac{df(\eta)}{d\eta} - f(\eta) \right)$$

(per la dimostrazione vedere Appendice A), mentre per le condizioni al contorno si hanno:

$$f(\eta = 0) = 0, \quad \frac{df(\eta = 0)}{d\eta} = 0, \quad \frac{df(\eta = \infty)}{d\eta} = 1.$$

Il motivo per cui la  $\hat{U}$ , ovvero il flusso base, è assunta parallela è perché per grandi valori di  $x$  il numero di Reynolds aumenta di conseguenza la componente  $\hat{V}$  risulta molto piccola tale da poterla trascurare approssimando così il flusso parallelo. Si ricorda che lo spessore dello strato limite si raggiunge quando la velocità  $\hat{U} = 0.995\hat{U}_\infty$  e nel flusso di Blasius quando  $\eta = 5.3$ . La velocità che sarà presa in considerazione come flusso di riferimento o flusso base è

$$\mathbf{u} = U(y)\mathbf{i} = \frac{df(\eta)}{d\eta}\mathbf{i}.$$

## 2.3 L'equazione di Orr-Sommerfeld

Per analizzare la stabilità lineare di un flusso bisogna considerare le equazioni di Navier-Stokes (2.2) e sommare alle componenti del flusso base  $U(y)$ , che si considera parallelo, stazionario e monodimensionale, le componenti della perturbazioni rappresentate come onde

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}) = (u(y), v(y), w(y), p(y))e^{i\alpha(x-ct)}e^{i\beta z}. \quad (2.6)$$

dove  $i = \sqrt{-1}$ . Durante i primi esperimenti ci si domandava come un disturbo casuale possa produrre un'onda che abbia un andamento sinusoidale e con una frequenza predominante. La sovrapposizione di piccoli disturbi della velocità su una velocità uniforme lungo una determinata direzione appare ad un osservatore stazionario come un moto ondoso. Il moto può essere sinusoidale o irregolare. Guardando quindi la natura della soluzione (2.6) si dovrà considerare una singola onda (o soluzione) avente il vettore numero d'onda spaziale uguale a:

$$\mathbf{k} = (\alpha, \beta),$$

che è quel numero di oscillazioni che un'onda compie nell'unità di spazio, dove  $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_x}$  e  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_z}$  con  $\lambda_x$  e  $\lambda_z$  rispettivamente la lunghezza d'onda in direzione parallela e trasversale alla corrente. Per esempio la si può anche rappresentare come:

$$\mathbf{v} = Re \left\{ |\mathbf{v}(y)| e^{i\phi(y)} e^{i[\alpha x + \beta z - \alpha(c_r + ic_i)t]} \right\}.$$

Qui  $\alpha c$  denota la frequenza complessa dell'onda con  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $c \in \mathbb{C}$  dato che si considera il problema temporale, altrimenti, se il problema fosse spaziale, si considererebbe  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Per  $\alpha c_i > 0$  il disturbo cresce esponenzialmente mentre per un valore negativo di  $\alpha c_i$  il disturbo decresce esponenzialmente. Nella precedente espressione  $c_r$  denota la velocità di fase reale nella direzione  $x$  ed è la velocità con cui si propaga la fase di un'onda mentre  $|\mathbf{v}(y)|$  è il valore assoluto della velocità. Se si considera la stabilità temporale, allora  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $Re$  sono fissati e reali, mentre  $c$  è complesso e la sua parte immaginaria fornisce il tasso di crescita temporale (frequenza complessa); per la stabilità spaziale  $c$  e  $Re$  sono fissati e reali, mentre (a  $\beta$  fissato) la parte immaginaria di  $\alpha$  (o la parte immaginaria di  $\beta$  se  $\alpha$  fissato) fornisce la crescita spaziale. La soluzione  $v(y)$  è detta autofunzione. Con un po' di calcoli e opportune approssimazioni (vedi Appendice B) ci si può ricondurre all'equazione nell'incognita  $v$  (in Appendice si ha anche l'equazione che utilizza come incognita la vorticità  $\eta$ ).

$$i\alpha(U - c)\Delta v - i\alpha U''v = \frac{1}{Re}\Delta\Delta v \quad (2.7)$$

dove il simbolo  $\Delta$  denota l'operatore laplaciano

$$\Delta = \frac{d^2}{dy^2} - (\alpha^2 + \beta^2).$$

Quest'equazione (2.7) è un'equazione differenziale ordinaria del quarto ordine e omogenea per la sola incognita  $v$ . Essa fu derivata indipendentemente da ORR (1907) [18] e SOMMERFELD (1908) [39] e per questa ragione prende il nome di: equazione Orr-Sommerfeld. Le opportune condizioni al contorno ad essa associate richiedono che la perturbazione si annulli agli estremi del dominio:

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} e \mathbf{w}(y = 0) = 0 = \mathbf{u}, \mathbf{v} e \mathbf{w}(y \rightarrow y_{max}) = 0 \quad (Dirichlet)$$

$$\mathbf{v}_y(y \rightarrow 0) = \mathbf{v}_y(y \rightarrow y_{max}) = 0 \quad (Neumann)$$

Dal momento che sia l'equazione di Orr-Sommerfeld (che è nella sola incognita  $v$ ) sia le

condizioni al contorno per  $v$  sono omogenee, risolvere l'equazione del problema (2.7) equivale a risolvere un problema agli autovalori dal quale si deriva una relazione di dispersione del tipo

$$D(\alpha, \beta, c, Re) = 0.$$

Nel caso di disturbo bidimensionale, si ha  $\beta = 0$  e  $w = 0$ ; pertanto  $\eta \equiv 0$  ed è quindi necessario risolvere la sola equazione di Orr-Sommerfeld (2.7). Anche se storicamente i primi disturbi ad essere studiati furono bidimensionali, anziché utilizzare le variabili primitive  $\tilde{u}$  e  $\tilde{v}$  si può introdurre la funzioni di corrente  $\tilde{\psi} = \psi(y)e^{i\alpha(x-ct)}$  tale che

$$\tilde{u} = \tilde{\psi}_y = \psi_y(y)e^{i\alpha(x-ct)} \quad e \quad \tilde{v} = -\tilde{\psi}_x = -i\alpha\psi(y)e^{i\alpha(x-ct)},$$

che significa che  $\psi(y)$  soddisfa la stessa equazione di  $v(y)$  (l'equazione di Orr-Sommerfeld (2.7)) essendo  $v(y) = -i\alpha\psi(y)$ . L'analisi di stabilità permette di ricavare le curve di stabilità neutra, ovvero (nel caso di disturbo bidimensionale con  $\beta = w = 0$ ) il luogo dei punti del piano  $Re - \alpha$  oppure  $Re - \omega$  per i quali la crescita risulta nulla.

## 2.4 Onde di Tollmien-Schlichting

Il processo iniziale della transizione è la trasformazione dei disturbi esterni in oscillazioni instabili all'interno dello strato limite. Le prime soluzioni dell'equazione di Orr-Sommerfeld per lo strato limite di Blasius furono ottenuti da Tollmien (1929) [42]-[43] e raffinate in seguito da Schlichting (1933) [32]-[35]. Tollmien e Schlichting prevedero analiticamente l'esistenza di onde bidimensionali ( $\beta = 0$ ) e instabili che sono, come soluzioni, modi normali che crescono o si smorzano esponenzialmente. L'esistenza di queste onde fu verificata sperimentalmente da Schubauer e Skramstad [38]. Fisicamente, le onde di Tollmien-Schlichting hanno la caratteristica di viaggiare in direzione della corrente con vorticità orientata trasversalmente. Le onde Tollmien-Schlichting seguono il "ramo primario" dello schema della transizione (percorso A nella Fig. 1.5 ).

## 2.5 Teorema di Squire

Per semplicità si considera la stabilità temporale, ovvero  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $Re$  sono noti e reali, mentre  $c$  non è noto ed è complesso. I modi del problema (2.7) sono di due tipi (per la dimostrazione vedere Appendice C):

1. i modi dell'equazione di Orr-Sommerfeld (2.7), per la quale le autofunzioni  $v$  e gli autovalori  $c$  possono essere determinati indipendentemente dall'equazione 2.7 e la  $\eta$  di conseguenza dopo aver risolto l'equazione 2.7.
2. i modi propri della prima equazione *omogenea*, ovvero

$$i\alpha(U - c)\eta - Re^{-1}\Delta\eta = 0.$$

In realtà, ai fini della stabilità, basta studiare la sola equazione di Orr-Sommerfeld in quanto i modi propri di  $\eta$  sono sempre stabili (vedere la dimostrazione in Appendice C). Pertanto, l'eventuale instabilità del problema (2.7) può essere causata esclusivamente dai modi instabili dell'equazione di Orr-Sommerfeld. Per quanto riguarda i modi di quest'ultima, si osservi che dividendo tutti i termini per  $i\alpha$  si ha

$$(U - c)[v'' - (\alpha^2 + \beta^2)v] - U''v = \frac{1}{i\alpha Re} [v'''' - 2(\alpha^2 + \beta^2)v'' + (\alpha^2 + \beta^2)^2v], \quad (2.8)$$

1. essendo  $c = \omega/\alpha$ . Si osservi che gli unici parametri che compaiono in essa sono il quadrato del numero d'onda  $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$  e  $i\alpha Re$ . Pertanto, se un certo valore di  $\alpha Re = a$  causa la prima instabilità temporale (ovvero il primo passaggio di  $\text{Im}(c)$  da negativa a positiva) e ad esso corrisponde un certo valore di  $\alpha^2 + \beta^2 = b^2$ , allora il numero di Reynolds più piccolo al quale questo succede si ha in corrispondenza del massimo valore di  $\alpha$  ( $Re = a/\alpha$ ). Tuttavia, se  $\alpha^2 + \beta^2$  è fissato, il massimo valore di  $\alpha$  si ha proprio in corrispondenza di  $\beta = 0$ . Questo significa che, a parità di altri parametri, la prima instabilità di un flusso base piano e parallelo si verifica ad un numero di Reynolds più basso se il disturbo è bidimensionale ( $\beta = 0$ ). Pertanto, il caso più limitante è quello bidimensionale.

## 2.6 Equazioni perturbative adottate

Questo studio comincia prendendo spunto dal problema agli autovalori dell'equazione di Orr-Sommerfeld (Sez. 2.3) dopo aver analizzato le equazioni di Navier-Stokes, adimensionalizzate opportunamente, (eq. 2.2), dove la soluzione esatta rappresenta il flusso base parallelo  $U(y)$  per lo strato limite laminare di Blasius che è un flusso stazionario. Una volta noto il flusso base si devono cercare delle soluzioni che abbiano la forma di un'onda

che viaggia a valle, periodica in  $x$ ,  $z$  e  $t$  ( $c_i = 0$ , parte immaginaria della velocità dell'onda (Sez. 2.3)).

Per ottenere questo scopo si occorre apportare una leggera modifica alle equazioni di Navier-Stokes, rendendole indipendenti dal tempo: si considera un sistema di riferimento mobile che si muove sincrono con la velocità dell'onda  $c_r$  (autovalore o velocità di fase dell'onda), quindi si effettua una trasformazione, definendo la variabile  $X$ :

$$X = x - c_r t \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -c_r \frac{\partial u}{\partial X}.$$

Successivamente si definiscono le perturbazioni della velocità:  $(u', v', w') = (u'(x, y, z, t), v'(x, y, z, t), w'(x, y, z, t))$  che sono rispettivamente le perturbazioni in direzione parallela alla corrente, normale alla lastra e trasversale alla corrente e  $p' = p'(x, y, z, t)$  che è il disturbo della pressione. Si definisce nuovamente il vettore velocità che tiene conto delle perturbazioni che si sovrappongono al flusso base, vale a dire:

$$\mathbf{u} = U(y)\mathbf{i} + \mathbf{u}'.$$

Le nuove equazioni governanti prenderanno la forma di equazioni perturbative per via delle perturbazioni imposte al flusso base, quindi diventeranno nuovamente:

$$\left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) = 0, \quad (2.9)$$

$$-c_r \frac{\partial u'}{\partial X} + u' \frac{\partial u'}{\partial X} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} + \bar{U} \frac{\partial u'}{\partial X} + v' \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} = -\frac{\partial p'}{\partial X} + \frac{1}{Re_\delta} \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \right), \quad (2.10)$$

$$-c_r \frac{\partial v'}{\partial X} + \bar{U} \frac{\partial v'}{\partial X} + u' \frac{\partial v'}{\partial X} + v' \frac{\partial v'}{\partial y} + w' \frac{\partial v'}{\partial z} = -\frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{1}{Re_\delta} \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} \right), \quad (2.11)$$

$$-c_r \frac{\partial w'}{\partial X} + \bar{U} \frac{\partial w'}{\partial X} + u' \frac{\partial w'}{\partial X} + v' \frac{\partial w'}{\partial y} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{1}{Re_\delta} \left( \frac{\partial^2 w'}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right). \quad (2.12)$$

## 2.7 Espansioni adottate

La soluzione generale non lineare per il vettore velocità viene espressa mediante espansione di Fourier (vedere Appendice F) nella forma

$$\mathbf{u}' = \sum_{b=-NX}^{NX} \sum_{j=-NZ}^{NZ} \sum_{i=0}^{NY} \hat{\mathbf{u}}_{bji} \Theta_i(y) e^{Ij\beta z} e^{Ib\alpha(x-ct)},$$

dove  $I = \sqrt{-1}$ . Il troncamento impiegato consente di giungere ad una soluzione numerica che tende a convergere alla soluzione effettiva. La funzione  $\Theta_i(y)$  è una funzione modificata del polinomio di Chebyshev (Sez. 2.9). La soluzione interessante è la soluzione reale, quindi:

$$\hat{\mathbf{u}}_{bji} = \hat{\mathbf{u}}_{-b-j,i}^*$$

dove '\*' indica il complesso coniugato del termine  $\hat{\mathbf{u}}_{bji}$ . Quindi è sufficiente considerare solo  $b \geq 0$ , e quando è necessario calcolare per  $b < 0$  si utilizza il complesso coniugato. La soluzione si scrive:

$$\mathbf{u}' = \sum_{b=0}^{NX} \sum_{j=-NZ}^{NZ} \sum_{i=0}^{NY} \hat{\mathbf{u}}_{bji} \Theta_i(y) e^{Ij\beta z} e^{Ib\alpha(x-ct)} + c.c., \quad (2.13)$$

dove *c.c.* indica il complesso coniugato.

Per la soluzione lineare generale delle equazioni perturbative si può rappresentare come:

$$\mathbf{u}' = \sum_{i=0}^{NY} \hat{\mathbf{u}}_{11i} \Theta_i^{\mathbf{u}}(y) e^{I\beta z} e^{I\alpha(x-ct)} \quad (2.14)$$

dove  $\Theta_i^{\mathbf{u}}(y)$  dipende dalla componente della velocità.

Una definizione dell'energia cinetica della perturbazione, in forma adimensionale, può essere rappresentata in questo modo:

$$E' = \frac{\hat{E}'}{\hat{\delta}^3 \hat{U}_{\infty}^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} \int_0^{y_{max}} [(u')^2 + (v')^2 + (w')^2] dx dy dz$$

L'energia è una grandezza molto importante per la misura della non linearità delle perturbazioni come descritto nell'introduzione (e. 1.1). Questa grandezza sarà infatti impiegata nello studio non lineare per mettere in relazione l'energia di un disturbo con il numero di Reynolds ( $Re_{\delta}$ ).

## 2.8 Problema agli autovalori

La prima parte di questo lavoro ha mirato a riportare alcuni risultati già ottenuti da calcoli precedenti, avvalendosi del codice descritto nella Sez. 2.12 e facendo riferimento ai risultati ottenuti da Henningson [36] in merito alle soluzioni lineari delle equazioni di Navier-Stokes. Considerando le tre equazioni perturbative (2.10-2.11-2.12) si dovrà giungere ad un problema agli autovalori per calcolare le relative soluzioni lineari. Il passo iniziale per arrivarci sarà quello di isolare il termine temporale  $\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t}$  dal resto delle equazioni di Navier-Stokes.

Si considera l'espansione lineare  $\sum_{i=0}^{NY} \hat{\mathbf{u}}_{11i} \Theta_i^{\mathbf{u}}(y) e^{I\alpha(x-ct)} e^{I\beta z}$ , la si sostituisce nelle equazioni linearizzate ottenendo nuovamente le seguenti equazioni:

$$0 = I\alpha u(y) + v_y(y) + I\beta w(y), \quad (2.15)$$

$$-cI\alpha u(y) = -I\alpha \bar{U}u(y) - v(y)\bar{U}_y - I\alpha p(y) + \frac{1}{Re_\delta}[-(\beta^2 + \alpha^2)u(y) + u_{yy}(y)], \quad (2.16)$$

$$-cI\alpha v(y) = -I\alpha \bar{U}v(y) - p_y(y) + \frac{1}{Re_\delta}[-(\beta^2 + \alpha^2)v(y) + v_{yy}(y)], \quad (2.17)$$

$$-cI\alpha w(y) = -I\alpha \bar{U}w(y) - I\beta p(y) + \frac{1}{Re_\delta}[-(\beta^2 + \alpha^2)w(y) + w_{yy}(y)]. \quad (2.18)$$

Queste equazioni (2.15-2.18) costituiscono il problema agli autovalori generalizzato o meglio:

$$c \underline{\underline{A}} \mathbf{x} = \underline{\underline{B}} \mathbf{x} \quad (2.19)$$

Quindi il primo membro (escluso  $c$ ) rappresenta la matrice  $\underline{\underline{A}}$ , mentre  $c$  rappresenta l'autovalore,  $\hat{\mathbf{u}}_{11i}$  l'autovettore associato all'autovalore  $c$ , indicato in (2.19) come  $\mathbf{x}$ .

Si premette che nel problema agli autovalori del codice non è presente ne il termine della pressione ne il termine della velocità  $u$ , infatti la prima scompare in seguito a semplificazioni (Appendice B) mentre la seconda viene espressa in funzione dell'equazione di continuità in maniera tale da trasformare il problema agli autovalori iniziale, che è un'equazione differenziale del secondo ordine nelle incognite  $(u, v, w, p)$ , in una del quarto ordine nelle incognite  $(v, w, p)$ . Gli autovettori o coefficienti  $\hat{\mathbf{u}}_{11i}$  sono in totale  $2(NY + 1)$ . Una rappresentazione delle matrici  $\underline{\underline{A}}$  e  $\underline{\underline{B}}$  è indicata in Appendice.



## 2.9 Polinomi di Chebyshev

Sia il problema agli autovalori generalizzato (B.9) che quello non lineare viene risolto numericamente utilizzando un metodo di collocazione spettrale basato sui polinomi di Chebyshev. Si considera

$$T_i(\eta) = \cos(i \cos^{-1}(\eta)) \quad (2.20)$$

che è il polinomio di Chebyshev di grado  $i$  definito nell'intervallo  $-1 \leq \eta \leq 1$ . Si utilizzano

$$\eta_i = \cos \frac{\pi i}{NY}, \quad i = 0, 1, \dots, NY, \quad (2.21)$$

come punti di collocazione, cioè, l'estremo del polinomio di Chebyshev di ordine  $NY$  più i punti finali dell'intervallo. Il dominio in direzione normale alle pareti varia tra 0 e  $y_{max}$ , con  $y_{max}$  ben fuori dallo strato limite ( $y_{max}$  è uguale a 50). Il motivo per cui scegliamo questo valore di  $y_{max}$  è proprio perché il flusso risente meno dell'effetto dello strato limite. Per soddisfare le condizioni di Dirichlet e di Neumann si definiscono

$$\Theta_i(\eta(y)) = (1 - \eta^2)T_i(\eta), \quad \eta = \eta(y) \quad \textit{Dirichlet},$$

per la velocità  $u$  e  $w$ ; cioè  $u = w = 0$  sia per  $\eta = -1$  ( $y = 0$ ) che per  $\eta = +1$  ( $y = 50$ )

$$\Theta_i(\eta(y)) = (1 - \eta^2)^2 T_i(\eta), \quad \eta = \eta(y) \quad \textit{Neumann},$$

per la velocità  $v$ ; cioè  $v = \frac{dv}{dy} = 0$  sia per  $\eta = -1$  ( $y = 0$ ) che per  $\eta = +1$  ( $y = 50$ ).

Secondo Andersson (2000) [1] l'intervallo di Chebyshev  $-1 \leq \eta \leq 1$  è trasformato in un dominio computazionale  $0 \leq y \leq y_{max}$  dall'utilizzo delle trasformazioni conformi

$$y = a \frac{1 + \eta}{b - \eta} \quad (2.22)$$

dove

$$a = \frac{y_i y_{max}}{y_{max} - 2y_i} \quad \text{e} \quad b = 1 + \frac{2a}{y_{max}}.$$

Per mezzo di questa trasformazione si ottiene una rappresentazione particolare per i punti

di collocazione: vicino alla lastra piana si avrà che i punti sono più densi per via della maggior precisione richiesta rispetto alla zona lontano dalla lastra. Infatti dal momento che esiste uno strato limite sopra la lastra, dove la soluzione cambia rapidamente, si avrà bisogno di più punti in questa regione allo scopo di risolvere il moto del fluido. La metà dei punti della griglia quindi saranno nella regione  $0 \leq y \leq y_i$  con  $y_i$  scelto uguale a 8. I coefficienti  $\hat{\mathbf{u}}_{bji}$  sono determinati dal problema agli autovalori o dal problema non lineare che richiede d'imporre le equazioni di bilancio nei punti di collocazione  $y_i$ , con  $i = 1, \dots, NY + 1$ .

## 2.10 Metodo di Galerkin

Si definisce una funzione  $\mathbf{F} = (F_u, F_v, F_w \text{ ed eq. continuità})$  chiamata funzione "residuo":

$$\mathbf{F} = -c_r \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{p} - \frac{1}{Re_\delta} \nabla^2 \mathbf{u}.$$

Il metodo di Galerkin, a differenza del polinomio di Chebyshev, impone che la media del residuo della funzione  $\mathbf{F}$  sia nulla per ogni troncamento utilizzato.

Questo metodo viene impiegato per la risoluzione delle equazioni lineari o non lineari adottando l'ortogonalità tra i modi normali:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} \mathbf{F} e^{-I\alpha b X} e^{-I\beta j z} dX dz = 0$$

dove  $b = 0, 1, 2, \dots, NX$  e  $j = 0, 1, 2, \dots, NZ$  sono definiti "test function". Questo modo impone le equazioni in  $x$  e  $z$  mentre il polinomio di Chebyshev in  $y$ .

## 2.11 Metodo di Newton Raphson

Tra i metodi di risoluzione delle equazioni non lineari più veloci si considera il metodo di Newton Raphson. Prendendo spunto dalla forma scalare

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

dove  $f'(x_n) = \frac{df(x_n)}{dx}$ , la cui dimostrazione è spiegata in Appendice E, ciò che interessa in particolare è la relativa forma vettoriale, cioè quella adottata dal codice di calcolo per la risoluzione delle equazioni perturbative non lineari. Tale algoritmo si presenta come:

$$-\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}'(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta\mathbf{x}$$

con  $\mathbf{F} = (F_u, F_v, F_w, \text{eq, di continuità})$  rappresentante le equazioni di Navier-Stokes, mentre  $\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}$  rappresenta la matrice Jacobiana. Con questa relazione (2.23) si risolvono le equazioni ripetutamente finché si arriverà ad una convergenza della soluzione  $\tilde{\mathbf{x}}$ , o meglio quando la funzione residuo  $|\mathbf{F}| \ll 1$  (per esempio  $|\mathbf{F}| = 10^{-12}$ ) e  $|\Delta\mathbf{x}| \ll 1$ . La soluzione  $\tilde{\mathbf{x}}$  corrisponde ai coefficienti di Fourier  $\hat{u}_{bji}, \hat{v}_{bji}, \hat{w}_{bji}$  presenti nelle espansioni non lineari (2.13).

## 2.12 Codice di calcolo

I vari calcoli per la risoluzione delle equazioni lineari e non lineari sono stati implementati su un apposito codice scritto in FORTRAN, il cui compilatore utilizzato è il iFORT (Intel Fortran Compiler) per ambiente LINUX. Per il tracciamento dei vari grafici si è fatto uso di MATLAB e GNUPLOT.

Qui segue una breve descrizione sui pacchetti impiegati come subroutine per il codice per trovare sia le soluzioni lineari che quelle non lineari.

### 2.12.1 LAPACK

Questo pacchetto consente al codice di risolvere il problema agli autovalori per le equazioni lineari e il problema non lineare. L'algoritmo classico a cui si fa riferimento questo pacchetto nel caso in cui si voglia conoscere lo spettro completo degli autovalori è il metodo  $QZ$  (variante del metodo  $QR$  per la ricerca degli autovalori di una matrice).

### 2.12.2 PITCON

Per trovare le soluzioni non lineari delle equazioni di Navier-Stokes viene utilizzato un pacchetto chiamato PITCON. Questo pacchetto fu sviluppato da Rheinholdt e Burkardt (1983a) [30] (1983b) [31] utilizza il metodo di Newton-Raphson (2.11) per trovare una soluzione convergente per le equazioni non lineari. PITCON può essere utilizzato per la risoluzione di qualsiasi equazione differenziale alle derivate parziali. Infatti questo pacchetto verrà aggiunto come subroutine al codice che implementerà i vari calcoli.

L'utente fornisce a PITCON una condizione iniziale (gli autovettori ricavati dal problema agli autovalori per la risoluzione delle equazioni lineari) ed eventualmente codifica una matrice, la jacobiana che aiuterà gradualmente a migliorare la condizione iniziale (cioè i coefficienti di Fourier più gli autovalori  $c$ ). Alternativamente PITCON può essere impostato per generare da solo la Jacobiana, quindi non si prevede nessuna codificazione di questa matrice da parte dell'utente, ma così i calcoli sarebbero più lenti.

# Capitolo 3

## Risultati (1<sup>a</sup> parte)

### 3.1 Validazione del codice

Dopo aver introdotto accuratamente il problema agli autovalori per il caso lineare si sono riprodotti alcuni risultati, precedentemente già ottenuti da Henningson [36], convalidando in questo modo il codice impiegato.

Il primo calcolo consiste nella ricerca della velocità di fase dell'onda espressa come autovalore complesso  $c$  ( parte reale  $c_r$  e immaginaria  $c_i$ ) considerando  $\beta = 0$  e  $\beta \neq 0$  e valori di  $\alpha$  e  $Re$  prefissati.

La Fig.3.1 mostra un grafico (a sinistra) con in ordinata gli autovalori  $c_i$  mentre in ascissa si hanno gli autovalori  $c_r$ . Il grafico presenta un numero esiguo di modi sul ramo più a sinistra (quello più discreto) e una linea quasi verticale (a destra) con una serie di autovalori ravvicinati.

La posizione di questi autovalori nel grafico è dipendente sia dal metodo numerico che dai parametri numerici utilizzati (risoluzione, dominio, troncamento, corrente libera, condizioni al contorno).

Gli autovalori posti in questa linea verticale varieranno ma qualitativamente saranno in accordo con lo spettro riportato. Aumentando il troncamento  $NY$  il ramo a destra sarà sempre più verticale, per contro il tempo impiegato per renderlo verticale sarà tanto più lungo quanto maggiore sarà il troncamento assegnato.

Lo strato limite ha almeno un modo instabile, denotato anche come onda di Tollmien-Schlichting per  $\beta = 0$ . Questo modo instabile è stato chiamato così in onore dei ricercatori che per primi dimostrarono che l'equazione di Orr-Sommerfeld ha disturbi instabili per flussi senza punti di flesso (Sez. 2.4). Questo modo ha una velocità di fase  $c_r$  piuttosto

bassa ed ha anche la massima ampiezza vicino al muro. In Fig.3.1 vengono rappresentati due grafici uno relativo al caso  $\beta = 0$  (sinistra) e l'altro  $\beta \neq 0$  (destra) .

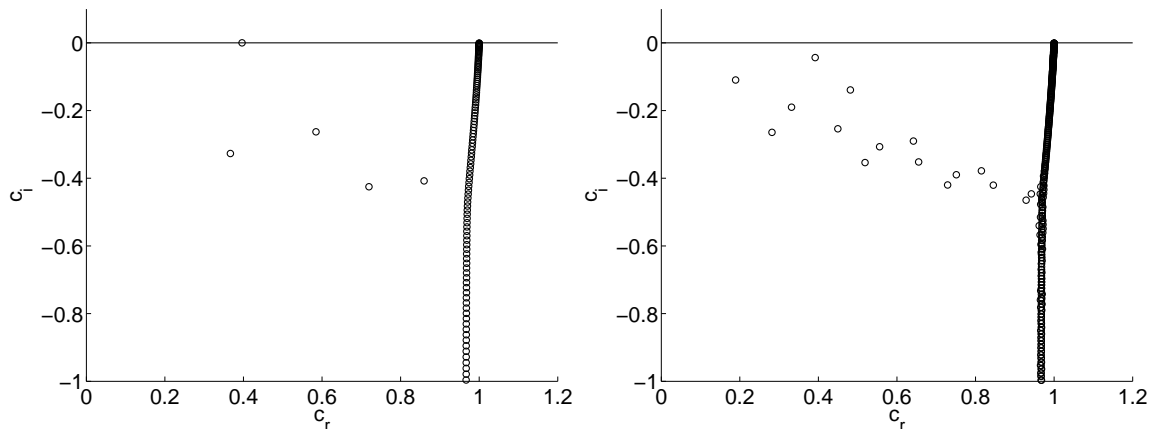


Figura 3.1: A sinistra si ha lo spettro ottenuto numericamente che visualizza una rappresentazione discreta degli autovalori con un troncamento  $NY$  pari a 500, mentre i parametri sono:  $\alpha = 0.176$ ,  $\beta = 0$  e  $Re_\delta = 301.6$ . Si può notare l'onda neutra  $c_i = 0$  (Tollmien-Schlichting) in alto a sinistra. Mentre a destra si ha lo spettro ottenuto numericamente visualizzante una rappresentazione discreta degli autovalori con un troncamento  $NY$  pari a 500, mentre i parametri sono:  $\alpha = 0.291$ ,  $\beta = 0.058$  e  $Re_\delta = 464.9$ . Per questo spettro tutti gli autovalori sono stabili ( $c_i < 0$ ) di conseguenza anche lo stesso risulta stabile.

Costruite le matrici degli autovalori sia per  $\beta = 0$  che per  $\beta \neq 0$ , si sono ricavati gli autovettori corrispondenti agli autovalori, in entrambi i casi.

Nel primo caso si è ricavato il numero di Reynolds critico per la curva neutra (cioè quella corrispondente a  $c_i = 0$ ). Questo numero di Reynolds si discosta leggermente da quello calcolato precedentemente da Henningson perché si è adottato un codice numerico diverso. L'autovalore considerato è sempre quello corrispondente all'onda di Tollmien-Schlichting quindi quello neutro all'interno dello strato limite.

Nella tabella 3.1 sono riportati i valori riferiti sia a quelli rappresentati dal libro di Henningson che quelli riferiti al codice numerico presente. Si evidenzia come il codice riproduce fedelmente i valori riportati da Henningson riguardanti il punto critico per disturbi 2D, questo dimostra la veridicità del codice utilizzato per questo studio.

La Fig. 3.2 riporta le autofunzioni per  $u$  e il rispettivo modulo relativi agli autovettori ricercati precedentemente per  $\beta = 0$ :

$Re_\delta$	$\alpha$	$Re_\delta^*$	$\alpha^*$	$\beta$	$\beta^*$	Fonti
301.8	0.176	519.4	0.303	0	0	Henningson
301.6	0.176	519.1	0.303	0	0	codice presente
464.9	0.291	800	0.5	0.058	0.1	Henningson

Tabella 3.1: Tabella contenente i valori sia di Henningson [36] che quelli ottenuti utilizzando il codice presente.

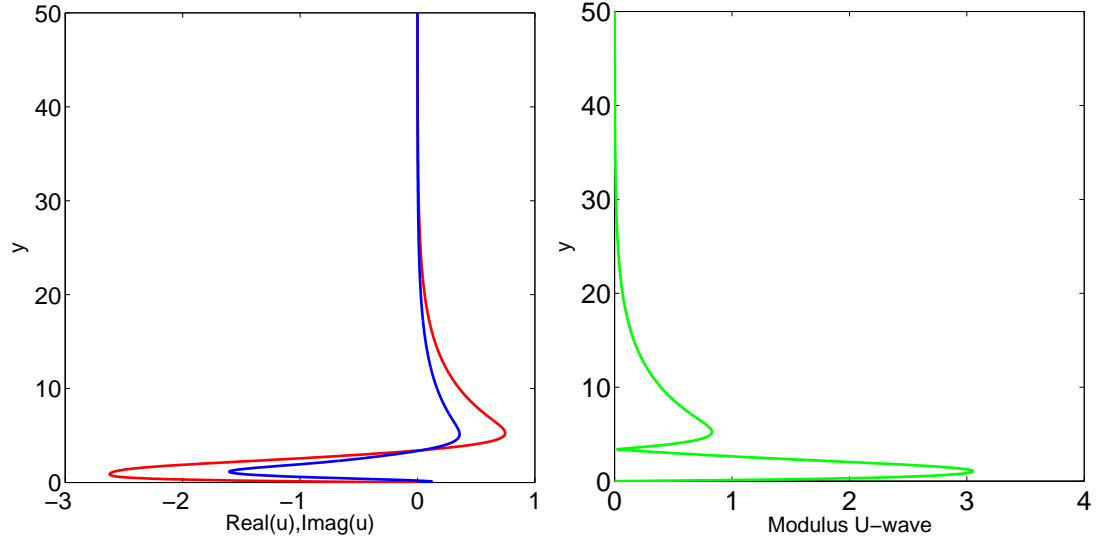


Figura 3.2: A sinistra parte reale (in rosso) e parte immaginaria (in blu) dell'autofunzione relativa all'onda di Tollmien-Schlichting appartenente al ramo discreto in direzione della velocità  $u$  ottenuti adottando un troncamento  $NY$  pari a 200. A destra si ha, invece, una rappresentazione del modulo (in verde) dello spettro discreto in direzione parallela al flusso, della velocità  $u$ , adottando sempre un troncamento  $NY$  pari a 200. I valori adottati per questa misurazione sono quelli riferiti al codice presente:  $\alpha = 0.176$ ,  $\beta = 0$  e  $Re_\delta = 301.6$ .

Si nota chiaramente come il modulo della perturbazione presenta due massimi uno in prossimità della lastra e uno leggermente inferiore poco più lontano in prossimità dell'altezza dello strato limite. Si nota anche come la perturbazione si annulla asintoticamente man mano che ci si allontana dalla lastra raggiungendo il valore nullo per  $y = y_{max} = 50$ .

La Fig. 3.3 riporta le autofunzioni per  $v$  e il rispettivo modulo relativi agli autovettori ricercati precedentemente per  $\beta = 0$ :

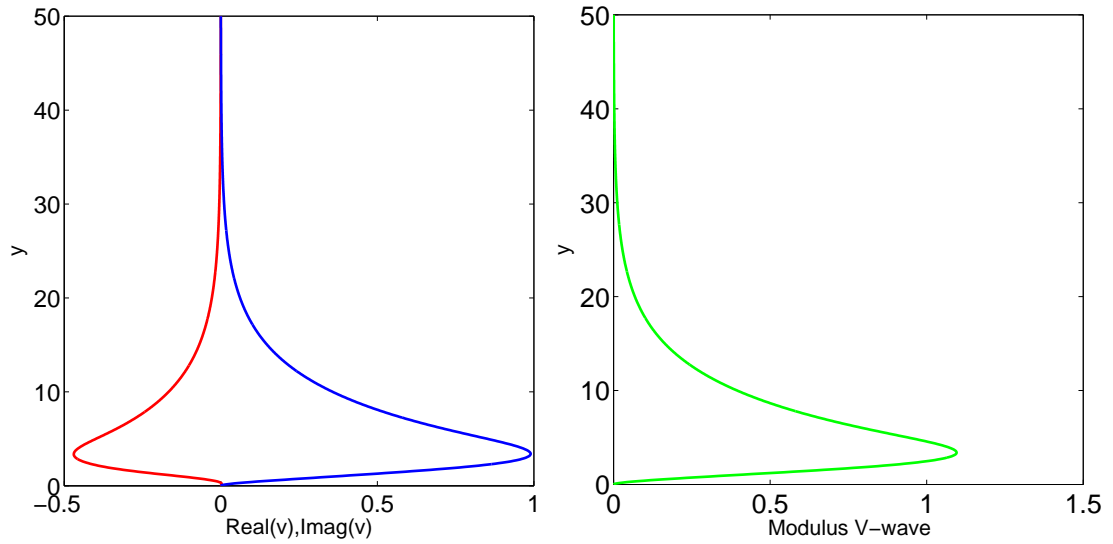


Figura 3.3: A sinistra parte reale (in rosso) e parte immaginaria (in blu) dell'autofunzione relativa all'onda di Tollmien-Schlichting appartenente al ramo discreto in direzione della velocità  $v$  ottenuti adottando un troncamento  $NY$  pari a 200. A destra si ha, invece, una rappresentazione del modulo (in verde) dello spettro discreto in direzione verticale al flusso, della velocità  $v$ , adottando sempre un troncamento  $NY$  pari a 200. I valori adottati per questa misurazione sono quelli riferiti al codice presente:  $\alpha = 0.176$ ,  $\beta = 0$  e  $Re_\delta = 301.6$ .

La differenza rispetto alla figura precedente è che il modulo della perturbazione presenta un solo massimo questo dovuto alla sola presenza della lastra e non della corrente che è in direzione  $x$ .

Ovviamente essendo  $\beta = 0$  la velocità  $w$  risulta nulla.

In Fig. 3.4 sono riportati i grafici delle autofunzioni per  $u$  e il rispettivo modulo considerando questa volta i valori riportati nel libro di Henningson per il caso  $\beta \neq 0$ :



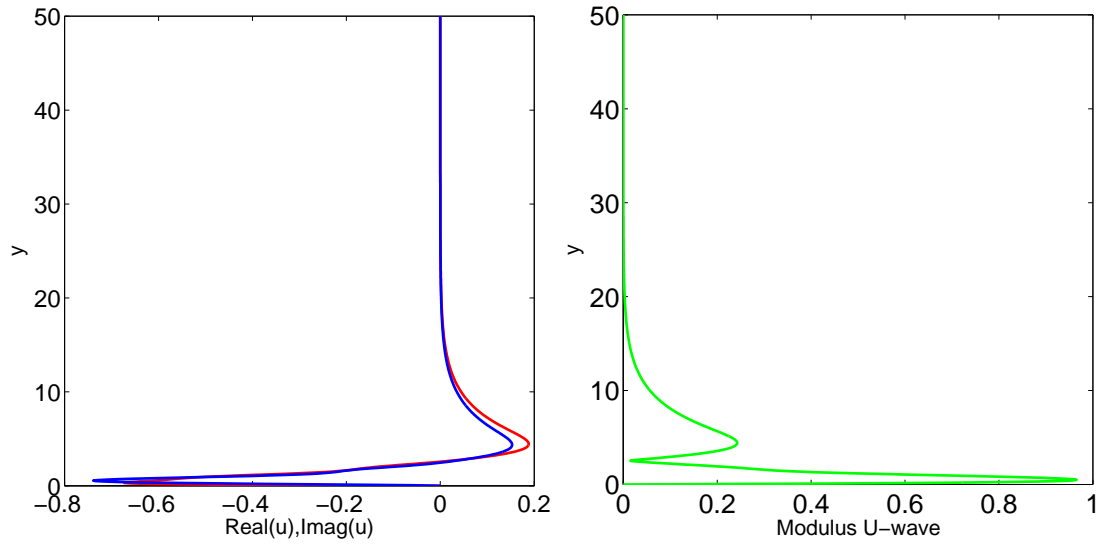


Figura 3.4: A sinistra parte reale (in rosso) e parte immaginaria (in blu) dell'autofunzione relativa all'onda di Tollmien-Schlichting appartenente al ramo discreto in direzione della velocità  $u$  ottenuti adottando un troncamento  $NY$  pari a 200. A destra si ha, invece, una rappresentazione del modulo (in verde) dello spettro discreto in direzione parallela, della velocità  $u$ , adottando sempre un troncamento  $NY$  pari a 200. I valori adottati per questa misurazione sono quelli riferiti al codice presente:  $\alpha = 0.291$ ,  $\beta = 0.058$  e  $Re_\delta = 464.9$ .

Anche qui il modulo della perturbazione in direzione  $x$  presenta due massimi come nel caso bidimensionale e man mano che ci si allontana dalla lastra l'intensità della perturbazione tende ad annullarsi fino ad essere totalmente 0 per  $y = 50$  imposta dalle condizioni al contorno.

La Fig. 3.5 riporta le autofunzioni per  $v$  e il rispettivo modulo relativi ai valori riportati nel libro di Henningson per  $\beta \neq 0$ :

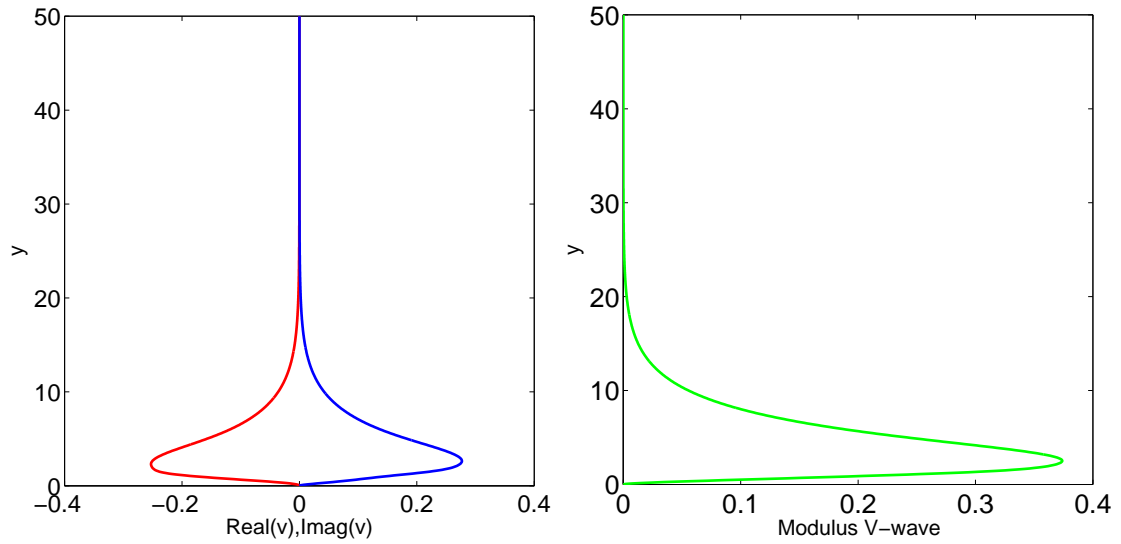


Figura 3.5: A sinistra parte reale (in rosso) e parte immaginaria (in blu) dell'autofunzione relativa all'onda di Tollmien-Schlichting appartenente al ramo discreto in direzione della velocità  $v$  ottenuti adottando un troncamento  $NY$  pari a 200. A destra si ha, invece, una rappresentazione del modulo (in verde) dello spettro discreto in direzione verticale, della velocità  $v$ , adottando sempre un troncamento  $NY$  pari a 200. I valori adottati per questa misurazione sono quelli riferiti al codice presente:  $\alpha = 0.291$ ,  $\beta = 0.058$  e  $Re_\delta = 464.9$ .

La Fig. 3.6 riporta le autofunzioni per  $w$  e il rispettivo modulo relativi ai valori riportati nel libro di Henningson per  $\beta \neq 0$ :

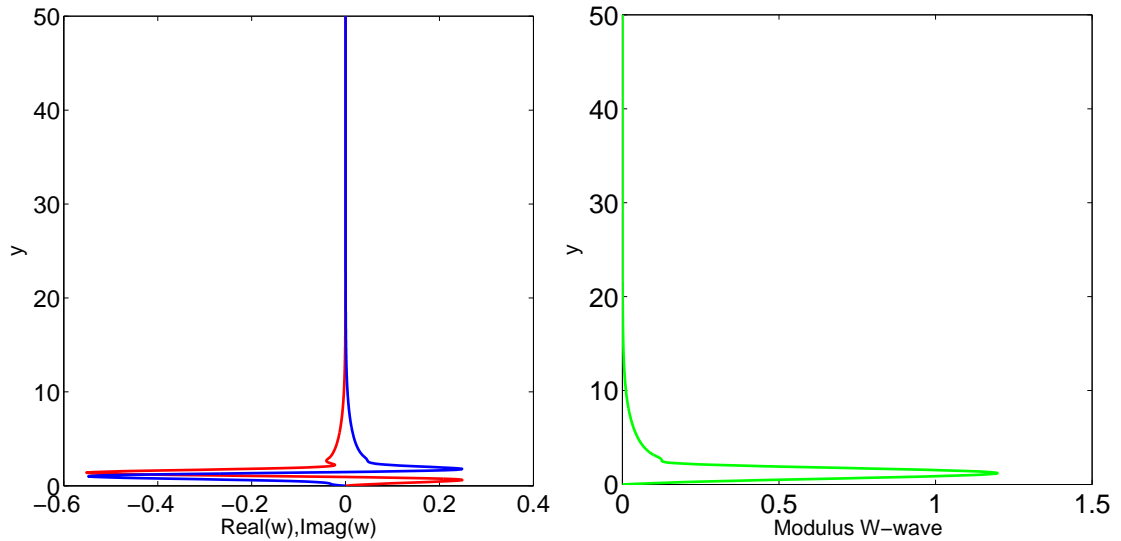


Figura 3.6: A sinistra parte reale (in rosso) e parte immaginaria (in blu) dell'autofunzione relativa all'onda di Tollmien-Schlichting appartenente al ramo discreto in direzione della velocità  $w$  ottenuti adottando un troncamento  $NY$  pari a 200. A destra si ha, invece, una rappresentazione del modulo (in verde) dello spettro discreto in direzione trasversale della velocità  $w$  adottando sempre un troncamento  $NY$  pari a 200. I valori adottati per questa misurazione sono quelli riferiti al codice presente:  $\alpha = 0.291$ ,  $\beta = 0.058$  e  $Re_\delta = 464.9$ .

Qui si nota la distribuzione del modulo della perturbazione  $w$  dove presenta un massimo molto vicino alla lastra piana. Si noti anche la presenza di due massimi positivi e negativi nell'auto funzione.

La rappresentazione del modulo risulta utile perché fornisce una panoramica delle soluzioni trovate (si effettua la norma delle autofunzioni).

Qui di seguito è stata rappresentata una sezione trasversale, nel piano  $z$ - $y$ , delle perturbazioni  $u$ ,  $v$  e  $w$  (Fig. 3.7):

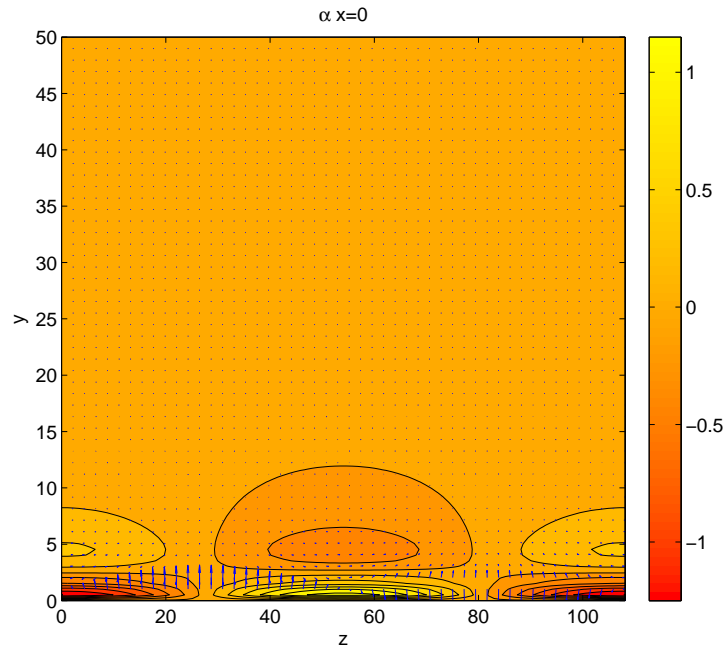


Figura 3.7: Rappresentazione nel piano trasversale della perturbazione 3D:  $\alpha = 0.291$ ,  $\beta = 0.058$  e  $Re_\delta = 464.9$ .

I cerchi più scuri indica la valle della perturbazione  $u$  mentre quelli più chiari rappresentano le creste. Essendo molto basso il numero d'onda in direzione trasversale  $\beta$ , i vortici che si formano sono praticamente trascurabili. Si può notare come la presenza delle perturbazioni influisce molto la regione poco sopra la lastra in accordo alla rappresentazione del modulo delle perturbazioni calcolato precedentemente.

## 3.2 Curva neutra

La soluzione numerica data dall'equazione di Orr-Sommerfeld permette di identificare nel piano  $Re_\delta$ - $\alpha$  una curva neutra costituita dal luogo dei punti in cui  $c_i = 0$ , ovvero, questa curva è data dall'intersezione tra il piano ad energia nulla con una superficie di stabilità neutra nello spazio avente come assi di riferimento: l'energia, il numero di Reynolds e il numero d'onda spaziale.

Nella figura (3.8) sono rappresentate le curve neutre per diversi valori di  $\beta$ . Queste curve delimitano due regioni:

1. quella interna dove il moto risulta instabile perché le soluzioni crescono esponenzialmente ( $c_i > 0$ ),

2. quella esterna dove le soluzioni decrescono esponenzialmente ( $c_i < 0$ ).

L'estremo più a sinistra di questa regione definisce il numero più basso di Reynolds in corrispondenza del quale esiste un autovalore  $c_i = 0$ . Questo numero di Reynolds è definito numero critico di Reynolds (il numero critico è indicato in Tab. 3.1 e per  $\beta = 0$  corrisponde a  $\alpha = 0.176$  e  $Re_\delta = 301.6$ ). Quando il numero di Reynolds è superiore al valore critico  $c_i$  cambia segno due volte mentre per valori di Reynolds inferiori al numero critico il flusso risulta stabile.

Nella Fig. 3.8 sono state tracciate 5 curve neutre per 5 valori diversi di  $\beta$ . Si può notare che la curva per  $\beta = 0$ , la regione d'instabilità è più ampia rispetto alle altre curve come è dimostrato in effetti dal Teorema di Squire 2.5 (un disturbo bidimensionale è più instabile di uno tridimensionale). Infatti man mano che il numero d'onda  $\beta$  aumenta:

1. La regione d'instabilità diminuisce,
2. Il valore di  $Re_{\delta_{cri}}$  trasla verso destra per valori superiori,
3. Il valore di  $\alpha_{cri}$  trasla verso il basso per valori inferiori.

Da  $\beta = 0.2$  in su è stato difficile rilevare la curva neutra, ne seguono due ipotesi:

- o il regime di flusso è sempre linearmente stabile per qualsiasi valore di  $Re_\delta$  oppure,
- il regime d'instabilità avviene per valori di  $Re_\delta$  molto grandi,
- la regione d'instabilità tende sempre a diventare man mano più sottile da non poter essere visualizzata.

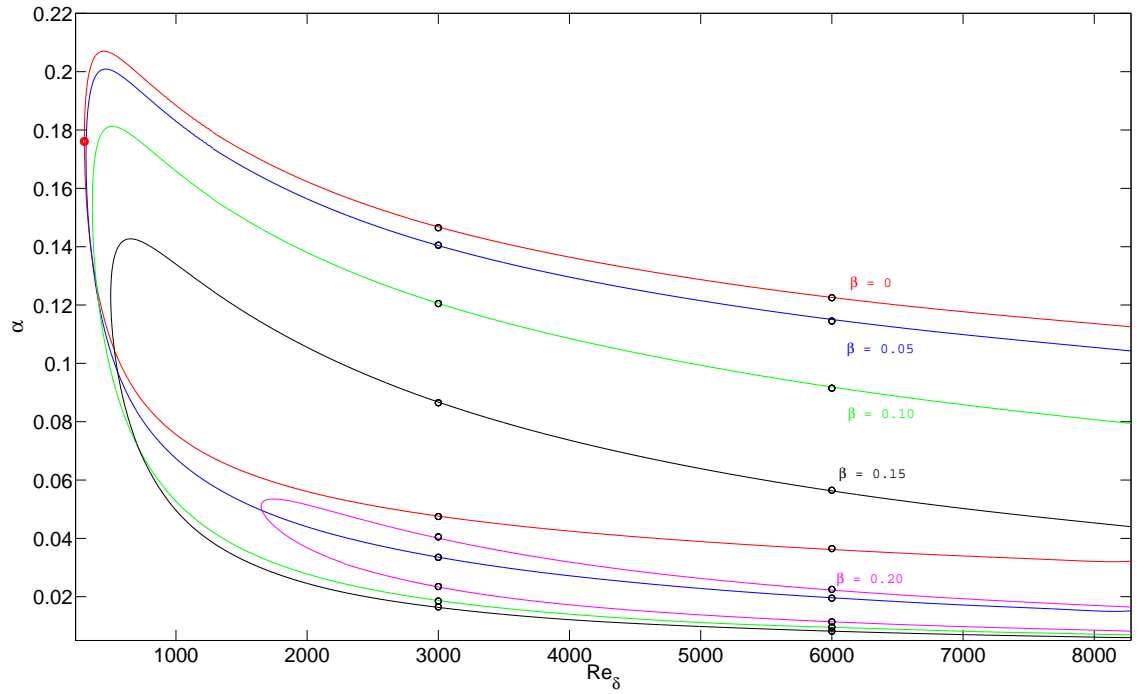


Figura 3.8: Curve neutre per 5 diversi valori di  $\beta$ : la linea delimita il valore di  $c_i = 0$  adottando un troncamento  $NY$  pari a 60 e con valori di  $\beta = 0$  (rosso),  $\beta = 0.05$  (blu),  $\beta = 0.1$  (verde),  $\beta = 0.15$  (nero) e  $\beta = 0.2$  (rosa). Per dimostrare che  $NY = 60$  termini sono sufficienti, sono stati effettuati due calcoli per  $Re_\delta = 3000$  e  $Re_\delta = 6000$  adottando un troncamento  $NY = 200$  visualizzati come dei cerchi su ogni curva. In effetti i cerchi combaciano perfettamente con le curve di conseguenza la soluzione è attendibile.

# Capitolo 4

## Risultati (2<sup>a</sup> parte)

La seconda parte di questo lavoro, che caratterizza il vero obiettivo della tesi, mira a ricercare alcune soluzioni non lineari (TWS) caratteristiche del flusso nello strato limite su una lastra piana.

Lo studio preliminare delle equazioni lineari è utile per fornire una condizione iniziale per lo studio non lineare. Infatti per ampiezze molto piccole delle perturbazioni, le soluzioni non lineari coincidono con le soluzioni lineari.

Quindi si ha un punto di riferimento in base al quale si possono calcolare le soluzioni non lineari che rappresentano poi effettivamente il flusso perturbativo.

Un sistema lineare ha sempre un'unica soluzione di equilibrio, che può essere stabile o instabile a seconda del valore assunto dal parametro  $Re_\delta$ . Nel caso stabile l'evoluzione tende al punto di equilibrio a partire da qualsiasi condizione iniziale, mentre nel caso instabile l'evoluzione diverge sempre.

Per un sistema non lineare, è un po' più arduo accertare la stabilità o instabilità del flusso dal momento che le soluzioni di equilibrio sono più di una.

Le equazioni perturbative considerate (2.9-2.12), saranno completate di tutti i termini non lineari per il motivo sopra descritto (le perturbazioni non sono infinitesime ma di ampiezza finita). La soluzione in forma vettoriale di queste equazioni sarà la (2.13) in forma integrale.

Per risolvere queste equazioni numericamente si adotta il metodo di Newton-Raphson in forma vettoriale (Sez. 2.11), a cui dovrà essere fornita obbligatoriamente una condizione iniziale per poter procedere con le iterazioni e ricercare le relative soluzioni ogni qualvolta si verifica una convergenza.

Quindi una volta ricavata la curva neutra per  $\beta = 0$  (Sez. 3.2) si è preso un punto

particolare di questa curva scelto come riferimento ai risultati precedentemente ottenuti da Rotenberry [29]. Da questo punto con una serie di iterazioni biforcherà la soluzione non lineare (TWS) che avrà un andamento variabile in funzione dei parametri del punto iniziale considerato.

La biforcazione della soluzione non lineare da una soluzione lineare avviene per  $Re_\delta = Re_{\delta_i}$  e per  $E' = 0$  dove  $Re_{\delta_i}$  corrisponde al numero di Reynolds dove la soluzione non lineare inizia a biforcare ed è lo stesso punto in cui inizia la regione d'instabilità lineare. Si denota invece con  $Re_{\delta_f}$  il punto in cui, a parità di  $\alpha$ , termina la regione d'instabilità lineare del flusso).

I tipi di biforcazione possono essere di tipo *supercritica* o *sottocritica*.

- per il tipo *supercritica* si ha che per  $E' = 0$  il flusso è quello base ed è stabile per  $Re_\delta < Re_{\delta_i}$ , solo linearmente per  $Re_\delta > Re_{\delta_f}$  e instabile sempre per  $Re_{\delta_i} < Re_\delta < Re_{\delta_f}$
- per il tipo *sottocritica* si ha che il flusso base è linearmente stabile per  $Re_\delta < Re_{\delta_i}$  ma non linearmente, almeno fino a quando si raggiunge un punto oltrepassato il quale il flusso risulta stabile globalmente. Per  $Re_\delta > Re_{\delta_f}$  è stabile solo linearmente mentre risulta instabile per  $Re_{\delta_i} < Re_\delta < Re_{\delta_f}$ .

Per il primo tipo se si perturbasse il flusso con una perturbazione di ampiezza finita con valore di  $Re_\delta < Re_{\delta_i}$  il flusso risulterà sempre stabile per qualsiasi valore di ampiezza imposta, mentre per  $Re_{\delta_i} < Re_\delta < Re_{\delta_f}$ , essendo il flusso base linearmente instabile, imponendo una perturbazione di ampiezza finita al flusso, esso sarà instabile se l'ampiezza sarà grande tale da intersecare la curva della soluzione non lineare (TWS). Per il secondo caso, se s'impone una perturbazione di ampiezza finita al flusso per  $Re_\delta < Re_{\delta_i}$  si potrà giungere ad una TWS.

I calcoli seguenti che vengono affrontati prendono spunto da uno studio già eseguito precedentemente da Rotenberry [29], che tracciò le soluzioni non lineari per disturbi bidimensionali e per due diversi valori di  $\alpha$ .

Una premessa per la condizione della fase dove per la velocità  $v$  ad un'altezza  $y = 3$  vale la condizione:

$$\hat{v}_{b=1, j=-1}^{real}(y = 3) = 1$$



$$\hat{v}_{b=1, j=-1}^{imag}(y=3) = 0$$

## 4.1 Validazione del codice

Considerando l'autovettore corrispondente all'autovalore  $c_i = 0$ , ed i relativi parametri:  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 0.15$  e  $Re_\delta \simeq 327,2$  che corrisponde al punto appartenente alla curva neutra da cui biforcherà la soluzione non lineare, è stata applicata una perturbazione a questa soluzione iniziale (lineare) in modo che l'ampiezza iniziale della soluzione non lineare fosse all'incirca zero, in questo modo si facilitava l'impiego del metodo di Newton-Raphson. Dopo una serie di cicli iterativi utilizzando diversi troncamenti si è giunti ad una soluzione convergente adottando come troncamento:  $NX = 4$ ,  $NY = 60$ ,  $NZ = 33$  (Fig. 4.1):

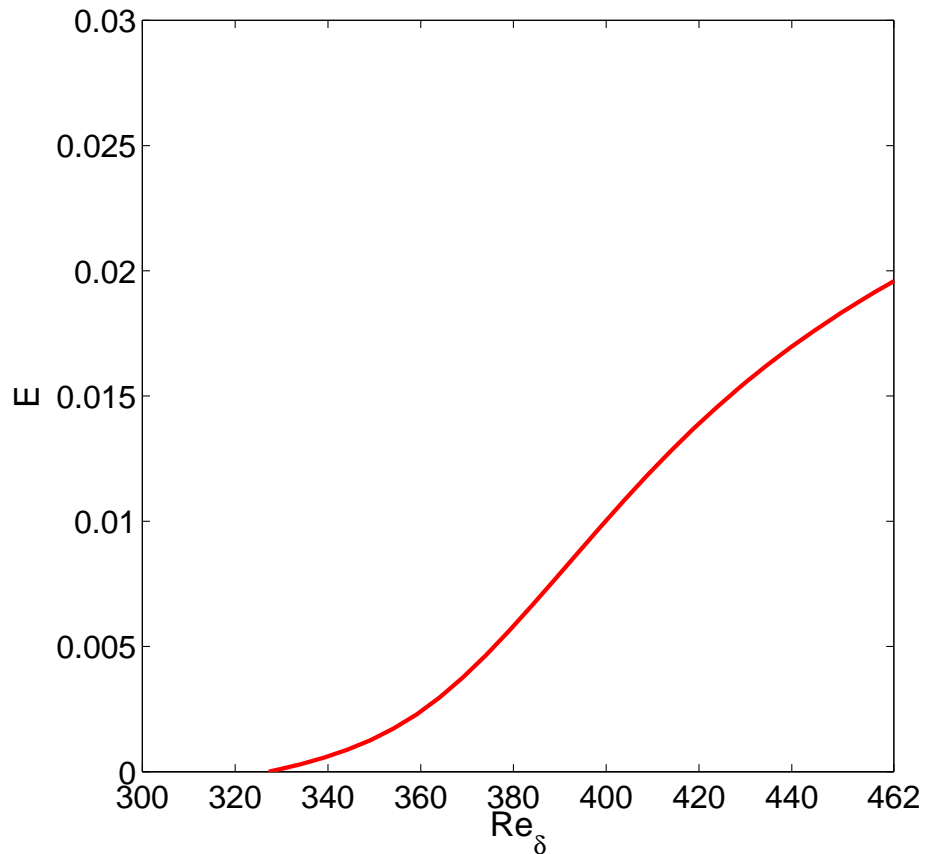


Figura 4.1: Rappresentazione della TWS avente come parametri della soluzione iniziale lineare ( $E' = 0$ ):  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 0.15$   $Re_\delta = 327.2$ .

Questo tipo di biforcazione è supercritica. Si nota un punto di flesso iniziale della curva. Con lo stesso procedimento ma con una condizione iniziale differente (autovettore corrispondente all'autovalore  $c_i = 0$  e parametri pari a:  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 0.1966$  e  $Re_\delta \simeq 326$ ) si è giunti ad una soluzione convergente utilizzando come troncamento:  $NX = 3$ ,  $NY = 60$ ,  $NZ = 54$ , rappresentata in Fig. 4.2, questa volta sottocritica.

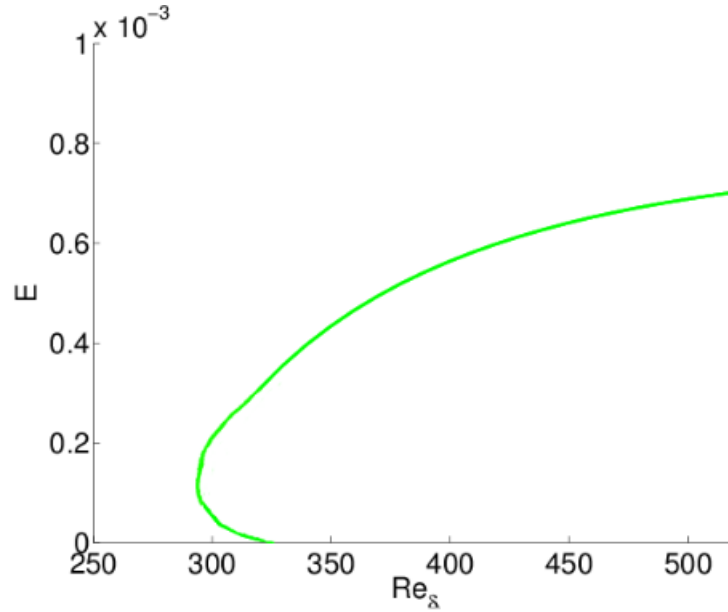


Figura 4.2: Rappresentazione della TWS avente come parametri della soluzione iniziale lineare:  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 0.1966$  e  $Re_\delta \simeq 326$ .

Si può notare come inizialmente l'energia aumenta con il diminuire di  $Re_\delta$  fino a quando la curva raggiunge il minimo numero di  $Re_\delta$  poi tende ad aumentare con l'aumentare di  $Re_\delta$  illimitatamente o magari giunti ad un certo valore di  $Re_\delta$  la soluzione tenderà a ricongiungersi nel secondo punto della curva neutra, sempre con lo stesso valore di  $\alpha = 0.1966$ .

# Capitolo 5

## Conclusioni

Lo studio di questa tesi si è concluso ricavando alcune delle TWS per disturbi bidimensionali all'interno dello strato limite su una lastra piana. La loro ricerca necessitava però di un'analisi preliminare della stabilità lineare.

Si è seguito il modello di Orr-Sommerfeld, inerente alla stabilità temporale del flusso, in cui si pongono come problema agli autovalori generalizzato le equazioni perturbative linearizzate del flusso e considera come autovalore  $c$  in notazione complessa ( $c_i < 0$ : flusso stabile,  $c_i > 0$ : flusso instabile).

I primi risultati ottenuti, basati su uno studio precedente (Schmid & Henningson [36]), riportano lo spettro degli autovalori sia per disturbi bidimensionali ( $\alpha = 0.176$ ,  $\beta = 0$ ,  $Re_\delta = 301.65$ ) che per disturbi tridimensionali ( $\alpha = 0.291$ ,  $\beta = 0.058$ ,  $Re_\delta = 464.9$ ) e mettono in relazione la velocità di fase reale  $c_r$  con il tasso di crescita immaginario  $c_i$ . In tutte e due le rappresentazioni si sono individuati due rami dello spettro come descritto dalla teoria: uno discreto, di cui il modo meno stabile rappresenta l'onda di Tollmien-Schlichting, riporta la  $c_r$  all'interno dello strato limite e un ramo più continuo verticale che riporta una serie di modi tutti stabili rappresentanti le  $c_r$  al di fuori dello strato limite. In seguito si sono calcolati gli autovettori corrispondenti agli autovalori meno stabili riportando le distribuzioni delle autofunzioni e del modulo. La rappresentazione di quest'ultimo da una panoramica di come sia la distribuzione della perturbazione. Ad esempio, per la perturbazione in direzione parallela al flusso viene mostrata la presenza di due massimi: quello maggiore prossimo alla lastra piana mentre l'altro inferiore poco più distante dalla lastra.

Successivamente sono state riprodotte alcune curve della stabilità neutra che separano la regione stabile da quella instabile del flusso. Ogni curva è data dal luogo dei punti in

cui il tasso di crescita immaginaria risulta nullo ovvero quando la stabilità è neutra. Si può notare che, come dimostra il teorema di Squire, con l'aumentare del parametro  $\beta$  la regione d'instabilità si riduce sempre più: per  $\beta > 0.2$  è stato difficile trovare le curve neutre e i motivi possono essere tre:

1. il flusso è sempre stabile,
2. il flusso diventa instabile per  $Re_\delta$  molto grandi,
3. oppure la regione d'instabilità è talmente piccola da non poter essere rilevata dal codice.

Ad ogni modo l'analisi lineare della stabilità risulta semplificata (per la mancanza dei termini non lineari) ma necessaria per fornire una condizione iniziale per lo studio della stabilità non lineare. Infatti per perturbazioni di ampiezza infinitesima le soluzioni non lineari coincidono con le soluzioni lineari.

Prendendo spunto dallo studio di Rotenberry [36] si è considerata la curva neutra, posta nel piano  $Re_\delta - \alpha$ , per disturbi bidimensionali ( $\beta = 0$ ). Da due punti della curva, uno con  $\alpha < \alpha_{cri}$  e l'altro con  $\alpha > \alpha_{cri}$  rispettivamente, sono state fatte "biforcare" le soluzioni non lineari poste nel piano  $Re_\delta - E'$ , dove  $E'$  rappresenta l'energia dell'onda con il suo asse perpendicolare al piano  $Re_\delta - \alpha$  in cui giace la curva neutra.

Nello specifico, la prima soluzione non lineare considera come condizione iniziale la soluzione lineare con i relativi parametri pari a:  $\alpha = 0.15$ ,  $\beta = 0$  e  $Re_{\delta_i} \simeq 327$ . Si mostra che l'energia dell'onda aumenta sempre con l'aumentare di  $Re_\delta$  (biforcazione supercritica) presentando all'inizio un punto di flesso. Ciò dimostra che per  $Re_\delta < Re_{\delta_i}$  il flusso risulta linearmente stabile mentre, per  $Re_\delta > Re_{\delta_i}$ , imponendo al flusso una perturbazione di ampiezza finita tale da giungere ad una soluzione non lineare (TWS), il flusso può risultare instabile.

La seconda soluzione non lineare considera come condizione iniziale la soluzione lineare con i parametri pari a  $\alpha = 0.1966$ ,  $\beta = 0$  e  $Re_{\delta_i} \simeq 326$ . La biforcazione risulta sottocritica, ovvero, l'energia dell'onda inizialmente aumenta con il diminuire di  $Re_\delta$  mentre, giunti ad un certo valore minimo di  $Re_\delta$ , l'energia ricomincia ad aumentare. Questa soluzione è molto importante perché porta a definire (almeno per questi valori iniziali) il  $Re_\delta$ , sotto il quale il flusso risulta globalmente stabile qualsiasi sia l'ampiezza della perturbazione imposta al flusso. Per  $295 \lesssim Re_\delta \lesssim 326$  il flusso risulta stabile linearmente ma instabile non linearmente, se viene imposta una perturbazione di ampiezza finita al flusso tale da giungere ad una soluzione non lineare. Per  $Re_\delta \gtrsim 326$  il flusso risulta linearmente e non

linearmente instabile fino ad un certo valore di  $Re_\delta$  dove il flusso, a parità di  $\alpha$ , è di nuovo linearmente stabile.

## 5.1 Studi futuri

Questa tesi mira ad aprire la strada a studi ulteriori in merito alla ricerca sulle TWS. Un primo lavoro si potrebbe porre come obiettivo quello di verificare dove termina il secondo estremo di una TWS, visto che è appurato che il primo estremo coincide con la soluzione lineare. Un simile studio permetterebbe di stabilire se il secondo estremo di una TWS potrebbe essere localizzato in un punto appartenente al secondo ramo della curva neutra avente lo stesso valore di  $\alpha$  della soluzione lineare, considerata come condizione iniziale, oppure in un altro punto ancora.

Sarebbe fondamentale studiare varie soluzioni non lineari per poter definire in maniera efficiente il campo d'instabilità del flusso. In pratica occorre far biforcare le soluzioni non lineari da vari punti, posti sulla curva neutra oppure da punti posti proprio sulle soluzioni non lineari calcolate precedentemente e considerate come condizioni iniziali: il risultato sarebbe una ramificazione molto fitta di soluzioni che allargherebbero sostanzialmente la visualizzazione del campo d'instabilità del flusso.

Ulteriori approfondimenti migliorerebbero l'approccio a quello che è uno dei campi della fisica e dell'ingegneria più ostici ed intricati ossia il fenomeno della transizione alla turbolenza.

# Appendice A

## Derivazione dell'equazione di Blasius

Lo sviluppo della soluzione incomprimibile di Blasius inizia con le equazioni bidimensionali di Navier-Stokes (trascurando gli effetti di galleggiamento);

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.3})$$

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (\text{A.4})$$

Le equazioni di Navier-Stokes sono semplificate utilizzando le seguenti assunzioni da applicare agli strati limite:

1. Lo spessore dello strato limite ( $\delta$ ) è piccolo,  $Re \gg 1$
2. Lo strato limite è laminare
3. Gli effetti di galleggiamento sono trascurabili,  $Fr \gg 1$
4. La velocità della corrente libera  $U_e$  è costante, o  $\frac{dU_e}{dx} = 0$ ,  $\frac{dp}{dx} = 0$  dove  $x$  è la direzione della corrente e  $y$  la direzione normale alla superficie

dove la (1) e la (2) sono le assunzioni delle equazioni dello strato limite, e (3) e (4) sono le assunzioni della soluzione di Blasius.

Queste assunzioni producono le seguenti semplificazioni alle equazioni di Navier-Stokes.

$$\frac{\partial}{\partial t} \approx 0 \quad (\text{continuo}) \quad (\text{A.5})$$

$$u \gg v \quad (\text{strato limite sottile}) \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y} \quad (\text{strato limite sottile}) \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla p = 0 \quad (\text{velocità lungo la corrente costante}) \quad (\text{A.8})$$

Applicando le assunzioni (A.5)-(A.8) alle (A.1)-(A.4) si ottiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{A.10})$$

$$\rho C_p (u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu (\frac{\partial u}{\partial x})^2 \quad (\text{A.11})$$

con le seguenti condizioni al contorno

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0. \quad u(x, \infty) = U_e \quad (\text{A.12})$$

Notare che l'equazione della quantità in direzione  $y$  di moto è sparita. Questo è dovuto alle assunzioni A.5-A.7

Allo scopo di rimuovere l'equazione di continuità, una funzione di corrente ( $\psi$ ) è introdotta per soddisfare la seguente relazione

$$\psi(x, y) = \int_0^y u dy \quad (\text{A.13})$$

$$\text{così che } u(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La funzione di corrente può avere anche la seguente forma

$$\psi(x, y) = \lambda(x) f(\eta) \quad (\text{A.14})$$

$$\text{dove } \eta = \eta(x, y)$$

Applicando la (A.14) alla (A.13) si ottiene

$$u = \lambda \frac{\partial \eta}{\partial y} f' \quad (\text{A.15})$$

$$v = -\frac{d\lambda}{dx} f - \lambda \frac{\partial \eta}{\partial x} f' \quad (\text{A.16})$$

$$\text{dove} \quad f' \equiv \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

Inoltre, assumendo che  $\eta$  è lineare in  $y$  si arrivano alle seguenti relazioni

$$\eta = yg(x) \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = y \frac{dg}{dx} = \eta \frac{g'}{g} \rightarrow yg \frac{g'}{g} = gg' \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = g \quad (\text{A.19})$$

Inserendo la (A.17)-(A.19) nella (A.15) e (A.16) per ottenere

$$u = \lambda g(x) \quad (\text{A.20})$$

$$v = -\lambda' f - \lambda \eta \frac{g'}{g} f' \quad (\text{A.21})$$

Finalmente,  $\lambda$  può essere eliminato osservando che  $u(x, \infty) = U_e$  se  $f'(\infty) = 1$ , così

$$\lambda = \frac{U_e}{g} \quad (\text{A.22})$$

$$\lambda' = -\frac{U_e g'}{g^2} \quad (\text{A.23})$$

che una volta inserita nella (A.16) si ottengono le seguenti equazioni

$$u = U_e f' \quad (\text{A.24})$$

$$v = \frac{U_e g'}{g^2} (f - \eta f') \quad (\text{A.25})$$

così come le seguenti derivate

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U_e \frac{\eta g'}{g} f'' \quad (\text{A.26})$$



$$\frac{\partial u}{\partial y} = U_e g f'' \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U_e g^2 f''' \quad (\text{A.28})$$

Per le equazioni al contorno date nella (A.12) risulta

$$f(0) = 0 \quad \text{aderenza} \quad (\text{A.29})$$

$$f'(0) = 0 \quad \text{aderenza} \quad (\text{A.30})$$

$$f'(\infty) = 1 \quad \text{freestream merge} \quad (\text{A.31})$$

Con la A.24 e la A.26 , l'equazione della quantità di moto semplificata (A.10) diventa (con qualche semplificazione)

$$f''' - \frac{U_e g'}{\nu g^3} f f'' = 0 \quad (\text{A.32})$$

Il problema ora si risolve trovando una valida scelta di  $g(x)$  cosicché (A.32) sia indipendente da  $x$ . Per trovare la  $g(x)$  necessaria, s'impone il coefficiente

$$-\frac{U_e g'}{\nu g^3} = 1$$

e si risolve per  $g$  per ottenere

$$g(x) = \sqrt{\frac{U_e}{2\nu x}} \quad (\text{A.33})$$

Finalmente, combinando la (A.17),(A.30),(A.32),(A.33), e nella (A.34) si arriva alla completa definizione della soluzione di Blasius

$$f''' + f f'' \equiv 0 \quad (\text{A.34})$$

con le condizioni al contorno

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1$$

dove

$$f = f(\eta), \quad \eta = y \sqrt{\frac{U_e}{2\nu x}}$$

Notare che nello sviluppo della soluzione finale di Blasius, l'equazione dell'energia (A.11) non è stata utilizzata; così è completamente disaccoppiata dalle equazioni di continuità e

dalle equazioni della quantità di moto e può essere risolta separatamente dalla soluzione di Blasius.

Per completare questo sviluppo, i valori per  $u$  e  $v$  così come le tensioni tangenziali al muro necessitano di essere sviluppate. Utilizzando la (A.33) può essere dimostrato che

$$u(\eta) = U_e f'(\eta) \tag{A.35}$$

$$\begin{aligned} v(\eta) &= v g(x) [\eta f'(\eta) - f(\eta)] \\ &= \sqrt{\frac{v U_e}{2x}} [\eta f'(\eta) - f(\eta)] \end{aligned} \tag{A.36}$$

Infine, le tensioni tangenziali al muro possono essere

$$\tau_w \equiv \eta \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_w = \eta U_e g(x) f''(0) \tag{A.37}$$

e la derivazione è completa.

# Appendice B

## Equazione di Orr-Sommerfeld

Sommando alle componenti del flusso base  $U(y)$ , che si considera parallelo, stazionario e monodimensionale, le componenti della perturbazione 2.6 nelle equazioni linearizzate di Navier-Stokes si ottiene il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} i\alpha u + v' + i\beta w = 0 \\ i(\alpha U - \alpha c)u + U'v = -i\alpha p + \frac{1}{Re}\Delta u \\ i(\alpha U - \alpha c)v = -p' + \frac{1}{Re}\Delta v \\ i(\alpha U - \alpha c)w = -i\beta p + \frac{1}{Re}\Delta w \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

dove il simbolo  $\Delta$  denota l'operatore laplaciano

$$\Delta = \frac{d^2}{dy^2}(\alpha^2 + \beta^2),$$

e dove  $U'$  si è indicato  $\frac{dU}{dy}$  e analogamente  $v' = \frac{dv}{dy}$  e  $p' = \frac{dp}{dy}$ , essendo tutte funzioni della sola  $y$ . Con l'intento di ridurre il numero delle incognite da quattro a due, s'introduce la componente della vorticità nella direzione  $y$ :

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{B.2})$$

Quindi sostituendo in (B.2) con le (2.6) diventa:

$$\eta = i\beta u - i\alpha w \quad (\text{B.3})$$

in modo da riscrivere le equazioni (B.1) nelle sole incognite  $(\eta, v)$ .

Si osserva innanzitutto che risolvendo per le variabili  $(u, w)$  il sistema formato dalla definizione di  $\eta$  (B.3) e dall'equazione di continuità (la prima del sistema B.1), si ottengono immediatamente le espressioni di  $u$  e  $w$

$$u = \frac{i(\alpha v' - \beta \eta)}{\alpha^2 + \beta^2} \quad e \quad w = \frac{i(\alpha \eta + \beta v')}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (\text{B.4})$$

Moltiplicando ora la seconda equazione del sistema (B.1) per  $i\beta$  e la quarta equazione dello stesso sistema per  $i\alpha$

$$i(\alpha U - \alpha c)i\beta u + U'i\beta v = \alpha\beta p + \frac{1}{Re}\Delta i\beta u$$

$$i(\alpha U - \alpha c)i\alpha w = \alpha\beta p + \frac{1}{Re}\Delta i\alpha w,$$

e sottraiamo la seconda dalla prima ottenendo

$$i(\alpha U - \alpha c)[i\beta u - i\alpha w] + U'i\beta v = \frac{1}{Re}\Delta[i\beta u - i\alpha w].$$

Usando la definizione di  $\eta$  (si vede l'equazione (B.3)), questa equazione diventa semplicemente

$$i(\alpha U - \alpha c)\eta + U'i\beta v = \frac{1}{Re}\Delta\eta. \quad (\text{B.5})$$

Concentrandosi sulla quarta equazione del sistema (B.1) e sostituendo in essa l'espressione (B.4) per  $w$

$$i(\alpha U - \alpha c)\frac{i(\alpha \eta + \beta v')}{\alpha^2 + \beta^2} = -i\beta p + \frac{i\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}\frac{1}{Re}\Delta\eta + \frac{i\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\frac{1}{Re}\Delta v'.$$

Rimpiazzando in quest'ultima  $\frac{\Delta\eta}{Re}$  con l'espressione ricavata dall'equazione (B.5), semplificando l'unità immaginaria  $i$  in tutti i termini e moltiplicando per  $(\alpha^2 + \beta^2)$  si ha

$$i(\alpha U - \alpha c)(\alpha \eta + \beta v') = -\beta(\alpha^2 + \beta^2)p + \alpha[i(\alpha U - \alpha c)\eta + U'i\beta v] + \beta\frac{1}{Re}\Delta v',$$

da cui, elidendo il termine  $i(\alpha U - \alpha c)\alpha \eta$  a destra e sinistra e semplificando i rimanenti termini per  $\beta$ , si ottiene

$$i(\alpha U - \alpha c)v' = -(\alpha^2 + \beta^2)p + i\alpha U'v + \frac{1}{Re}\Delta v'. \quad (\text{B.6})$$

Si osservi che questa equazione contiene le incognite  $p$  e  $v$ , così come la seconda equazione del sistema (B.1), mentre l'idea originaria era di riscrivere il sistema di equazioni (B.1) nelle sole incognite  $(\eta$  e  $v)$ .

La pressione  $p$  può essere facilmente eliminata sia dalla la seconda equazione del sistema (B.1) che dalla (B.6) sommando le equazioni ottenute moltiplicando la seconda equazione

del sistema (B.1) per  $-(\alpha^2 + \beta^2)$  e derivando la (B.6) rispetto a  $y$ . Così facendo si hanno le due equazioni

$$\begin{aligned} -i(\alpha U - \alpha c)(\alpha^2 + \beta^2)v &= (\alpha^2 + \beta^2)p' - (\alpha^2 + \beta^2)\frac{1}{Re}\Delta v \\ i\alpha U'v' + i(\alpha U - \alpha c)v'' &= -(\alpha^2 + \beta^2)p' + i\alpha U''v + i\alpha U'v + \frac{1}{Re}\Delta v'', \end{aligned}$$

che sommate danno, dopo aver eliso  $i\alpha U'v'$  a destra e a sinistra della seconda,

$$i(\alpha U - \alpha c)[v'' - (\alpha^2 + \beta^2)v] = i\alpha U''v + \frac{1}{Re}\Delta[v'' - (\alpha^2 + \beta^2)v].$$

Dopo aver osservato che  $v'' - (\alpha^2 + \beta^2)v = \Delta v$ , questa equazione può essere riscritta in modo compatto come

$$i(\alpha U - \alpha c)\Delta v - i\alpha U''v = \frac{1}{Re}\Delta\Delta v, \quad (\text{B.7})$$

che è un'equazione differenziale ordinaria del quarto ordine e omogenea per la sola incognita  $v$ . Essa fu derivata indipendentemente da ORR (1907) e SOMMERFELD (1908) e per questa ragione prende il nome di equazione di Orr-Sommerfeld. Le opportune condizioni al contorno ad essa associate richiedono che la perturbazione si annulli agli estremi del dominio:

$$v(0) = v'(0) = 0; \quad v(\infty) = v'(\infty) = 0 \quad \text{strati limite}$$

In conclusione, il sistema di equazioni lineari (B.1 nelle incognite  $(u, v, w, p)$ ) è stato ricondotto alle sole equazioni (B.5) e (B.7) nelle incognite  $(\eta, v)$ , ovvero i due sistemi

$$\begin{cases} i\alpha u + v' + i\beta w = 0 \\ i(\alpha U - \alpha c)u + U'v = -i\alpha p + \frac{1}{Re}\Delta u \\ i(\alpha U - \alpha c)v = -p' + \frac{1}{Re}\Delta v \\ i(\alpha U - \alpha c)w = -i\beta p + \frac{1}{Re}\Delta w \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{cases} i(\alpha U - \alpha c)\eta + i\beta U'v = \frac{1}{Re}\Delta\eta \\ i(\alpha U - \alpha c)\Delta v - i\alpha U''v = \frac{1}{Re}\Delta\Delta v \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

sono del tutto equivalenti.

Si osservi che le condizioni al contorno per  $\eta$  in presenza di pareti solide sono *omogenee* ( $\eta = 0$ ) a seguito della definizione di  $\eta$ . Una possibile strategia di soluzione del problema (2.7) consiste nel risolvere dapprima la seconda equazione ottenendo  $v$  e poi sostituirla nella prima per ottenere  $\eta$ .

# Appendice C

## Teorema di Squire

Ai fini della Per dimostrarlo si riscrive l'equazione omogenea per  $\eta$  (la prima equazione del sistema B.9) esplicitando l'operatore laplaciano  $\Delta = (\cdot)_{yy} - (\alpha^2 + \beta^2)$ , moltiplicando per  $\eta^*$ , il complesso coniugato di  $\eta$ , ed integrandola su tratto l'intervallo di definizione della variabile  $y$  (sia esso finito o infinito).

Così facendo si ottiene

$$\int_{y_{min}}^{y_{max}} i\alpha U \eta^* \eta dy - \int_{y_{min}}^{y_{max}} i\omega \eta \eta^* dy - \int_{y_{min}}^{y_{max}} Re^{-1} \eta^* \eta'' dy + \int_{y_{min}}^{y_{max}} Re^{-1} (\alpha^2 + \beta^2) \eta^* \eta dy = 0.$$

Facendo uso del fatto che, a causa delle condizioni al contorno omogenee per  $\eta$ , anche  $\eta^*$  si annulla agli estremi dell'intervallo  $[y_{min}; y_{max}]$ , l'integrazione per parti del termine  $\eta^* \eta''$  si riduce a

$$\int_{y_{min}}^{y_{max}} \eta^* \eta'' dy = [\eta \eta']_{y_{min}}^{y_{max}} - \int_{y_{min}}^{y_{max}} \eta'^* \eta' dy = - \int_{y_{min}}^{y_{max}} \eta'^* \eta' dy = - \int_{y_{min}}^{y_{max}} |\eta'|^2 dy,$$

l'equazione precedente può essere riscritta come

$$i\alpha \int_{y_{min}}^{y_{max}} U |\eta'|^2 dy - i\omega \int_{y_{min}}^{y_{max}} |\eta|^2 dy + Re^{-1} \int_{y_{min}}^{y_{max}} |\eta'|^2 dy + Re^{-1} (\alpha^2 + \beta^2) \int_{y_{min}}^{y_{max}} |\eta|^2 dy = 0.$$

Siccome  $\alpha, \beta$  e  $Re$  sono reali, prendendo la parte immaginaria di quest'equazione si ottiene

$$Im(\omega) \int_{y_{min}}^{y_{max}} |\eta|^2 dy + Re^{-1} \int_{y_{min}}^{y_{max}} |\eta'|^2 dy + Re^{-1}(\alpha^2 + \beta^2) \int_{y_{min}}^{y_{max}} |\eta|^2 dy = 0,$$

da cui

$$Im(\omega) = -Re^{-1} \left[ \alpha^2 + \beta^2 + \frac{\int_{y_{min}}^{y_{max}} |\eta'|^2 dy}{\int_{y_{min}}^{y_{max}} |\eta|^2 dy} \right] < 0.$$

Siccome la parte immaginaria dell'autovalore  $\omega$  è sempre negativa, i modi propri dell'equazione omogenea per  $\eta$  sono sempre stabili.

# Appendice D

## Influenza della viscosità

### D.1 Stabilità non viscosa

Nel caso limite  $\nu \rightarrow 0$ , ovvero  $Re \rightarrow \infty$ , l'equazione di Orr-Sommerfeld (2.8) si semplifica e prende il nome di equazione di Rayleigh [12], che è del secondo ordine e quindi richiede solo due condizioni al contorno:

$$(U - c) [\tilde{v}'' - \alpha^2 \tilde{v}] - U'' \tilde{v} = 0,$$

dove  $c = \omega/\alpha$  è la velocità di fase (si noti che  $\beta = 0$  perché il caso di disturbo bidimensionale è più limitante). Siccome questa equazione è stata ricavata per il caso limite  $Re \rightarrow \infty$ , essa fornisce preziose informazioni per *correnti ad alto numero di Reynolds*. Dividendo tutti i termini per  $(U - c)$ , moltiplicando per  $\tilde{v}^*$  (l'autofunzione complessa coniugata di  $\tilde{v}$ ) ed integrando sull'intervallo di definizione della variabile  $y$  (sia esso finito o infinito), si ha

$$\int_{y_{min}}^{y_{max}} \tilde{v}^* \tilde{v}'' dy - \int_{y_{min}}^{y_{max}} \alpha^2 \tilde{v}^* \tilde{v} dy - \int_{y_{min}}^{y_{max}} \frac{U''}{U - c} \tilde{v}^* \tilde{v} dy = 0.$$

Osservando che  $\tilde{v}^*$  si annulla agli estremi del dominio, integrando per parti il termine  $\tilde{v}^* \tilde{v}''$  si ottiene

$$\int_{y_{min}}^{y_{max}} \tilde{v}^* \tilde{v}'' dy = [\tilde{v}^* \tilde{v}']_{y_{min}}^{y_{max}} - \int_{y_{min}}^{y_{max}} \tilde{v}'^* \tilde{v}' dy = - \int_{y_{min}}^{y_{max}} \tilde{v}'^* \tilde{v}' dy = - \int_{y_{min}}^{y_{max}} |\tilde{v}'|^2 dy,$$



per cui l'equazione di Rayleigh in forma integrale, dopo aver cambiato di segno, diventa

$$\int_{y_{min}}^{y_{max}} |\tilde{v}'|^2 dy + \int_{y_{min}}^{y_{max}} \alpha^2 |\tilde{v}|^2 dy + \int_{y_{min}}^{y_{max}} \frac{U''}{U - c} |\tilde{v}|^2 dy = 0.$$

Essendo  $c$  complesso, lo è anche la velocità di fase  $c = c_r + ic_i$  per cui la precedente equazione può essere scritta, dopo aver moltiplicato numeratore e denominatore dell'ultima funzione integranda per  $(U - c_r) + ic_i$ ,

$$\int_{y_{min}}^{y_{max}} (|\tilde{v}'|^2 + \alpha^2 |\tilde{v}|^2) dy + \int_{y_{min}}^{y_{max}} \frac{(U - c_r)U''}{(U - c_r)^2 + c_i^2} |\tilde{v}|^2 dy + \int_{y_{min}}^{y_{max}} \frac{ic_i U''}{(U - c_r)^2 + c_i^2} |\tilde{v}|^2 dy = 0.$$

Separando la parte reale e quella immaginaria di questa equazione si ha

$$\text{parte reale : } \int_{y_{min}}^{y_{max}} (|\tilde{v}'|^2 + \alpha^2 |\tilde{v}|^2) dy + \int_{y_{min}}^{y_{max}} \frac{(U - c_r)U''}{(U - c_r)^2 + c_i^2} |\tilde{v}|^2 dy = 0 \quad (\text{D.1})$$

$$c_i \int_{y_{min}}^{y_{max}} \frac{U''}{(U - c_r)^2 + c_i^2} |\tilde{v}| dy = 0. \quad (\text{D.2})$$

Si osservi che nell'integrale della condizione (D.2)  $U''$  è moltiplicato per la quantità  $|\tilde{v}|/[(U - c_r)^2 + c_i^2]$  che è sempre positiva tranne nel caso banale  $v \equiv 0$ . Pertanto, se  $U''$  non cambia segno, ovvero se il profilo di velocità del flusso base non presenta flessi, la condizione (D.2) è soddisfatta solo per  $c_i = 0$ , nel qual caso il flusso base è stabile. Viceversa, affinché il flusso base sia instabile è *necessario* che il profilo di velocità abbia un punto di flesso ad una certa distanza dalla parete che chiamiamo  $y_{ip}$ . FJØRTOF nel 1950 osservò che in realtà, affinché vi sia instabilità viscosa, oltre alla condizione necessaria  $U''(y_{ip}) = 0$ , è ulteriormente necessario che lo shear  $|U'|$  abbia un massimo nel punto di flesso  $y_{ip}$ .

# Appendice E

## Metodo di Newton Raphson

Partendo da un'approssimazione iniziale  $x_0$ , si conduce dal punto  $(x_0, y_0)$ , con  $y_0 = f(x_0)$ , sulla curva  $y = f(x)$  una retta con pendenza  $k_0$ , e si prende come nuova approssimazione  $x_1$  l'intersezione di questa retta con l'asse  $x$ . Si ripete nuovamente tale operazione, prendendo come approssimazione della soluzione sempre la radice dell'equazione lineare

$$y_n + k_n(x - x_n) = 0 \text{ per } n = 0, 1, 2, \dots$$

cioè, essendo la soluzione  $x$  di questa equazione, una nuova approssimazione del risultato,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{k_n} \tag{E.1}$$

Le iterazioni termineranno quando si verifica il test di arresto, ossia

$$|x_{n+1} - x_k| < TOLL \text{ stima dell'errore assoluto}$$

$$\frac{|x_{n+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < TOLL \text{ stima dell'errore relativo}$$

$$|f(x_{k+1})| < TOLL$$

con  $Toll \ll 1$  (Fig. E.1).

I diversi metodi di linearizzazione si differenziano per la scelta del coefficiente  $k_n$ . Nel caso del metodo delle tangenti o di Newton-Raphson:  $k_n = f'(x_n)$ , ossia il coefficiente di una retta tangente nell'ultima approssimazione calcolata, richiedendo una sola approssimazione

iniziale, ma anche l'esistenza di  $f'(x_n)$  per ogni  $n$ . Per la dimostrazione vedere Sez. E.

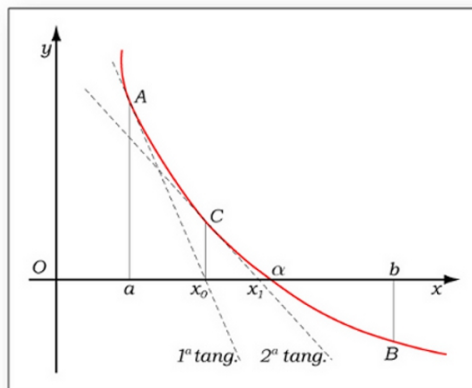


Figura E.1: Il metodo di NEWTON-RAPHSON si applica dopo avere determinato un intervallo che contiene una sola radice. Il metodo consiste nel sostituire alla curva la tangente in uno dei due punti che hanno come ascissa gli estremi dell'intervallo e assumere, come valore approssimato della radice, l'ascissa del punto in cui la tangente interseca l'asse delle  $x$  internamente all'intervallo. Supponiamo che nell'intervallo la funzione e le sue derivate prima e seconda esistano e siano continue e che la derivata prima e seconda siano diverse da zero. Conviene tracciare la tangente nell'estremo dell'intervallo in cui la funzione e la sua derivata seconda hanno lo stesso segno.

## E.1 Derivazione

Per arrivare all'algoritmo (E.1) si usa l'espansione di Taylor, cioè:

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x_1 - x_0)^2 + \dots$$

Se "l'initial guess" è abbastanza vicina alla soluzione  $\tilde{x}$ , si possono cancellare i termini di ordine superiore ( $>1$ ), cioè:

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

se  $x_0$  è abbastanza vicino alla soluzione  $\tilde{x}$  si ha  $f(x_1) \approx 0$ . Si riscrive l'equazione:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

Si risolve per  $x_1$  (il primo passo dell'algoritmo di Newton Raphson)

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

L'equazione si può anche scrivere:

$$-f(x_0) = f'(x_0)\Delta x, \quad \Delta x = x_1 - x_0 \tag{E.2}$$

Si risolve per  $\Delta x$ , poi  $x_1$  si trova tramite:

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

# Appendice F

## Serie di Fourier

La serie di Fourier di una funzione generale  $f(x)$  è

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad (\text{F.1})$$

dove i coefficienti sono

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (\text{F.2})$$

**Prima nota:** per via del fatto che i seni e i coseni sono periodici in  $[0, 2\pi]$ , si può calcolare anche l'espansione di Fourier nell'intervallo  $x \in [0, 2\pi]$ . Il solo cambiamento è che i limiti d'integrazione negli integrali dei coefficienti (F.2) cambiano anche da  $[-\pi, \pi]$  a  $[0, 2\pi]$ .

**Seconda nota:** la serie generale di Fourier può anche essere scritta nella forma complessa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (\text{F.3})$$

dove i coefficienti sono

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (\text{F.4})$$

Le identità

$$\cos(x) \equiv \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \quad \operatorname{sen}(x) \equiv \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (\text{F.5})$$

mostrano che la (F.3) e la (F.1) sono completamente equivalenti, e le utilizzeremo a seconda della necessità. I coefficienti delle due forme sono legati da

$$c_0 = a_0, \quad n = 0$$
$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2}, & n > 0 \\ \frac{a_n + ib_n}{2}, & n < 0 \end{cases}$$

Spesso non è necessario utilizzare la serie di Fourier completa. In particolare, se  $f(x)$  ha la proprietà di essere simmetrica rispetto all'asse  $y$ , ciò significa che  $f(x) = f(-x)$  per tutti i valori di  $x$ , allora i coefficienti che hanno come i termini i seni sono nulli. La serie con solo la costante e i termini del coseno è noto come “serie di Fourier del coseno”. (La serie di Chebyshev è una serie di Fourier del coseno con il cambio di variabili). Se  $f(x) = -f(-x)$  per tutti i valori di  $x$ , allora  $f(x)$  è definita antisimmetrica rispetto ad  $x = 0$  e tutti gli  $a_n = 0$ . La sua serie di Fourier è una serie del seno.

# Bibliografia

- [1] Andersson P., Brandt L., Bottaro A & Henningson D.S.: *On the breakdown of boundary layer streaks*. J. Fluid Mech., **428**, pp. 29-60. Printed in the U.K. Cambridge University Press , (2001).
- [2] Betchov, R., and Criminale, W.O: *Stability of parallel flow*. Academic Press. (1967).
- [3] Blasius H.: *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*. Z. Math. Phys. **56**, 1-37. Engl. Transl. in NACA TM 1256 (1908).
- [4] Campbell L., Garnett W.: *The life of J.C. Maxwell and a selection from his correspondence and occasional writing and a sketch of his contributions to science*. London (1882).
- [5] Darbyshire A.G., Mullin T.: *Transition to turbulence in constant-mass-flux pipe flow*. J. Fluid Mech. **289**, 83 (1995).
- [6] Duguet Y. et al.: *Relative periodic orbits in transitional pipe flow*. Phys. Fluids **20**, 114102 (2008).
- [7] Drazin P.G. , Reid W. H. :*Hydrodynamic Stability*. 2<sup>nd</sup> edition, University of Cambridge, pp. 8-10 (2004).
- [8] Dryden, Hugh L.: *Air flow in the boundary layer near a plate*. NACA Rep. **568** (1936).
- [9] Faisst H. & Eckhardt B.: *Travelling waves in pipe flow*. Phys. Rev. Lett. **91**, 224502 (2003).
- [10] Hagen. G.: *Über die bewegung des wassers in angen zylidrischen rohren*. Pogg. Ann. **46**, 423. (1839).

- [11] Hof, B., Juel, A. & Mullin, T.: *Scaling of the turbulence transition threshold in a pipe*. Phys. Rev. Lett. **91**, art. 244502, **5250** (1997).
- [12] Kline, S.J. et al: *The structure of turbulent boundary layer*. J. Fluid. Mech. **30**, pp.741-773 (1967).
- [13] Lin, C.C.: *The theory of hydrodynamic stability*. Cambridge Univ. Press (1955).
- [14] Morkovin, M. V., E. Reshotko & Th. Herbert (1994): *Transition in open flow systems*. A reassessment. Bull. Aps. **39(9)** (1882).
- [15] Mullin T, Peixinho J.: *Transition to turbulence in pipe flow* F. Low temp. Phys. **145**, 75-88 (2006).
- [16] Nagata M.: *Three-dimensional finite amplitude solutions in plane Couette flow: Bifurcation from infinity*. J. Fluid Mech. **217**, 519 (1990).
- [17] Okino S. et al.: *A new nonlinear vortex state in square-duct flow*. J. Fluid Mech. **657**, pp. 413-429 (2010).
- [18] Orr, W. M. F.: *The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid*. Part I: A perfect liquid; Part II: A viscous liquid. Proc. Roy. Irish Acad. pp. 27, 9, 68 and 69, 138 (1907).
- [19] Pfenninger, W.: *Transition in the inlet of tubes at high Reynolds numbers*. Boundary Layer and Flow Control (ed. G.V. Lachman), **970**, Pergamon (1961).
- [20] Poiseuille, J.: *Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres*. Comptes Rendus **11**, 961-967 and 1041-1048. (1840); **12**, 112, (1841); in more detail: Memoires des Savants Etrangers, **9** (1846).
- [21] Prandtl, L.: *Über den luftwiderstand von kugeln*. Nachr, Ges, Wiss, Göttingen, Math. Phys. Klasse, pp. 177-190 (1914); see also Coll. Works II, 687-696.
- [22] Prandtl, L.: *Bemerkungen über die entstehung der turbulenz*. ZAMM II, pp. 407-409 (1931).
- [23] Prandtl, L.: *Neuere ergebnisse der turbulenzforschung*. Z. VDI 77, pp. 105-114; see also: Coll. Works, II, pp. 105-114.



- [24] Pringle C. & Kerswell R. R.: *Asymmetric, helical and mirror-symmetric travelling waves in pipe flow*. Phys. Rev. Lett. **99**, 074502 (2007).
- [25] Pringle C. et al.: *Highly-symmetric travelling waves in pipe flow*. Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A **367**, 457 (2009).
- [26] Rayleigh, Lord: *On the stability or instability of certain fluid motions*. Proc. London Math. Soc., **11**, pp. 57-70 (1880); and **19**, pp. 200-217 (1887).
- [27] Reynolds O.: *An experimental of investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels*. Phil. Trans. **174**, 935 (1883).
- [28] Robinson, S.K.: *Coherent motion in the turbulent boundary layer*. Ann. Rev. Mech., **23**, pp.601-639 (1991).
- [29] Rotenberry J. M.: *Finite amplitude steady waves in the Blasius boundary layer*. Phys. Fluids A, **5**, (1993).
- [30] Rheinboldt, W.C., Burkardt, J.V.: *A locally parameterized continuation process*. ACM Trans. Math. Software **9**(2), 215 (1983a).
- [31] Rheinboldt, W.C., Burkardt, J.V.: *A program for a locally parameterized continuation process*. ACM Trans. Math. Software **9**(2), 236 (1983b).
- [32] Schlichting, H.: *Amplitudenverteilung und enegiebilanz der kleinen störungen bei der platternstömung*. Nach. Gesell. D. Wiss. Z. Göttingen, Math. Phys. Klasse, Bd. I, pp. 47-78 (1935).
- [33] Schlichting, H.: *Turbolenz bei wärmeschichtung*. Z.f.a.M.M., Bd. 15, Heft 6, Doc. pp. 313.338 (1935).
- [34] Schlichting, H.: *Über die entstehung der turbolenz in einem totierenden zylinder*". Nach. Gesell. D. Wiss. Z. Göttingen, Math. Phys. Klasse, Heft 2, pp. 160-198 (1932).
- [35] Schlichting, H.: *Zur entstehung der turbolenz bei der platternstömung*". Nach. Gesell. D. Wiss. Z. Göttingen, Math. Phys. Klasse, pp. 181-208 (1933).
- [36] Schmid P. J., Henningson D. S.: *Stability and transition in shear flows* ". Applied Mathematical Sciences, Springer, USA , pp. 1-6, pp. 15-18, pp. 55-74, p. 507 (2001).

- [37] Schubauer, G.B., and Klebanoff, P.S.: *Contributions on the mechanics of boundary layer transition*. NACA TN 3489 (1955) and NACA Rep. 1289 (1956); see also Proc. Symposium on Boundary Layer Theory, NPL, England (1955).
- [38] Schubauer G. B., Skramstad H. K.: *Laminar-boundary-layer oscillations and transition on a flat plate*. National Bureau of Standards, Washington D.C., (April 1943).
- [39] Sommerfeld, A.: *Ein beitrage zur hydrodynamischen erklärung der turbolenten flüssigkeitsbewegungen*. Atti del 4. Congr. Internat. dei Mat. III. 116-124, Roma (1908).
- [40] Tatsumi, T. & Yoshimura, T.: *Stability of the laminar flow in a rectangular duct*. J. Fluid. Mech. **174**, pp. 935-982 (1990).
- [41] Taylor. G.I.: *Some recent developments on the study of turbulence*. Proc. of the Fifth Intern. Congress for Appl. Mech., New York, **294** (1938); see also: Statistical Theory of turbulence, V. *Effect of turbulence on boundary layer*. Proc. Roy. Soc. London A 156, 307-317 (1936); see also: Scientific Papers II, 356-364.
- [42] Tollmien, W.: *The production of turbulence*. NACA TM 609 (1931).
- [43] Tollmien, W.: *General instability criterion of laminar velocity distributions*. NACA TM 792 (1936).
- [44] Uhlmann, M. & Nagata, M.: *Linear stability of flow in an internally heated rectangular duct*. J. Fluid Mech. **551**, pp. 387-404 (2006).
- [45] Waleffe F.: *Homotopy of exact structures in plane shear flows*. Phys. Fluids **15**, 1517 (2003).
- [46] Wazzan A.R., Okamura T.T., Smith A.M.O.: *Spatial and temporal stability charts for the falkner-skane boundary layer profiles*. Douglas Aircraft Co. Report No. Dac-6708.
- [47] Wedin H. et al, Biau D., Bottaro A., Nagata M.: *Coherent flow states in a square duct*. Phys. Fluids **20**, 094105 (2008).
- [48] Wedin H. et al: *Three-dimensional travelling waves in a square duct*. Physical Review E **79**, (2009).

- 
- [49] Wedin H., Kerswell R.R.: *Exact coherent structures in pipe flow: Travelling Wave Solutions*. J. Fluid Mech. **58**, 333 (2004).
- [50] Wygnanski, I.J., Champagne, F.H.: *On transition in a pipe. Part 1. The origin of puffs and slugs and the flow in a turbulent slug*. J.Fluid Mech. **59**, 281 (1973).
- [51] Wygnanski, I. J., Sokolov. M., Friedman D.: *On transition in a pipe. Part 2. The equilibrium puff*. J. Fluid Mech. **69**, 283 (1975).