

**Sviluppo e validazione di un codice numerico per la
risoluzione delle equazioni di *Navier-Stokes***

Daniele Parodi



Università degli studi di Genova
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Titolo della tesi di Laurea:

**Sviluppo e validazione di un codice numerico per la
risoluzione delle equazioni di *Navier-Stokes***

Relatore:

Chiarissimo Prof. Ing. Alessandro Bottaro

Candidato:

Daniele Parodi

Sessione di Laurea del 24/09/2010

Anno Accademico 2009-2010

Ringraziamenti: ringrazio moltissimo il Professore A. Bottaro per la sua disponibilità ad aiutarmi in ogni mia difficoltà, per la sua costante presenza e per l'estrema cordialità.

Indice

	pag.
1 Introduzione	4
2 Equazione di <i>Burgers</i> linearizzata	5
2.1 Cenni generali	5
2.2 Metodi alle differenze finite	7
2.2 Programmi utilizzati	8
2.4 Risultati ottenuti	10
2.5 Riferimenti bibliografici	14
3 Equazione di <i>Burgers</i> non viscosa	15
3.1 Cenni generali	15
3.2 Schema di <i>Lax-Wendroff</i>	15
3.3 Programma utilizzato	15
3.4 Risultati ottenuti	16
3.5 Riferimenti bibliografici	22
4 Equazione di <i>Burgers</i> viscosa	23
4.1 Cenni generali	23
4.2 Schema di <i>MacCormack</i>	23
4.3 Programma utilizzato	24
4.4 Risultati ottenuti	25
4.5 Riferimenti bibliografici	29
5 Equazioni di <i>Navier-Stokes</i>	30
5.1 Cenni generali	30
5.1.1 Cenni sugli autori	30
5.1.2 Cenni sulle equazioni	30
5.2 Collegamento con i capitoli precedenti	31
5.3 Algoritmo numerico utilizzato	31
5.3.1 Comprimibilità artificiale	32
5.4 Metodo Marker and Cell (MAC)	33
5.4.1 Scelta della pseudo – celerità del suono	36
5.4.2 Implementazione delle condizioni al contorno	36
5.5 Programma utilizzato	37
5.6 Validazione del codice numerico	39
5.6.1 2D Lid- Driven cavity	39

5.6.2 Griglia utilizzata.....	40
5.6.3 Risultati ottenuti.....	40
5.7 Validazione con la letteratura per $Re=1000$	53
5.7.1 Confronto qualitativo.....	53
5.7.2 Confronto quantitativo.....	55
5.8 Riferimenti bibliografici.....	57

6 Conclusioni, ovvero cosa ho imparato	58
---	-----------

Introduzione

La tesi si inserisce nell'ambito della sperimentazione numerica e si pone come obiettivo quello di sviluppare un semplice codice numerico che risolva le equazioni di *Navier-Stokes* nel caso incomprimibile e per un dominio di calcolo bidimensionale. Poiché mi affaccio per la prima volta a questa disciplina si preferisce prima di tutto imparare le basi essenziali del calcolo numerico con il libro: Quarteroni A., Saleri F., *Calcolo scientifico*, 4^a edizione. Questo affronta in modo elementare molti problemi risultati poi utili per lo sviluppo del codice, soprattutto gli ultimi due capitoli in cui vengono trattati i metodi numerici per risolvere le equazioni differenziali alle derivate ordinarie e alle derivate parziali. Apprese un po' di basi si incomincia con lo sviluppo del codice. Prima di affrontare le equazioni di *Navier-Stokes* si studia l'equazione di *Burgers*. Questa può presentarsi sotto tre differenti aspetti via via più complessi, si parte dalla forma più semplice in cui viene linearizzata, poi si introduce una non linearità e infine un termine diffusivo. Così facendo ho potuto:

- Avvicinarmi con gradualità alle equazioni di *Navier-Stokes*
- Sviluppare le nozioni indispensabili per programmare il codice

Una volta terminata questa prima parte si è affrontato il codice vero e proprio e si è scelto di validarlo studiando il problema della cavità in moto, in cui un fluido viene messo in moto tramite la traslazione nel suo piano di una delle quattro pareti, con velocità uniforme.

Per gli esperimenti numerici è stato utilizzato MatLab[®] Version 7.4.0.287(R2007a) disponibile presso le sale computer del dipartimento DICAT, mentre per la scrittura Word 2007.

Il tempo occorso va da marzo 2010 ai primi di agosto '10, tuttavia nel periodo delle lezioni ho seguito lo sviluppo della tesi solo nei pomeriggi liberi.

Equazione di *Burgers* linearizzata

2.1 Cenni generali

L'equazione di *Burgers* linearizzata è un esempio di equazione differenziale alle derivate parziali (PDE=Partial Differential Equation) di tipo iperbolico. Per capirne il nome occorre sapere che una classe di PDE molto studiata, per la loro importanza in campi applicativi, è quella delle equazioni lineari del secondo ordine in due variabili. La loro forma generale è del tipo:

$$\mathcal{A} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\mathcal{B} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad (2.1)$$

dove $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ sono funzioni di x e y .

Così come per la forma quadratica $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$ il $\det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ ci dice se si tratta di un'ellisse, una parabola o un'iperbole, così il segno della quantità

$$\mathcal{B}^2(x, y) - \mathcal{A}(x, y)\mathcal{C}(x, y)$$

ci dice:

- se è negativa: equazione alle derivate parziali di tipo ELLITTICO
- se è identicamente nulla: equazione alle derivate parziali di tipo PARABOLICO
- se è positiva: equazione alle derivate parziali di tipo IPERBOLICO

L'equazione di *Burgers* linearizzata è appunto un'equazione iperbolica e si presenta in questa forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{dove } a \text{ è un numero reale positivo}) \quad (2.2)$$

Trovare l'integrale generale di una PDE è molto complesso in quanto richiede di risolvere problemi come equazioni integrali (e a volte non è neanche possibile). Per questo si preferisce fornire a priori delle condizioni supplementari in modo da ricercare non l'integrale generale, ma un integrale di un grado limitato di generalità. Si ottiene quindi:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0) = u^0(x) \end{cases} \quad \text{per } t > 0 \text{ e } x \in I \subset \mathbb{R} \quad (2.3)$$

dove una possibile condizione iniziale è

$$u(x, 0) =: u^0(x) = \frac{1 - \tanh(x)}{2} \quad x \in I \quad (2.4)$$

il cui grafico per $I = [-10, 10]$ è il seguente:

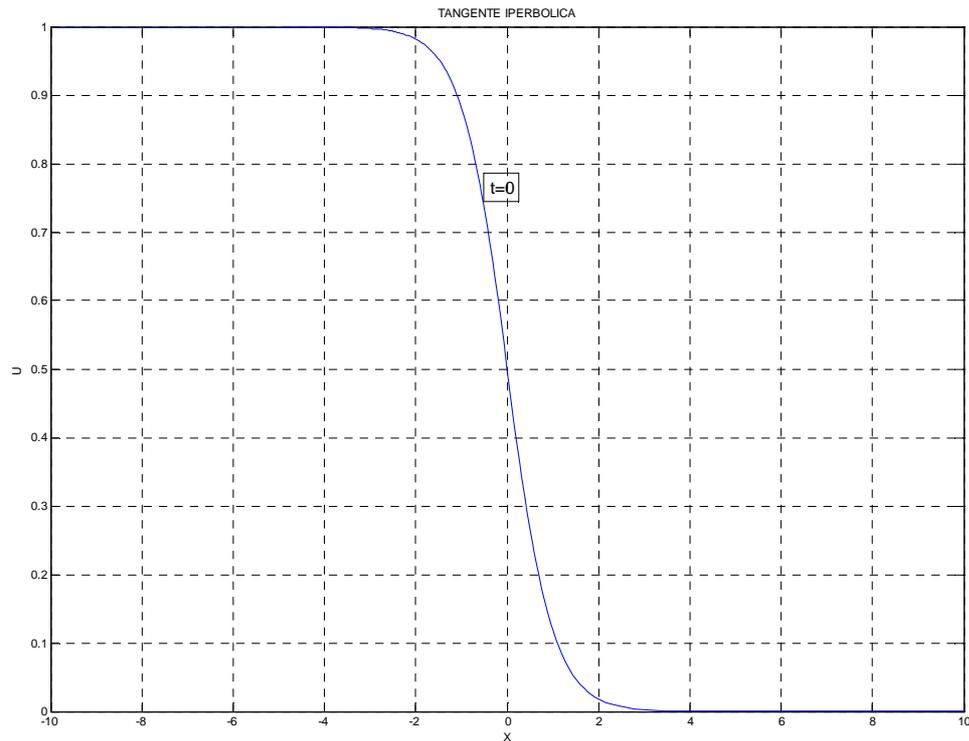


Figura 2.1: Grafico della condizione iniziale

Questo problema è molto interessante poiché di (2.3) si conosce la soluzione esatta che è del tipo:

$$u(x, t) = u^0(x - at) \quad (2.5)$$

(2.5) rappresenta un'onda che si propaga con velocità pari ad a . Si nota come, pur essendo in una dimensione (compare solo la coordinata spaziale x), la funzione $u(x, t)$ è di due variabili. Quindi per poterla rappresentare su di un piano conviene usare il tempo come parametro:

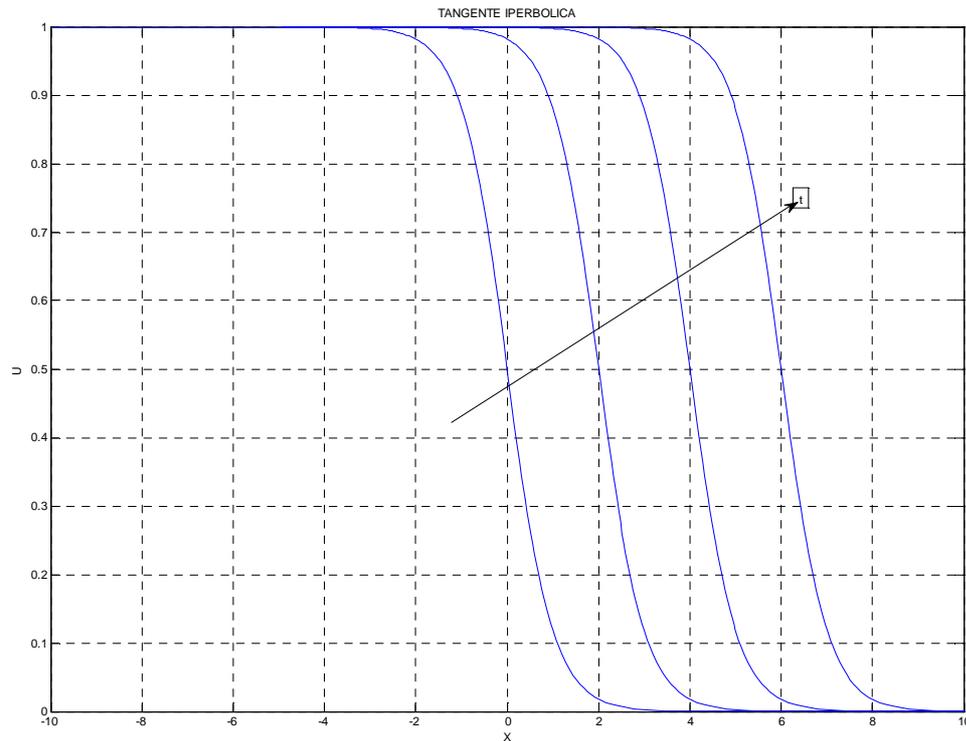


Figura 2.2: Soluzione esatta di (2.3) con $a=1$ e come $u^0(x) = \frac{1-\tanh(x)}{2}$

Ritornando a (2.3), essendo nota la soluzione esatta possiamo testare alcuni metodi numerici utilizzati per risolvere le PDE e renderci conto di come in generale le soluzioni numeriche non siano necessariamente corrette, ma possano presentare degli errori più o meno importanti.

2.2 Metodi alle differenze finite

Come si vede in (2.2) compaiono delle derivate parziali. L'idea che sta alla base delle differenze finite è quella di sostituire alla derivata un opportuno rapporto. Questo concetto risulta chiaro per una funzione di una variabile e per la derivata prima:

$$f'(\bar{x}) \cong \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} \text{ per } h \text{ sufficientemente piccolo} \tag{2.6}$$

Per essere più rigorosi, se f è di classe C^2 sviluppando in serie di Taylor con resto di Lagrange si ottiene:

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) h + \frac{1}{2} f''(\xi) h^2 \text{ con } \xi \in (\bar{x}, \bar{x} + h)$$

$$f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) = f'(\bar{x}) h + \frac{1}{2} f''(\xi) h^2$$

$$\frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} = f'(\bar{x}) + \frac{h}{2} f''(\xi)$$

e quindi il rapporto (2.6) (detto DIFFERENZA FINITA IN AVANTI) approssima $f'(\bar{x})$ a meno di un errore che tende a zero come h .

In altri termini (2.6) è uno schema del primo ordine.

A questo punto si discretizza l'intervallo I scegliendo un passo di griglia spaziale $\Delta x > 0$ (quello che prima era h) ed un passo di griglia temporale $\Delta t > 0$. Inoltre si indica con u_j^n la soluzione numerica che approssima $u(x_j, t_n)$ allora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 &\Leftrightarrow \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \\ &\Leftrightarrow u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a \Delta t}{2 \Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \end{aligned}$$

Chiamando $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ otteniamo:

1. *Eulero in avanti/centrato*:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2} a (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (2.7)$$

Come risulta intuitivo Δx e Δt non possono essere scelti indipendentemente. Quello che si richiede è che nel tempo Δt l'onda, di velocità a , non si sposti di una quantità maggiore di Δx . Affinché ciò accada occorre che $a\Delta t \leq \Delta x$ ossia $a \lambda \leq 1$. La quantità $a \lambda =: CFL$ è il numero di *Courant, Friedrichs, Lewy* in onore dei tre studiosi che hanno dimostrato la condizione necessaria e sufficiente affinché un metodo esplicito sia stabile. Introdotto il CFL si possono esprimere altri tre metodi espliciti:

2. *Lax-Friedrichs*:

$$u_j^{n+1} = \frac{CFL + 1}{2} u_{j-1}^n - \frac{CFL - 1}{2} u_{j+1}^n \quad (2.8)$$

3. *Lax-Wendroff*

$$u_j^{n+1} = (1 - CFL^2) u_j^n + \frac{CFL}{2} [(CFL - 1) u_{j+1}^n + (CFL + 1) u_{j-1}^n] \quad (2.9)$$

4. *Upwind*

$$u_j^{n+1} = (1 - CFL) u_j^n + CFL u_{j-1}^n \quad (2.10)$$

2.3 Programmi utilizzati

A questo punto si possono implementare su MatLab gli ultimi tre metodi. Riporto di seguito i programmi.

(2.8):

```
function[xx,tt,u]=lf(x,t,u0,cfl,dx,dt)
%approssima l'equazione di Burgers linearizzata con
%il metodo di Lax-Friedrichs alle differenze
%finite
nt=((t(2)-t(1))/dt)+1;
nx=((x(2)-x(1))/dx)+1;
xx=(x(1):dx:x(2));
tt=(t(1):dt:t(2));
u=zeros(nt,nx);
cflp1=cfl+1;
cflm1=cfl-1;
u(1,:)=feval(u0,xx);
for i=1:nt-1
    for j=2:nx-1
        u(i+1,j)=0.5*cflp1*u(i,j-1)-0.5*cflm1*u(i,j+1);
    end
    j=nx;
    u(i+1,1)=u(i,2)-cfl*(u(i,2)-u(i,1));
    u(i+1,j)=0.5*cflp1*u(i,j-1)-0.5*cflm1*(2*u(i,j)-u(i,j-1));
end
```

(2.9):

```
function[xx,tt,u]=lw(x,t,u0,cfl,dx,dt)
%approssima l'equazione di Burgers linearizzata con
%il metodo di Lax-Wendroff alle differenze
%finite
nt=(t(2)-t(1))/dt+1;
nx=(x(2)-x(1))/dx+1;
xx=linspace(x(1),x(2),nx);
tt=linspace(t(1),t(2),nt);
u=zeros(nt,nx);
cflp1=cfl+1;
cflm1=cfl-1;
cfl2=1-cfl^2;
u(1,:)=feval(u0,xx);
for i=1:nt-1
    for j=2:nx-1
        u(i+1,j)=cfl2*u(i,j)+0.5*cfl*(cflm1*u(i,j+1)+cflp1*u(i,j-1));
    end
    j=nx;
    u(i+1,1)=u(i,2)-cfl*(u(i,2)-u(i,1));
    u(i+1,j)=cfl2*u(i,j)+0.5*cfl*(cflm1*(2*u(i,j)-u(i,j-1))+...
        +cflp1*u(i,j-1));
end
```

(2.10):

```
function[xx,tt,u]=up(x,t,u0,cfl,dx,dt)
%approssima l'equazione di Burgers linearizzata con
%il metodo Upwind alle differenze
%finite
nt=(t(2)-t(1))/dt+1;
nx=(x(2)-x(1))/dx+1;
```

```

xx=linspace(x(1),x(2),nx);
tt=linspace(t(1),t(2),nt);
u=zeros(nt,nx);
cflm1=cfl-1;
u(1,:)=feval(u0,xx);
for i=1:nt-1
    for j=2:nx
        u(i+1,j)=-cflm1*u(i,j)+cfl*u(i,j-1);
    end
    u(i+1,1)=u(i,2)-cfl*(u(i,2)-u(i,1));
end
end

```

2.4 Risultati ottenuti

Una volta implementati i tre metodi si può risolvere l'equazione di *Burgers* linearizzata con un metodo numerico e confrontarlo con la soluzione esatta. Facendo questo con il metodo di *Lax-Wendroff* si ottiene:

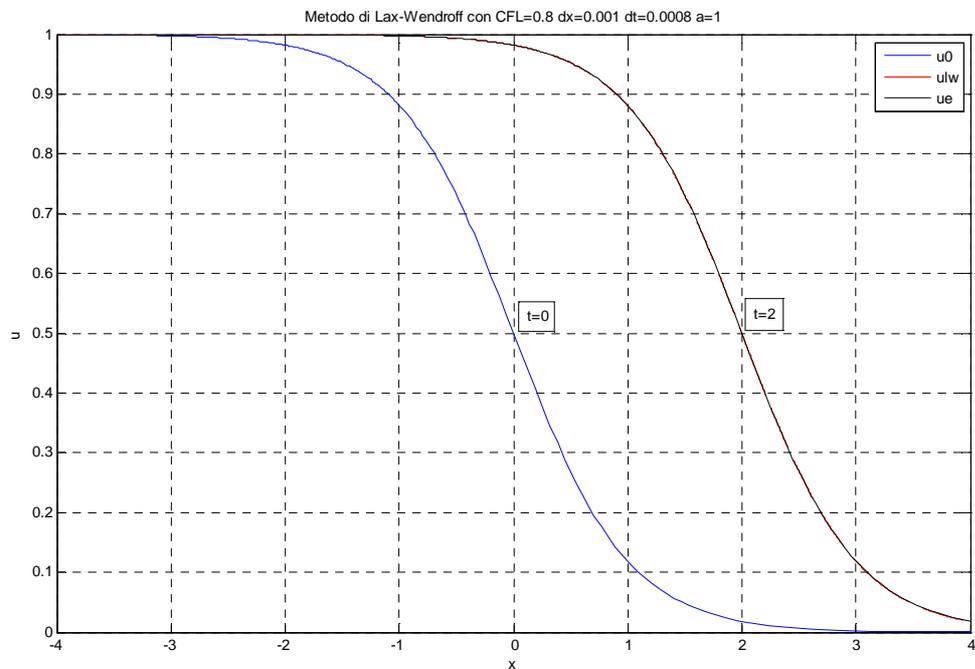


Figura 2.3: Applicazione del metodo di *Lax-Wendroff* a $u^0(x) = \frac{1-\tanh(x)}{2}$

Come si può vedere dalla precedente figura il risultato numerico è molto buono tuttavia questo non si verifica sempre. Se si effettua una scelta sbagliata della discretizzazione spaziale e temporale si ottengono i seguenti risultati:

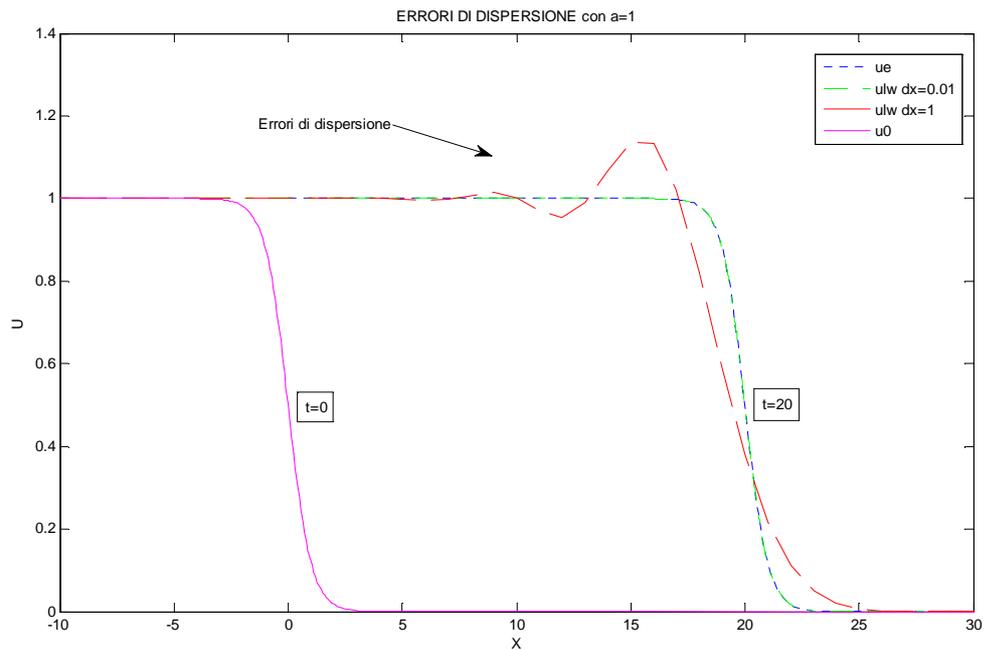


Figura 2.4: Errori di dispersione

Sia nella soluzione accettabile che in quella errata è stato usato lo stesso $\Delta t = 0.0008$ però nella soluzione in verde un $\Delta x = 0.01$ mentre nella soluzione in rosso un $\Delta x = 1$. Questa scelta troppo grossolana della griglia spaziale ha determinato gli errori di dispersione. Occorre inoltre notare come questi tipi di errore siano tipici di uno schema del secondo ordine come è quello di *Lax-Wendroff* (sia nello spazio che nel tempo). Se invece proviamo uno schema del primo ordine come *Upwind* otteniamo:

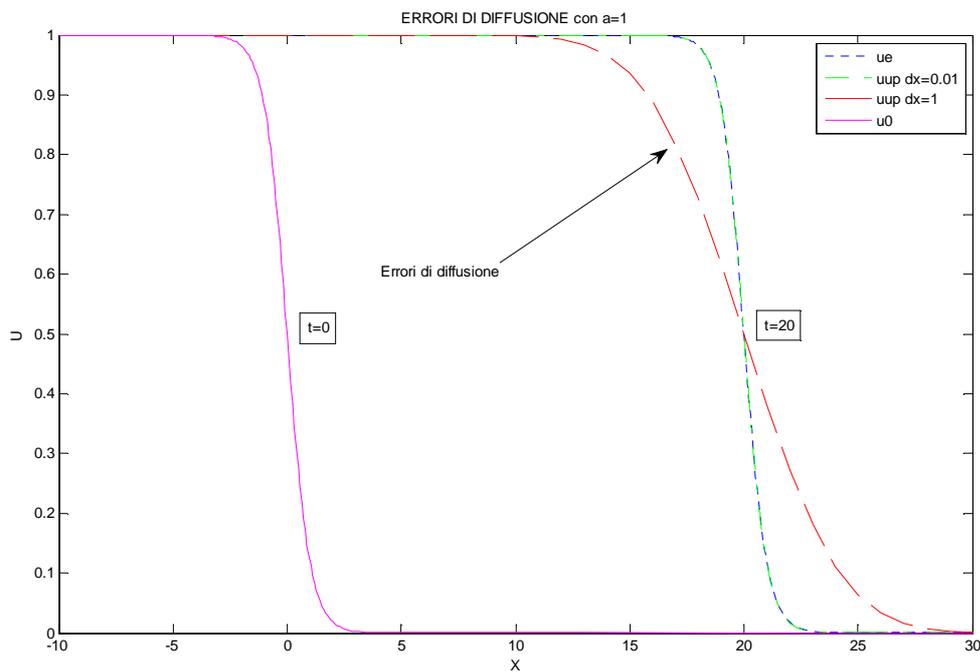


Figura 2.5: Errori di diffusione

In questa figura invece sono mostrati gli errori tipici di uno schema del primo ordine che vengono detti errori di diffusione. Le due precedenti figure mostrano come anche il calcolo numerico possa fallire e possa portare a soluzioni molto errate.

La conoscenza della soluzione esatta può essere utile anche per mostrare l'andamento dell'errore in funzione del Δx fissato un CFL.

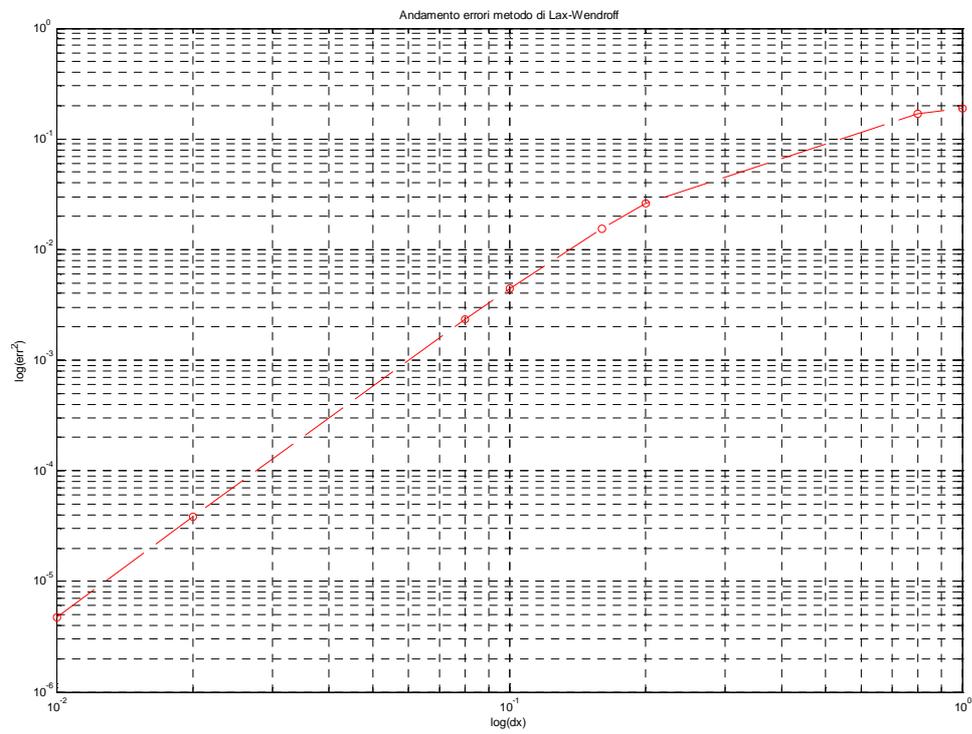


Figura 2.6: Andamento errori per un CFL=0.8

Oppure come variando il CFL vari anche l'entità dell'errore:

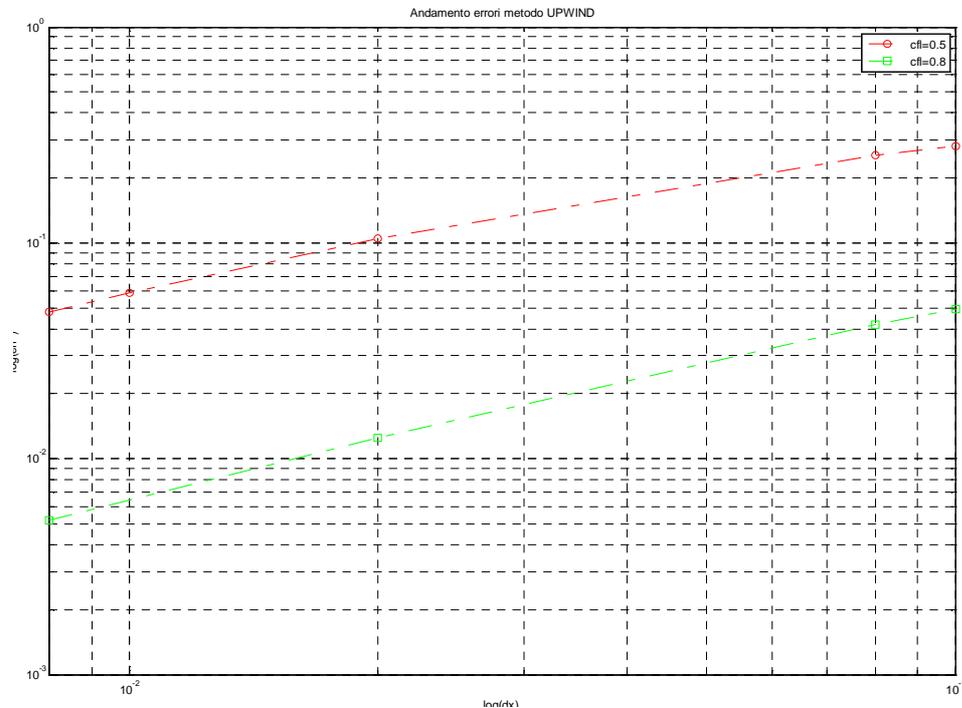


Figura 2.7: Influenza del CFL sull'errore del codice numerico

Nella figura precedente si può notare come (soprattutto nell'ultimo tratto) pur convergendo le due rette con la stessa pendenza, a parità di Δx , il CFL=0.8 ha un errore minore di un CFL=0.5.

Infine si può osservare come la retta che rappresenta la convergenza del metodo di *Lax-Wendroff* sia più pendente delle due che si riferiscono al metodo *Upwind*. Questo è dovuto al fatto che il primo è un metodo del secondo ordine mentre il secondo è un metodo del primo ordine. Quantitativamente le pendenze delle tre rette sono

1.7544

0.8488

0.8934

Si può notare come ci si stia avvicinando alla convergenza; infatti *Lax-Wendroff* è un metodo del secondo ordine mentre *upwind* è uno del primo.

2.5 Riferimenti bibliografici:

Quarteroni A., Saleri F., *Calcolo scientifico*, 4^a edizione, Springer, 2008

Equazione di *Burgers* non viscosa

3.1 Cenni generali

A differenza del caso precedente qui non si conosce, in generale, la soluzione analitica esplicita esatta, anche se sotto certe condizioni la soluzione si può esprimere con uno sviluppo di Fourier valido, fino al tempo in cui la soluzione diviene singolare. Questo fatto è causato dall'introduzione di una non linearità. Questa complicazione tuttavia è necessaria poiché la maggior parte dei problemi della meccanica dei fluidi sono fortemente non lineari.

L'equazione di *Burgers* non viscosa si può così scrivere:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

Questa equazione può essere vista come un'equazione delle onde non lineari.

In questo tipo di onde ogni punto del fronte d'onda si propaga con una differente velocità (al contrario del caso del capitolo 2 in cui si aveva una traslazione dell'onda perchè ogni punto si spostava con la stessa velocità costante a).

Una conseguenza della variazione della velocità dell'onda è la formazione di soluzioni discontinue, simili alle onde d'urto della meccanica dei fluidi.

3.2 Schema di *Lax-Wendroff*

L'idea che sta alla base dei metodi alle differenze finite usati per risolvere questa equazione è quella di scrivere:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) \quad (3.2)$$

Grazie a questa identità e agli sviluppi di Taylor si può pervenire allo schema di *Lax-Wendroff* che è, come nel caso precedente, uno schema centrato del secondo ordine:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2} + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \left[A_{j+\frac{1}{2}}^n (F_{j+1}^n - F_j^n) - A_{j-\frac{1}{2}}^n (F_j^n - F_{j-1}^n) \right] \quad (3.3)$$

Dove si è usata la seguente notazione:

$$F = \frac{u^2}{2}; A = u \text{ e quindi } A_{j+\frac{1}{2}} = \frac{u_j + u_{j+1}}{2}$$

La condizione di stabilità si riscrive così:

$$\left| \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{max} \right| \leq 1 \quad (3.4)$$

3.3 Programma utilizzato

L'implementazione in MatLab di (3.3) è la seguente:

```
function [xx, tt, u] = lw_in(x, t, u0, dx, dt)
```

```

%approssima l'equazione di Burgers non viscosa
%con il metodo di Lax-Wendroff alle differenze
%finite
nt=(t(2)-t(1))/dt+1;
nx=(x(2)-x(1))/dx+1;
xx=linspace(x(1),x(2),nx);
tt=linspace(t(1),t(2),nt);
u=zeros(nt,nx);
u(1,:)=feval(u0,xx);

for i=1:nt-1
    for j=2:nx-1
        u(i+1,j)=u(i,j)-(dt/(4*dx))*((u(i,j+1)^2)-...
            (u(i,j-1)^2))+0.125*(u(i,j)+u(i,j+1))*...
            ((u(i,j+1)^2)-(u(i,j)^2))-(u(i,j)+u(i,j-1))*...
            ((u(i,j)^2)-(u(i,j-1)^2)));
    end
    j=nx;
    u(i+1,1)=u(i,1)-0.5*(dt/dx)*((u(i,2)^2)-(u(i,1)^2));
    u(i+1,j)=u(i,j)-0.5*(dt/dx)*((u(i,j)^2)-(u(i,j-1)^2));
end
end

```

3.4 Risultati ottenuti

Per verificare l'effettiva formazione di onde d'urto testiamo lo schema di *Lax-Wendroff* sulla solita funzione $u^0(x) = \frac{1-\tanh(x)}{2}$ e otteniamo il seguente risultato:

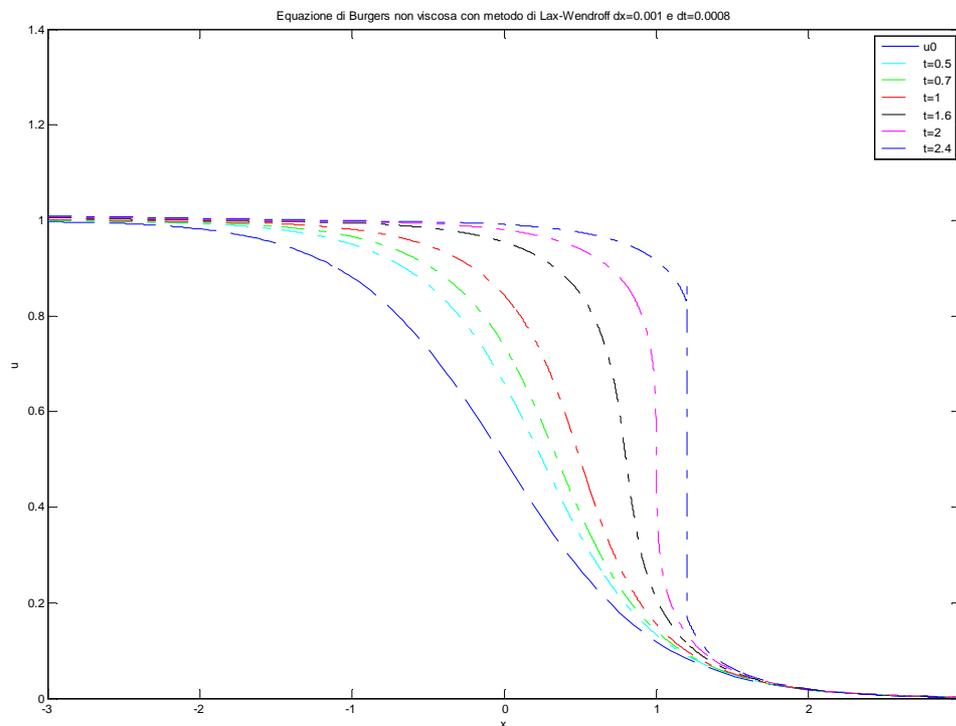


Figura 3.1: Esempio di formazione di onde d'urto da una funzione iperbolica

Come previsto dalla teoria dopo 2.4 (unità adimensionali) si è formata una discontinuità. Se ora cambiamo la condizione iniziale e scegliamo la funzione $u^0(x) = \sin(2x)$ si ha:

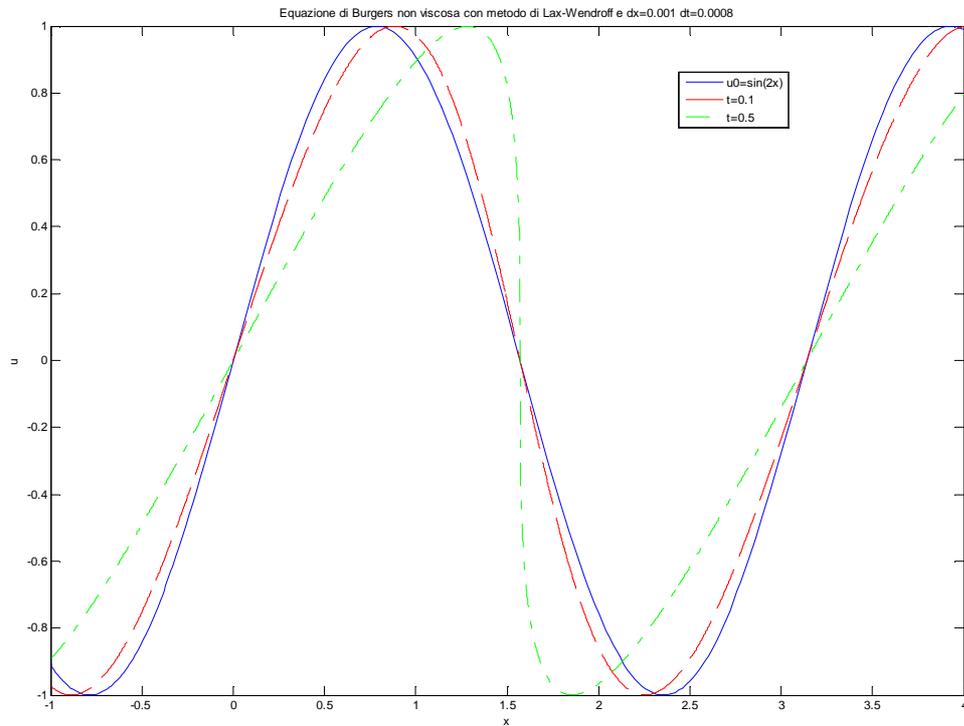


Figure 3.2: Esempio con condizione iniziale una funzione sinusoidale

Anche in questo caso si vede come la funzione “impenni”, e se si prosegue la simulazione dopo 1 si ha l’effettiva discontinuità come mostra la figura seguente

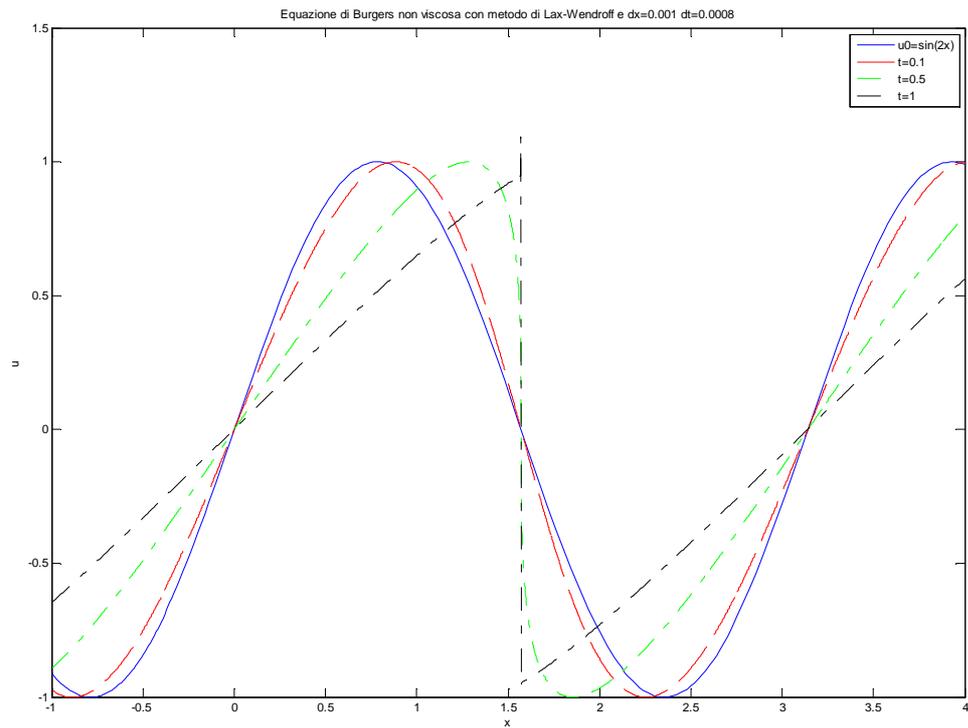


Figure 3.3: Formazione d'onda d'urto per la sinusoidale

Si vede come la funzione sinusoidale si è “ridotta” a tre sole rette.

Infine si testa ancora lo schema con una gaussiana, esattamente con $u^0(x) = e^{-x^2}$ e si ha:

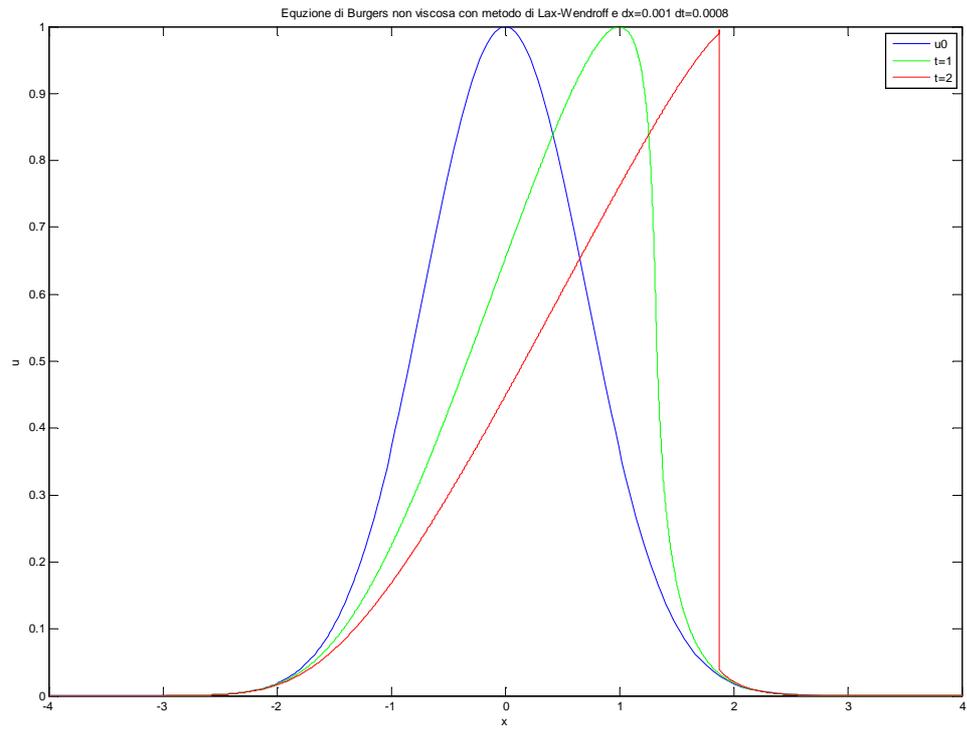


Figure 3.4: Esempio con condizione iniziale una gaussiana

A differenza del caso lineare non conosciamo la soluzione esatta che ci era servita per il calcolo dell'andamento dell'errore in funzione di Δx per un fissato CFL.

Per risolvere questo problema dobbiamo "costruirci" una soluzione esatta. Questa sarà quella ottenuta mediante la griglia computazionale più fine che riusciremo a creare con la disponibilità di memoria di MatLab.

Occorre comunque stare attenti perché si possono ottenere questi risultati:

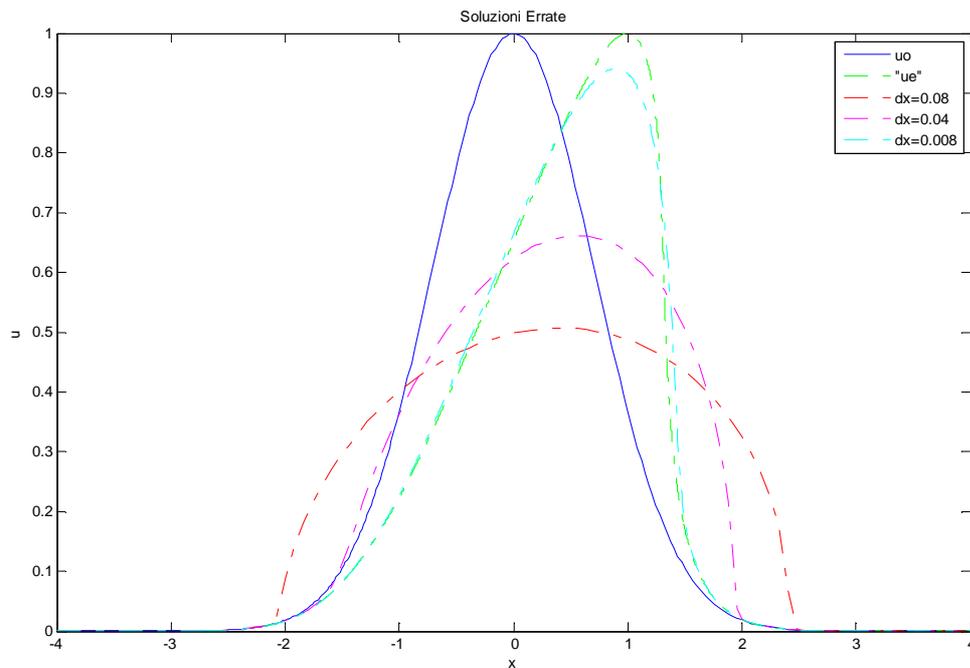


Figura 3.5: Soluzioni non accettabili per il calcolo degli errori al tempo $t=1$

Come si vede dalla figura le soluzioni con $\Delta x = 0.08$ e $\Delta x = 0.04$ si allontanano troppo dalla soluzione esatta e nel calcolo degli errori darebbero risultati non accettabili per questo si userà questo grafico:

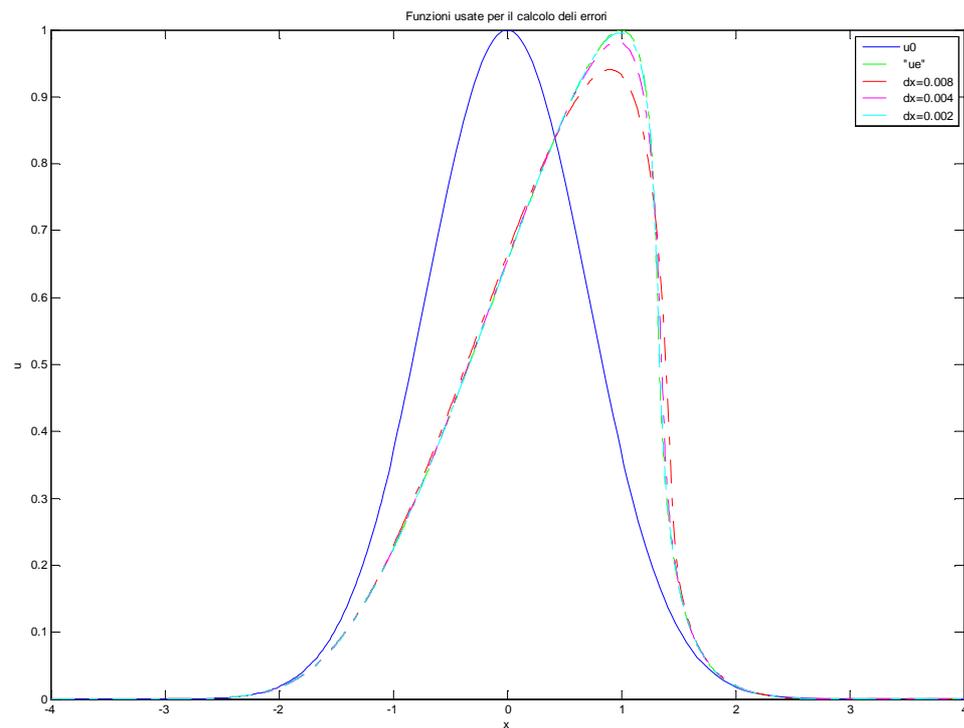


Figura 3.6: Funzioni usate per il calcolo degli errori con $\Delta t = 0.0008$ e al tempo $t=1$

Al contrario nella figura precedente le soluzioni numeriche si allontanano meno dalla soluzione “esatta” e si può diagrammare l’andamento dell’errore. Questo è stato calcolato fissando un Δt e calcolando per vari Δx la somma del quadrato della differenza tra la soluzione “esatta” e quella numerica. Si ottiene:

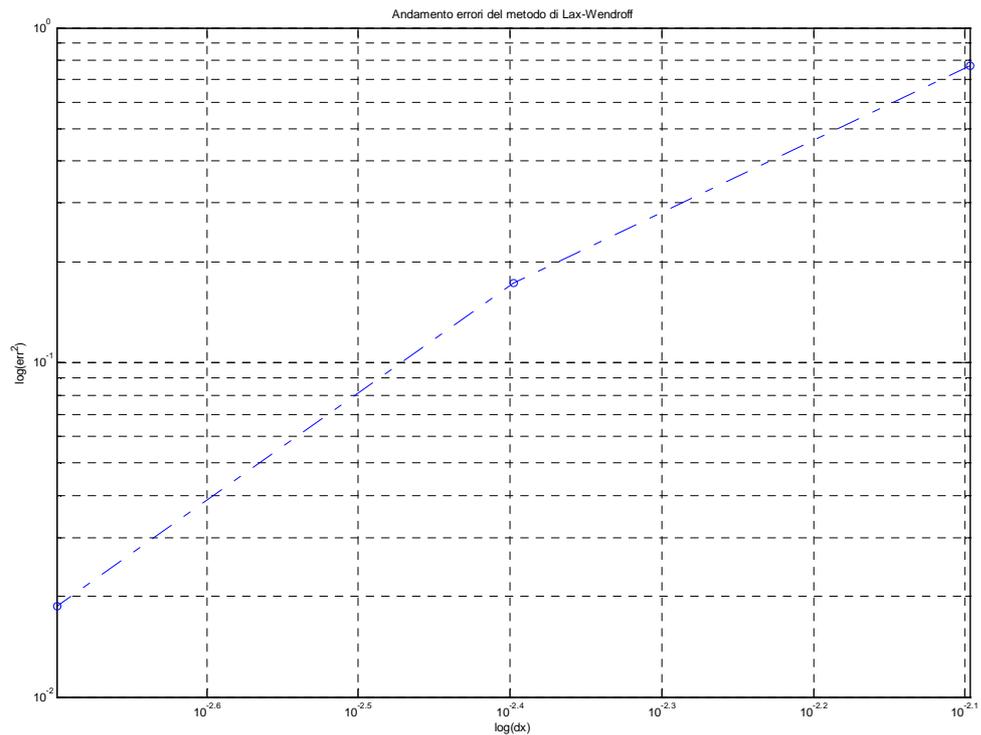


Figura 3.7: Andamento degli errori in funzione di Δx per un fissato $\Delta t = 0.0008$

La pendenza dell'ultima retta è:

2.8393

La convergenza in questo caso non è ancora buona poiché il metodo di *Lax-Wendroff* è un metodo del secondo ordine.

3.5 Riferimenti bibliografici:

Anderson D., Tannehill J., Pletcher R., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, McGraw-Hill 1984

Equazione di *Burgers* viscosa

4.1 Cenni generali

In questo caso abbiamo a che fare con una equazione non lineare con l'aggiunta di un termine diffusivo. Questa forma è molto simile alle equazioni che governano il flusso dei fluidi e può essere usata come un semplice modello non lineare per gli esperimenti numerici.

Scriviamo l'equazione di *Burgers* viscosa così :

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{termine non stazionario}} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{termine convettivo}} = \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{termine diffusivo}} \quad (4.1)$$

4.2 Schema di *MacCormack*

Si tratta di un nuovo schema che non abbiamo ancora utilizzato.

Lo schema di *MacCormack* viene detto predictor-corrector ed è una variazione del metodo a due passi di *Lax-Wendroff*. In confronto a quest'ultimo risulta più semplice poiché viene rimossa la necessità di calcolare il valore delle incognite nei punti di griglia $j + \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$.

Se lo applichiamo all'equazione di *Burgers* viscosa otteniamo la seguente struttura:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_j &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^n - F_j^n) + r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad \text{Predictor} \\ u_j^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[u_j^n + \tilde{u}_j - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{F}_j - \tilde{F}_{j+1}) + r(\tilde{u}_{j+1} - 2\tilde{u}_j + \tilde{u}_{j-1}) \right] \quad \text{Corrector} \end{aligned} \quad (4.2)$$

In cui si è usata la notazione già introdotta $F = \frac{u^2}{2}$ e in più $r = \nu \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.

Come il metodo di *Lax-Wendroff* dal quale deriva è accurato al secondo ordine sia nel tempo che nello spazio.

Si può notare come nel predictor sia stata usata una differenza in avanti per approssimare la derivata prima, mentre nel corrector una differenza indietro.

Questa scelta non è strettamente necessaria si potrebbe fare esattamente il contrario lo schema resterebbe sempre accurato al secondo ordine sia nel tempo che nello spazio.

Per la derivata seconda è stata usata questa approssimazione

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + o(\Delta x)^2 \quad (4.3)$$

che è una differenza centrata del secondo ordine.

Non è possibile ottenere un semplice criterio di stabilità per lo schema di *MacCormack* applicato all'equazione di *Burges* viscosa. Tuttavia esiste una formula empirica che può essere utilizzata con un opportuno fattore di sicurezza ed è la seguente:

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{|A|\Delta x + 2\nu} \quad (4.4)$$

L'ultima formula si riduce alla condizione vista nel precedente capitolo quando $\nu=0$
Ora si riporta l'implementazione fatta in MatLab

4.3 Programma utilizzato

(4.2):

```
function [xx, tt, u] = mc_vi(x, t, u0, dx, dt, ni)
%approssima l'equazione di Burgers viscosa
%con il metodo MacCormack alle differenze
%finite
nt = (t(2) - t(1)) / dt + 1;
nx = (x(2) - x(1)) / dx + 1;
xx = linspace(x(1), x(2), nx);
tt = linspace(t(1), t(2), nt);
u = zeros(nt, nx);
up = [];
r = (ni * dt) / (dx^2);
d = dt / dx;
u(1, :) = feval(u0, xx);
for i = 1:nt-1
    for j = 2:nx-1
        up(j) = u(i, j) - d * 0.5 * ((u(i, j+1)^2) - (u(i, j)^2)) + ...
            r * (u(i, j+1) - 2 * u(i, j) + u(i, j-1));
    end
    for j = 3:nx-2
        u(i+1, j) = 0.5 * (u(i, j) + up(j)) - (d * 0.5 * ((up(j)^2) - ...
            (up(j-1)^2))) + r * (up(j+1) - 2 * up(j) + up(j-1));
    end
    u(i+1, 2) = u(i, 3) - 0.25 * d * (-3 * (u(i, 2)^2) + 4 * (u(i, 3)^2) - (u(i, 4)^2)) + ...
        r * (-u(i, 5) + 4 * u(i, 4) - 5 * u(i, 3) + 2 * u(i, 2));
    u(i+1, 1) = u(i, 2) - 0.25 * d * (-3 * (u(i, 1)^2) + 4 * (u(i, 2)^2) - (u(i, 3)^2)) + ...
        r * (-u(i, 4) + 4 * u(i, 3) - 5 * u(i, 2) + 2 * u(i, 1));
    u(i+1, nx-1) = u(i, nx-2) - 0.25 * d * (3 * (u(i, nx-1)^2) - 4 * (u(i, nx-2)^2) + ...
        (u(i, nx-3)^2)) + ...
        r * (2 * u(i, nx-1) - 5 * u(i, nx-2) + 4 * u(i, nx-3) - u(i, nx-4));
    u(i+1, nx) = u(i, nx-1) - 0.25 * d * (3 * (u(i, nx)^2) - 4 * (u(i, nx-1)^2) + ...
        (u(i, nx-2)^2)) + ...
        r * (2 * u(i, nx) - 5 * u(i, nx-1) + 4 * u(i, nx-2) - u(i, nx-3));
end
```

4.4 Risultati ottenuti

Invece di considerare l'equazione di *Burgers* viscosa da sola per comprendere meglio gli effetti della viscosità si presentano qui di seguito le stesse tre funzioni viste nel capitolo precedente soggette sia a viscosità sia senza.

Si incomincia dalla tangente iperbolica, precisamente da

$$u^0(x) = \frac{1 - \tanh(x)}{2}$$

e si ottiene questo risultato:

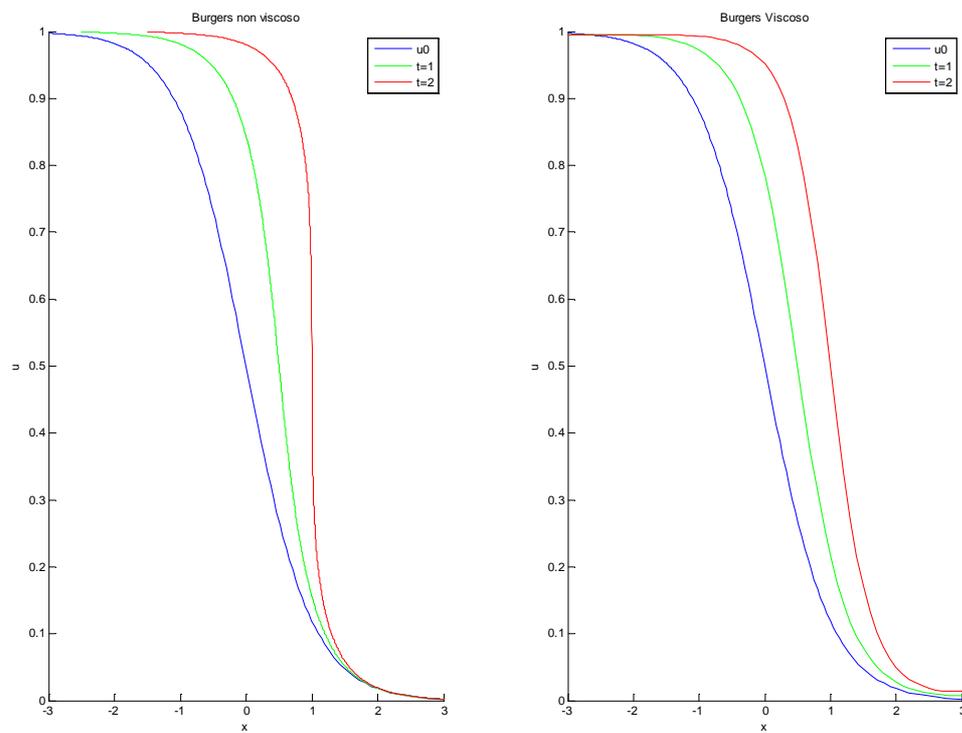


Figura 4.1: Confronto fatto su funzione iperbolica

Bisogna precisare le seguenti cose:

- *Burgers* non viscoso:
 $\Delta x = 0.001$

$$\Delta t = 0.0008$$

- *Burgers* viscoso

$$\Delta x = 0.1$$

$$\Delta t = 0.008$$

$$\nu = 0.1$$

In questo caso l'effetto della viscosità non è molto accentuato tuttavia nella figura di destra si osserva come nella parte in alto le tre curve sembrano traslate una rispetto all'altra al contrario del caso di sinistra dove si sta formando la discontinuità e quindi la pendenza aumenta. Inoltre nella parte in basso, nel caso non viscoso le curve sono molto attaccate mentre nel caso viscoso sono più staccate.

Ora si passa ad una funzione sinusoidale a:

$$u^0(x) = \sin(2x)$$

e si ha:

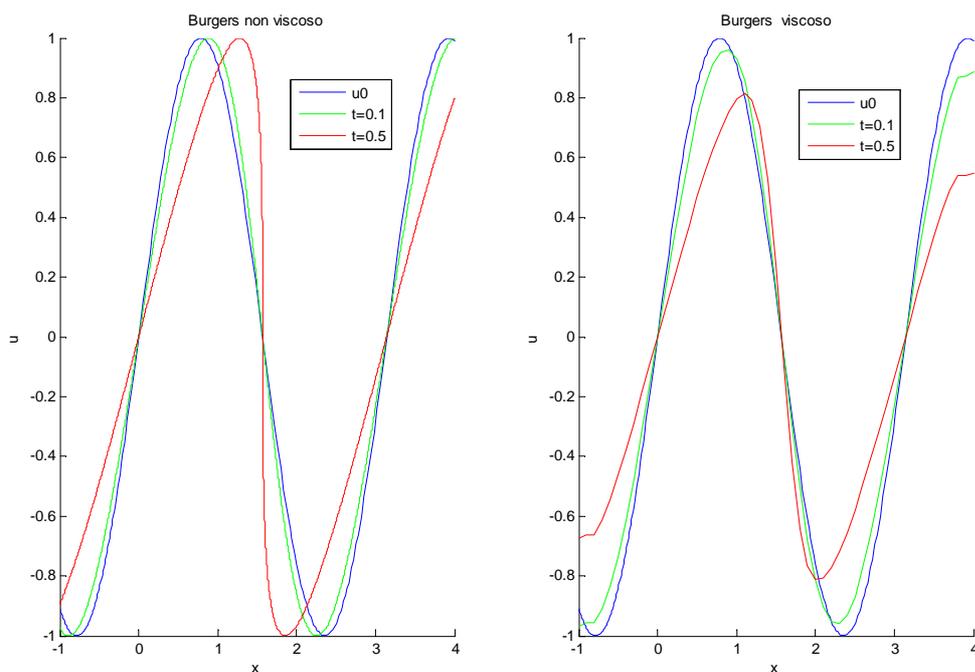


Figura 4.2: Confronto fatto su funzione sinusoidale

In questo caso l'effetto della viscosità è più marcato, infatti nella figura di destra si osserva come i picchi delle sinusoidi vengano smorzati dalla viscosità mentre ciò non accade nella figura di sinistra. Inoltre si possono notare anche degli errori numerici che nel caso viscoso causano quella sorta di “tremolio” alle estremità delle sinusoidi.

I parametri di griglia e di viscosità sono gli stessi del caso precedente.

Si analizza infine una gaussiana:

$$u^0(x) = e^{-x^2}$$

Il grafico relativo è il seguente:

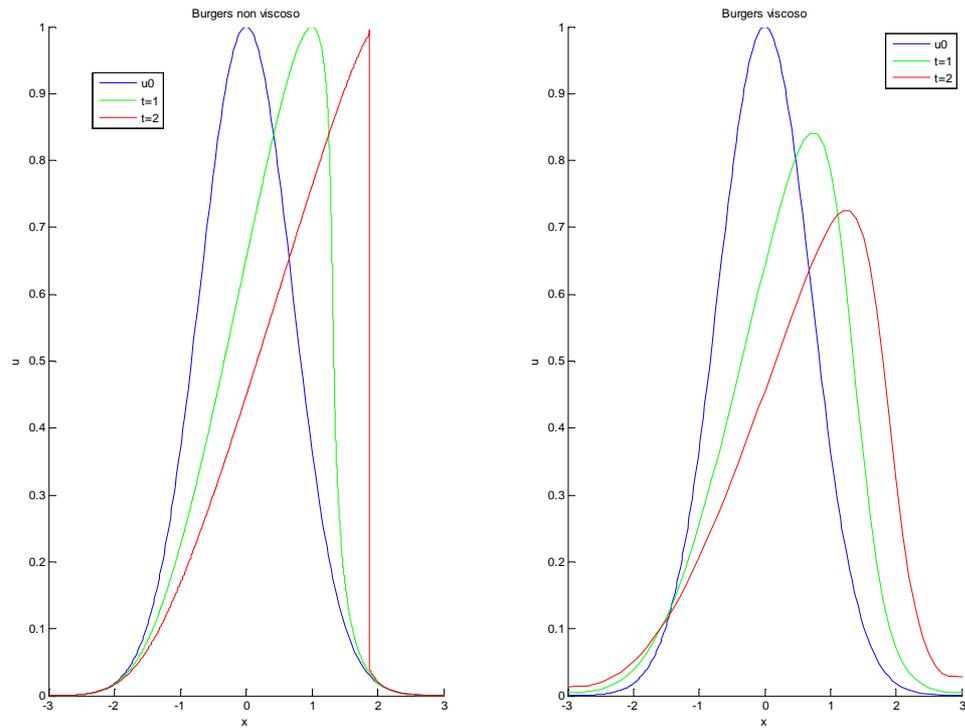


Figura 4.3: Confronto fatto con una gaussiana

Anche in questo caso l'effetto di smorzamento è molto marcato.

La griglia e la viscosità come prima non cambiano. Ora si può passare allo studio degli errori.

Per effettuarlo questa volta consideriamo la gaussiana; come nel caso del capitolo 3 non conosciamo la soluzione esatta e quindi useremo una soluzione numerica come tale.

Nel grafico che segue si mostra la differenza tra la soluzione "esatta" e quelle

computazionali e otteniamo:

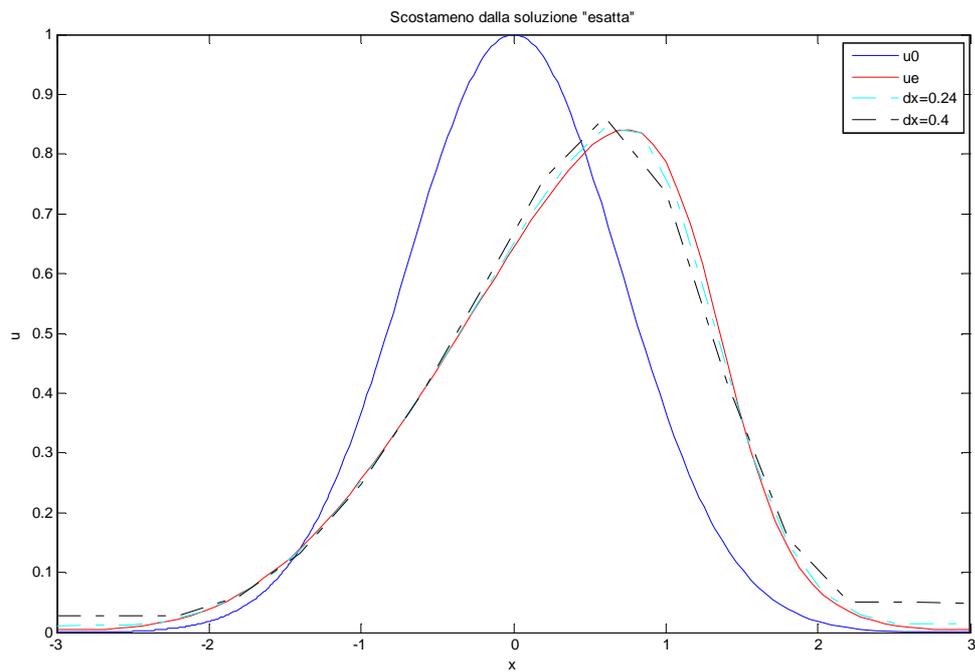


Figura 4.4: Errori per la gaussiana

Si precisa che :

-la soluzione “esatta” ha $\Delta x = 0.08$

-la prima soluzione errata ha $\Delta x = 0.24$

-la seconda soluzione errata ha $\Delta x = 0.4$

Mentre tutte e tre hanno $\Delta t = 0.008$ e $\nu = 0.1$ e sono calcolate a $t=1$
 Diagrammando l’andamento dell’errore in scala bi logaritmica si ha:

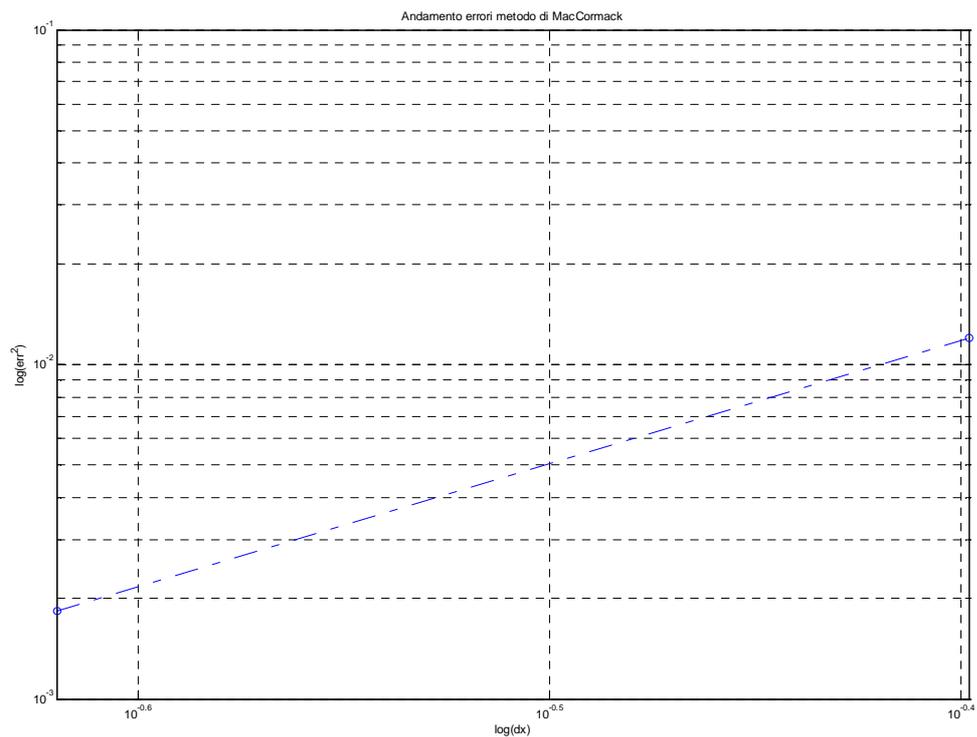


Figura 4.5: Andamento degli errori per il metodo *MacCormack*

La pendenza è di:

1.906

Questo, per quanto riguarda gli errori, è il risultato più accurato.

4.5 Riferimenti bibliografici:

Anderson D., Tannehill J., Pletcher R., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, McGraw-Hill 1984

Equazioni di *Navier-Stokes*

5.1 Cenni generali

5.1.1 Cenni sugli autori



NAVIER (Louis Marie Henri), ingegnere francese (Digione 1785-Parigi 1836). È uno dei fondatori della moderna scienza delle costruzioni cui ha dato importanti contributi teorici, fra cui, in particolare sulla teoria dell'elasticità, e sperimentali attraverso prove sulla resistenza dei materiali. Fra le opere: *Le leggi dell'equilibrio e del moto dei solidi elastici*.



STOKES (sir George Gabriel), matematico e fisico irlandese (Bornat Skreen, Sligo, 1819-Cambridge 1903). Professore di matematica presso l'università di Cambridge dal 1849, nel 1851 divenne membro della Royal Society di Londra. Autore di numerosi lavori di idrodinamica, scoprì la legge che regola la caduta dei solidi sferici pesanti nei liquidi. Si devono a lui la formulazione della prima teoria sulla fluorescenza e numerose ricerche sulla diffrazione, sulla birifrangenza e sulla polarizzazione. Nel 1896, in base al processo di produzione dei raggi X, formulò l'ipotesi, rivelatasi poi corretta, che queste radiazioni fossero della stessa natura della luce, con lunghezze d'onda minori.

Le famose equazioni prendono il nome dai due precedenti studiosi che svilupparono entrambi i termini viscosi, sebbene indipendentemente uno dall'altro.

5.1.2 Cenni sulle equazioni

Le equazioni di *Navier-Stokes* in forma incomprimibile possono essere scritte in forma vettoriale in questa maniera:

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + (\underline{V} \cdot \nabla) \underline{V} + \nabla p = \nu \nabla^2 \underline{V} \quad (5.1)$$

(5.1) è valida in ogni sistema di coordinate ortogonali.

Le equazioni di *Navier-Stokes* possono essere espresse, ad esempio, in coordinate cartesiane. Indicando con

$$\underline{X} = (x, y) \qquad \underline{V} = (u, v)$$

si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (5.2)$$

che va accoppiata all'equazione di continuità:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{V} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.3)$$

Occorre ora precisare le ipotesi in cui sono valide le (5.2):

- i. Moto bidimensionale (2D)
- ii. Moto incomprimibile (ρ è costante)
- iii. Fluido newtoniano ($\tau_{i,j} = 2\mu\epsilon_{i,j}$)
- iv. Fluido con proprietà costanti (viscosità, conducibilità termica, ecc.)
- v. Si trascurano le variazioni di temperatura
- vi. Assenza di forzanti esterne

Se le precedenti sei approssimazioni possono essere ritenute accettabili allora le equazioni di *Navier-Stokes* ci permettono di risolvere per ogni dettaglio il campo di flusso in tutto il dominio scelto.

Questa elevata "potenza" è pagata però dalla loro grande difficoltà. Infatti (5.2) è un sistema di due equazioni differenziali non stazionarie, non lineari, del secondo ordine alle derivate parziali. Tutto questo implica il fatto che si è in grado di risolvere, in modo analitico, quel sistema di equazioni soltanto per casi di moti fluidi molto semplici, in cui si possa eliminare il termine non lineare e considerare un caso stazionario.

Per questi motivi spesso si ricorre ad una discretizzazione numerica delle equazioni, che vengono approssimate da equazioni algebriche.

5.2 Collegamento con i capitoli precedenti

Se si considera il caso monodimensionale ($v = 0$) e non si tiene in considerazione il termine di pressione le equazioni di *Navier-Stokes* si riducono a:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (5.4)$$

che è proprio l'equazione di *Burgers* viscosa. Questo significa che (5.4) può essere considerata una forma particolare, simile alle equazioni di *Navier-Stokes*, di equazione di governo del campo di flusso.

5.3 Algoritmo numerico utilizzato

Le equazioni di *Navier-Stokes* possono essere riscritte in questa maniera:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\tilde{u}^2 + \tilde{p}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} (\tilde{u}\tilde{v}) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\tilde{u}\tilde{v}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} (\tilde{v}^2 + \tilde{p}) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \end{cases} \quad (5.5)$$

Si tratta di una forma adimensionalizzata in cui:

$$\tilde{X} = \frac{X}{L} \quad \tilde{V} = \frac{V}{U_\infty} \quad \tilde{t} = \frac{tU_\infty}{L} \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho_\infty U_\infty^2} \quad Re = \frac{\rho_\infty U_\infty L}{\mu_\infty} \quad (5.6)$$

Se si considera una formulazione esplicita si potrebbe usare la seconda equazione per ricavare \tilde{u} in funzione di \tilde{v} e \tilde{p} . Poi sostituirlo nella terza equazione e ricavare \tilde{v} in funzione di \tilde{p} . Rimarrebbe solo la prima equazione da risolvere per trovare la pressione, ma sfortunatamente questa non compare nell'equazione della continuità. Il problema è dunque la pressione. La difficoltà si può superare, ad esempio, manipolando l'equazione di conservazione della massa. L'idea è quella di aggiungere un termine di pressione dipendente dal tempo. Questo approccio è generalmente conosciuto come comprimibilità artificiale.

5.3.1 Comprimibilità artificiale

Questo schema si può applicare alle equazioni stazionarie ed incomprimibili di *Navier-Stokes* modificando come segue la continuità:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (5.7)$$

dove τ è la “comprimibilità artificiale”. Questa a sua volta può essere legata ad una pseudo-celerità del suono (in forma adimensionale) dalla relazione:

$$\tau = \frac{1}{a^2} \quad (5.8)$$

Grazie alla precedente uguaglianza il sistema da risolvere si esprime così:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial t} + a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uv) + \frac{\partial}{\partial y} (v^2 + p) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Si tratta sempre di una forma non dimensionale dove però si è trascurato il simbolo \sim che denota una quantità adimensionale. È chiaro che la soluzione ha un senso fisico solo quando si arriva ad uno stato stazionario, quando cioè il vincolo di solenoidailità del vettore vorticità risulta soddisfatto.

5.4 Metodo Marker and Cell (MAC)

Questo metodo utilizza una approssimazione al primo ordine per la derivata temporale e una del secondo, centrata per la discretizzazione spaziale. Inoltre utilizza un tipo particolare di griglia detta "staggered grid". Un esempio di questo tipo di griglia è riportato nella figura sottostante:

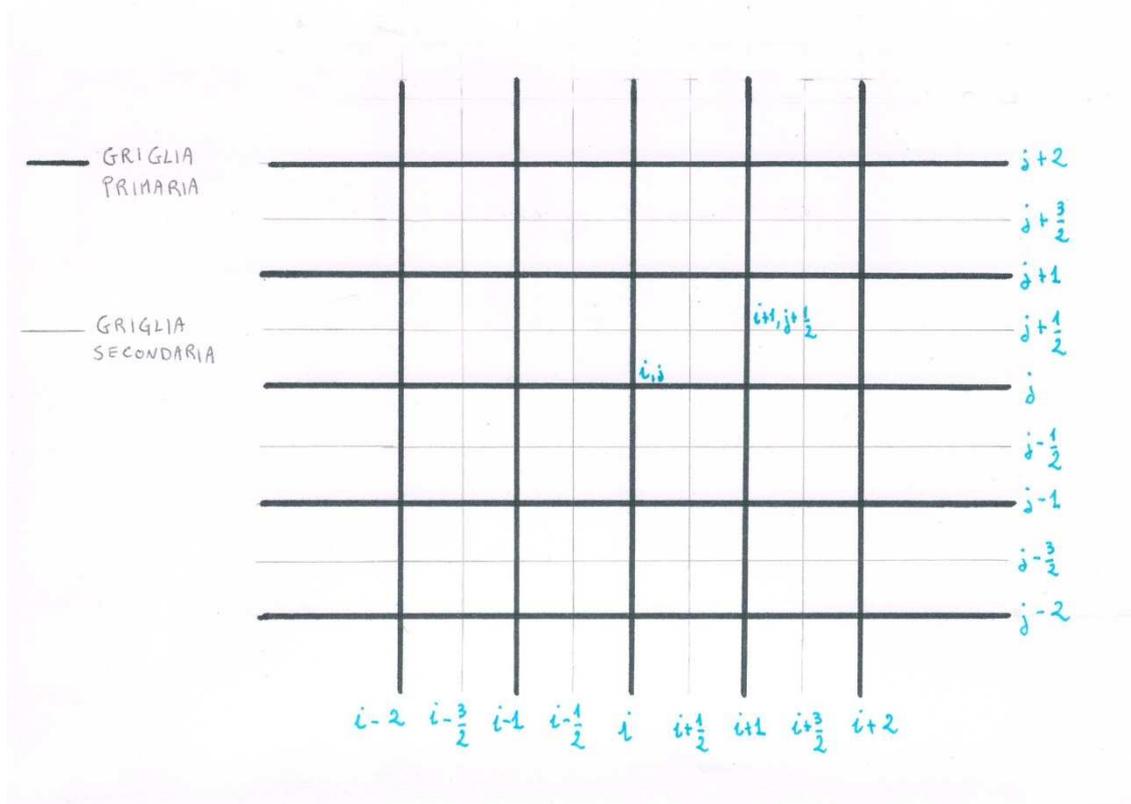


Figura 5.1: Staggered grid

Come si vede dalla figura vi sono due griglie sovrapposte ottenute tramite una traslazione. I punti di griglia (i, j) sono quelli della così detta *griglia primaria*, mentre quelli della *griglia secondaria* si distinguono dai precedenti per incrementi di metà passo. Ad ogni

specifico punto di griglia viene assegnata una diversa variabile. Nel caso delle equazioni di *Navier-Stokes* le incognite sono u, v, p e solitamente la pressione si definisce sulla griglia primaria mentre le componenti della velocità sulla griglia secondaria. Per essere più precisi la componente orizzontale della velocità (u) è assegnata nel mezzo passo di griglia nella direzione di x mentre la componente verticale (v) è assegnata nel mezzo passo di griglia nella direzione y . Seguendo questo criterio si ottiene la seguente griglia:

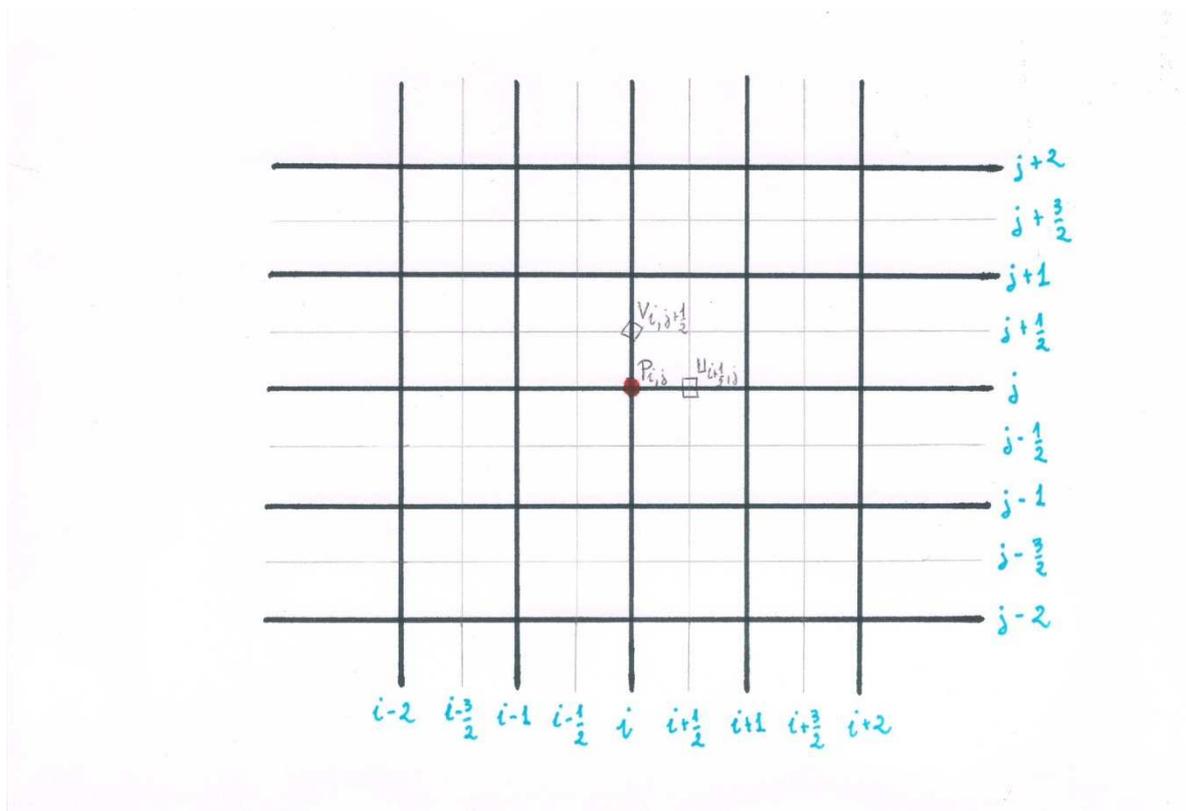


Figura 5.2: Disposizione nella griglia delle incognite del problema

Tornando allo schema Marker and Cell la seconda equazione del sistema viene applicata alla griglia secondaria nel punto $(i + \frac{1}{2}, j)$ per ottenere:

$$\begin{aligned}
 u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = & u_{i+\frac{1}{2},j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} ((u^2)_{i+1,j}^n - (u^2)_{i,j}^n) \\
 & - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left((uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - (uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{1}{Re} \frac{u_{i-\frac{1}{2},j}^n - 2u_{i+\frac{1}{2},j}^n + u_{i+\frac{3}{2},j}^n}{(\Delta x)^2} \\
 & + \frac{1}{Re} \frac{u_{i+\frac{1}{2},j-1}^n - 2u_{i+\frac{1}{2},j}^n + u_{i+\frac{1}{2},j+1}^n}{(\Delta y)^2}
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

Mentre la terza equazione si applica al punto $(i, j + \frac{1}{2})$ ottenendo:

$$\begin{aligned}
v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = & v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} (p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta y} ((v^2)_{i,j+1}^n - (v^2)_{i,j}^n) \\
& - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - (uv)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{1}{Re} \frac{v_{i,j-\frac{1}{2}}^n - 2u_{i,j+\frac{1}{2}}^n + u_{i,j+\frac{3}{2}}^n}{(\Delta x)^2} \\
& + \frac{1}{Re} \frac{u_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n - 2u_{i,j+\frac{1}{2}}^n + u_{i+1,j+\frac{3}{2}}^n}{(\Delta y)^2}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Tuttavia poiché i valori della velocità sono noti solo nella griglia secondaria i valori che compaiono nelle due discretizzazioni e che fanno riferimento alla griglia primaria devono essere rimpiazzati con valori appropriati riferiti alla griglia secondaria. Per far ciò si usano queste relazioni:

$$\begin{aligned}
(u^2)_{i+1,j} &= \frac{1}{4} \left(u_{i+\frac{3}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j} \right)^2 \\
(u^2)_{i,j} &= \frac{1}{4} \left(u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j} \right)^2 \\
(v^2)_{i,j+1} &= \frac{1}{4} \left(v_{i,j+\frac{3}{2}} + v_{i,j+\frac{1}{2}} \right)^2 \\
(v^2)_{i,j} &= \frac{1}{4} \left(v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} \right)^2 \\
(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4} \left(u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j+1} \right) \left(v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}} \right) \\
(uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4} \left(u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j-1} \right) \left(v_{i,j-\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}} \right) \\
(uv)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4} \left(u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j+1} \right) \left(v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i-1,j+\frac{1}{2}} \right)
\end{aligned} \tag{5.12}$$

A questo punto rimane solo l'equazione di conservazione della massa che si applica al punto di griglia (i, j) per ottenere:

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n - a^2 \Delta t \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta y} \right) \tag{5.13}$$

5.4.1 Scelta della pseudo - celerità del suono

Dopo alcune prove si è osservato che un valore di $\tilde{\alpha} = 1$ produce una convergenza adeguata

5.4.2 Implementazione delle condizioni al contorno

Per quanto riguarda l'implementazione delle condizioni al contorno, la staggered grid e il metodo MAC forniscono un vantaggio. Infatti si può posizionare la griglia secondaria ad esempio lungo una parete. Poiché lungo questa griglia sono richieste solo informazioni sulla velocità, e non sulla pressione, risolviamo il problema della mancanza di condizioni al contorno per la pressione. Tuttavia questo vantaggio è accompagnato da uno svantaggio: la richiesta di alcuni valori di velocità al di fuori del dominio.

Come esempio si riporta l'implementazione delle condizioni al contorno di una parete fissa e di una che si muove orizzontalmente ad una velocità costante U.

Parete fissa:

Per esprimere le condizioni al contorno si farà riferimento alla figura seguente:

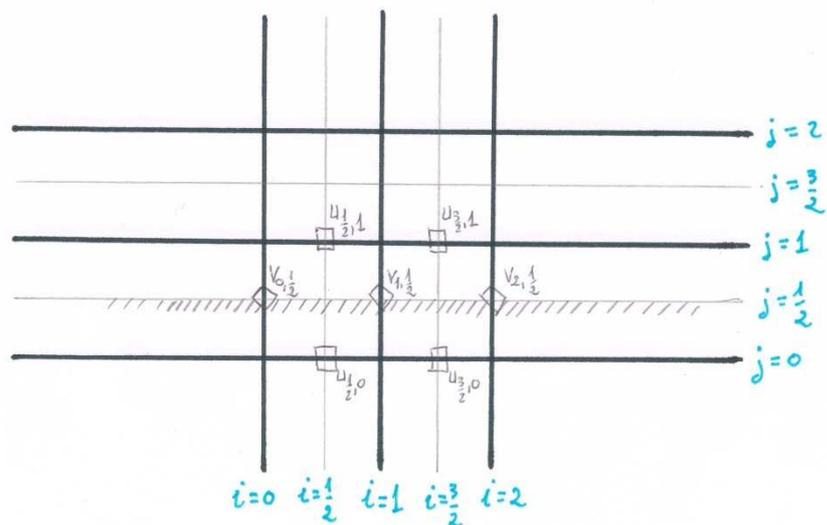


Figura 5.3: Implementazione delle condizioni al contorno per una parete, indicata dai trattini e posta in $j = \frac{1}{2}$

Avendo una parete fissa occorre imporre la condizione di aderenza: per la componente verticale della velocità basta che risulti:

$$v_{0,\frac{1}{2}} = v_{1,\frac{1}{2}} = \dots = 0 \tag{5.14}$$

mentre per la componente orizzontale abbiamo il problema che quest'ultima non è presente lungo la parete. Allora si impone che:

$$\underbrace{\frac{u_{i,0} + u_{i,1}}{2}}_{\substack{\text{media che rappresenta} \\ \text{la componente orizzontale} \\ \text{della velocità sulla parete}}} = 0, i = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \quad (5.15)$$

Grazie alla precedente uguaglianza si possono valutare i valori di velocità richiesti, ma fuori dal dominio, in particolare risulta:

$$u_{i,0} = -u_{i,1} \quad (5.16)$$

Parete mobile:

Il discorso è analogo occorre in particolare che:

$$v_{0,\frac{1}{2}} = v_{1,\frac{1}{2}} = \dots = 0 \quad (5.17)$$

$$\frac{u_{i,0} + u_{i,1}}{2} = U \text{ e quindi } u_{i,0} = 2U - u_{i,1}, i = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \quad (5.18)$$

5.5 Programma utilizzato

Di seguito si riporta l'implementazione del MAC fatta in MatLab:

```
function[uv,vv,pv]=mac(dx,dy,dt,x,y,t,a,Re)
%Risolve il problema della driven cavity
%approssimando le equazioni di Navier-Stokes
%con il metodo Marker and Cell alle differenze
%finite
nx=(x(2)-x(1))/dx+1;
ny=(y(2)-y(1))/dy+1;
un=zeros(nx+1,nx);
uv=zeros(nx+1,nx);uv(1,:)=2;
vn=zeros(nx,nx+1);
vv=zeros(nx,nx+1);
pn=zeros(nx+1,nx+1);
pv=zeros(nx+1,nx+1);
c=1;
while c~=t
    for i=2:nx
        for j=2:ny-1
            un(i,j)=uv(i,j)-(dt/dx)*(pv(i,j+1)-pv(i,j))-
            (dt/dx)*(0.25*((uv(i,j+1)+...
            uv(i,j))^2))+dt/dx*(0.25*((uv(i,j)+uv(i,j-
            1))^2))-...
```

```

(dt/dy)*(0.25*(uv(i,j)+uv(i+1,j))*(vv(i,j)+vv(i,j+1)))+...
(dt/dy)*(0.25*(uv(i,j)+uv(i-1,j))*(vv(i-1,j)+vv(i-
1,j+1)))+...
(1/Re)*(dt/(dx^2))*(uv(i,j-1)-
2*uv(i,j)+uv(i,j+1))+...
(1/Re)*(dt/(dx^2))*(uv(i-1,j)-2*uv(i,j)+uv(i+1,j));
    end
end
for i=2:nx-1
    for j=2:nx
        vn(i,j)=vv(i,j)-(dt/dy)*(pv(i+1,j)-pv(i,j))-
(dt/dy)*(0.25*(vv(i+1,j)+...
vv(i,j))^2)+(dt/dy)*(0.25*(vv(i,j)+vv(i-
1,j))^2))-...
(dt/dx)*(0.25*(uv(i,j)+uv(i+1,j))*(vv(i,j)+vv(i,j+1)))+...
(dt/dy)*(0.25*(uv(i,j-1)+uv(i+1,j-1))*(vv(i,j)+vv(i,j-
1)))+...
(1/Re)*(dt/(dx^2))*(vv(i,j-1)-
2*vv(i,j)+vv(i,j+1))+...
(1/Re)*(dt/(dx^2))*(vv(i-1,j)-2*vv(i,j)+vv(i+1,j));
    end
end
un(:,1)=0;un(:,nx)=0;
for m=1:nx
    un(1,m)=-un(2,m)+2;
    un(nx+1,m)=-un(nx,m);
end
vn(1,:)=0;vn(nx,:)=0;
for m=1:nx
    vn(m,1)=-vn(m,2);
    vn(m,nx+1)=-vn(m,nx);
end

for i=2:nx
    for j=2:nx
        pn(i,j)=pv(i,j)-(a^2)*(dt/dx)*(un(i,j)-un(i,j-1)+vn(i,j)-vn(i-
1,j));
    end
end
pn(1,1)=pv(1,1)-(a^2)*(dt/dx)*(un(1,1)+vn(1,1));
pn(1,nx+1)=pv(1,nx+1)-(a^2)*(dt/dx)*(-un(1,nx)+vn(1,nx+1));
pn(nx+1,1)=pv(nx+1,1)-(a^2)*(dt/dx)*(un(nx,1)-vn(nx-1,1));
pn(nx+1,nx+1)=pv(nx+1,nx+1)-(a^2)*(dt/dx)*(-un(nx+1,nx-1)-vn(nx-
1,nx+1));
    for s=2:nx
        pn(1,s)=pv(1,s)-(a^2)*(dt/dx)*(un(1,s)-un(1,s-1)+vn(1,s));
        pn(s,1)=pv(s,1)-(a^2)*(dt/dx)*(vn(s,1)-vn(s-1,1)+un(s,1));
        pn(nx+1,s)=pv(nx+1,s)-(a^2)*(dt/dx)*(un(nx,s)-un(nx,s-1)-vn(nx-
1,s));
        pn(s,nx+1)=pv(s,nx+1)-(a^2)*(dt/dx)*(vn(s,nx)-vn(s-1,nx)-un(s,nx-
1));
    end
end
uv=un;
vv=vn;
pv=pn;
c=c+1;

```

end

5.6 Validazione del codice numerico

Per verificare la correttezza del codice lo si valida studiando il problema della *cavità in moto* (“lid driven cavity”).

5.6.1 2D Lid-Driven Cavity

Questo problema prende in considerazione una cavità quadrata di lato L , con tre pareti fisse e la base in movimento verso destra ad una velocità orizzontale costante U . Ossia la situazione seguente:

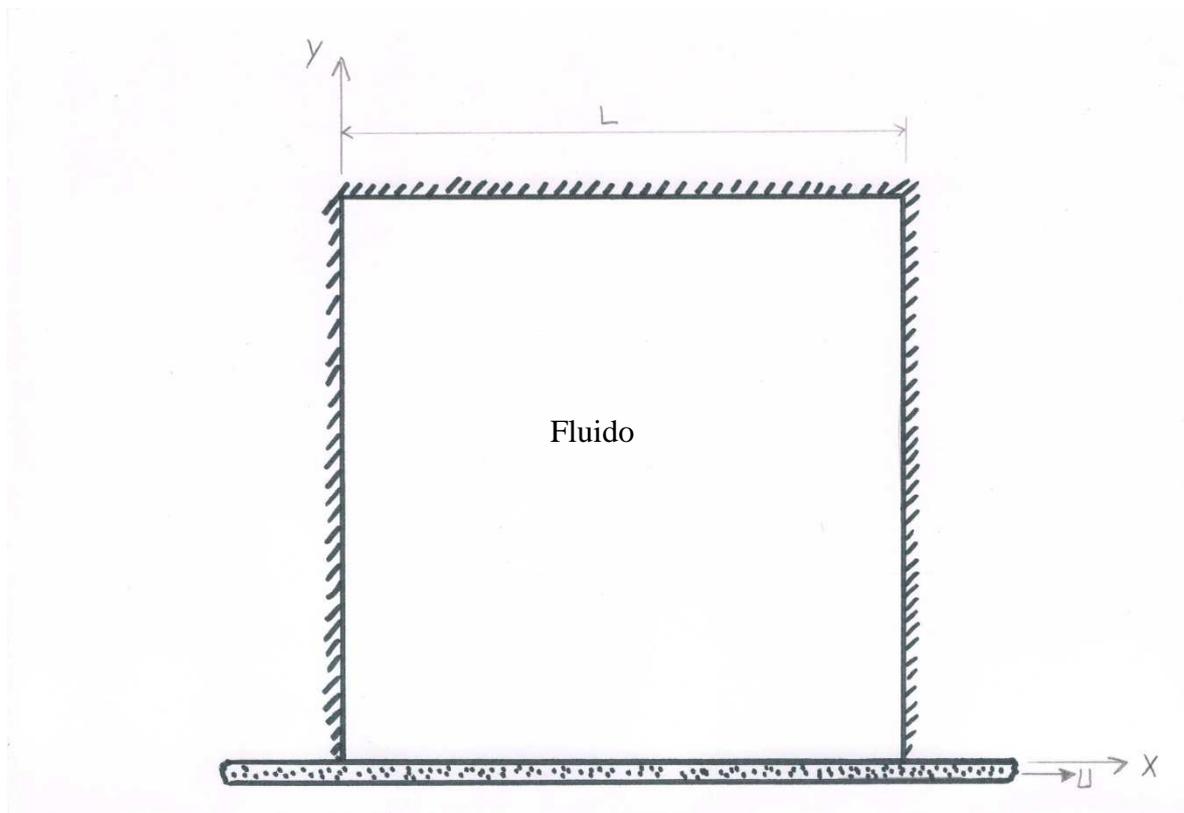


Figura 5.4: Cavità in moto

Inoltre per la simulazione numerica si assumeranno i seguenti dati:

1. $L = 10 \text{ [cm]}$
2. $\Delta x = \Delta y = 0.125 \text{ [cm]}$
3. $U = 6 \text{ [m/s]}$
4. Il fluido è olio motore a $20 \text{ }^\circ\text{C}$ con:
 - $\nu = 0.001 \text{ [m}^2/\text{s]}$
 - $\rho = 890 \text{ [kg/m}^3\text{]}$
5. $\tilde{\alpha} = 1$

Con queste scelte le grandezze adimensionali risultano:

- i. $Re = \frac{U_\infty L}{\nu} = \frac{6 \cdot 0.1}{0.001} = 600$
- ii. $\widetilde{\Delta x} = \frac{\Delta x}{L} = \frac{0.125}{10} = 0.0125$
- iii. $\widetilde{\Delta y} = \frac{\Delta y}{L} = \frac{0.125}{10} = 0.0125$
- iv. $\widetilde{\Delta t} = 0.004$ (assunto)

5.6.2 Griglia utilizzata

Si riporta di seguito la griglia che è stata utilizzata:

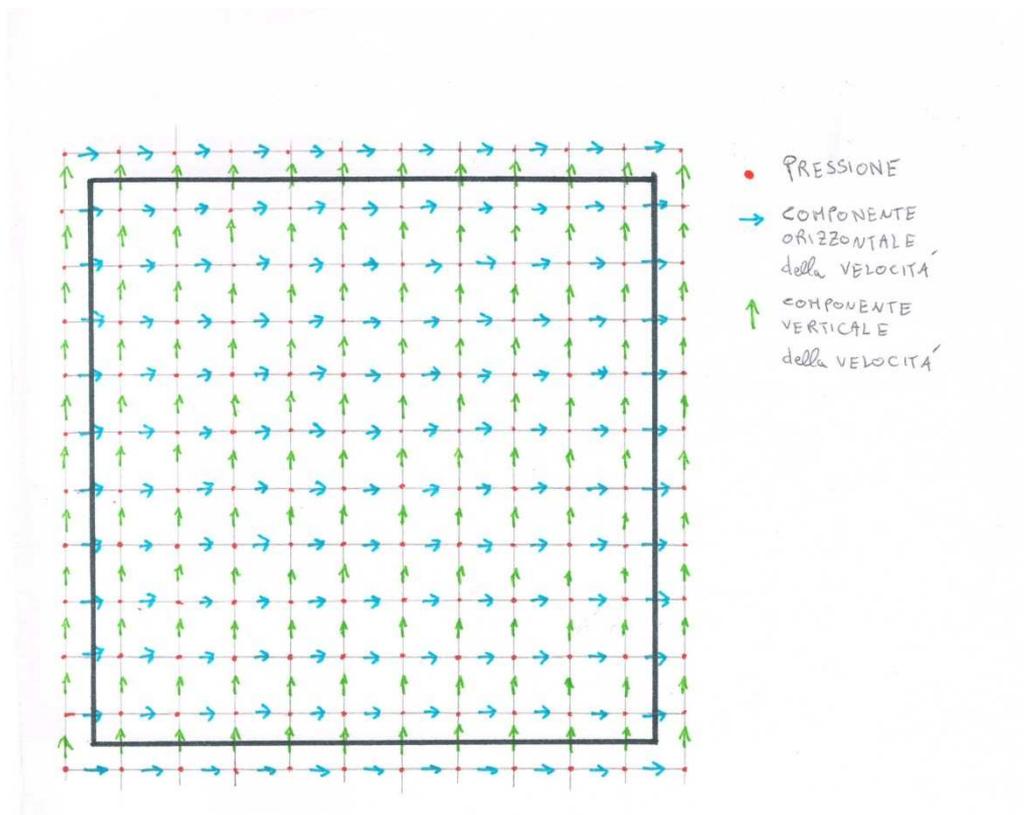
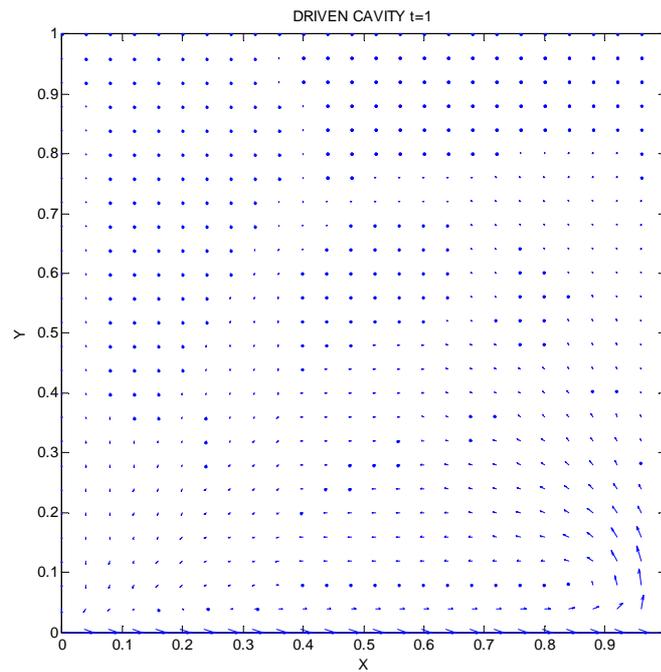


Figura 5.5: Griglia utilizzata per lo studio della cavità in moto (nella figura 10x10)

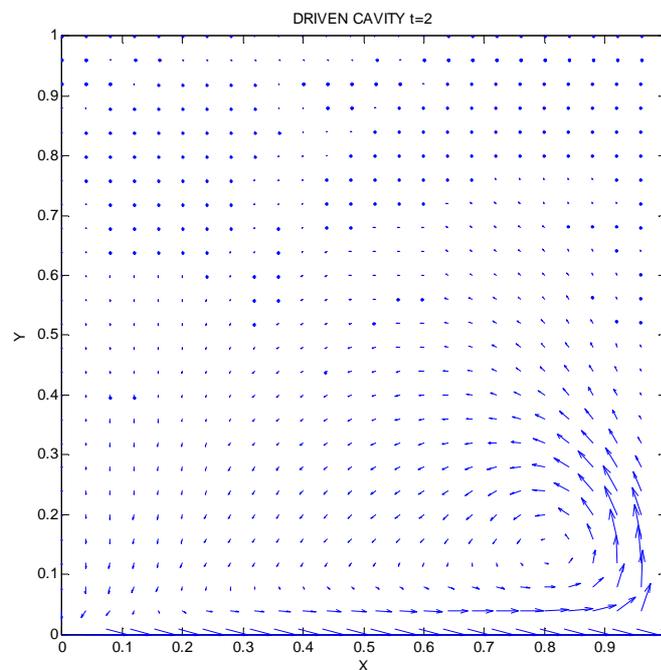
5.6.3 Risultati ottenuti

Si incomincia la simulazione e si vuole conoscere il comportamento della cavità pochi istanti adimensionali dopo la repentina messa in movimento della parete di base. Per le figure che seguiranno verrà utilizzata una griglia 25x25. Dopo 1 unità di tempo adimensionale la situazione è la seguente:

Figura 5.6: Driven cavity a $\tilde{t} = 1$

Come era prevedibile la maggior parte del fluido è ancora in quiete, solamente la parte in basso a causa della condizione di aderenza e della viscosità del fluido comincia a mettersi in moto.

Invece dopo 2 unità di tempo si ha questa situazione:

Figura 5.7: Driven cavity a $\tilde{t} = 2$

Si è formata una circolazione nell'angolo in basso a destra che ha raggiunto la parete di destra. Ecco cosa si ottiene invece a $\tilde{t} = 4$:

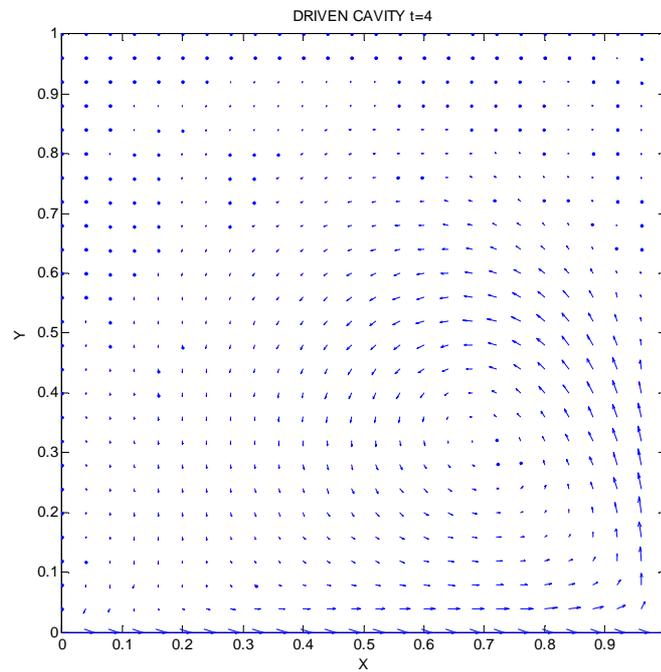


Figura 5.8: Driven Cavity a $\tilde{t} = 4$

Il vortice ha aumentato le sue dimensioni. Questo è molto importante poiché caratterizzerà la condizione a transitorio esaurito. Proseguendo ancora dopo 6 unità di tempo si ha:

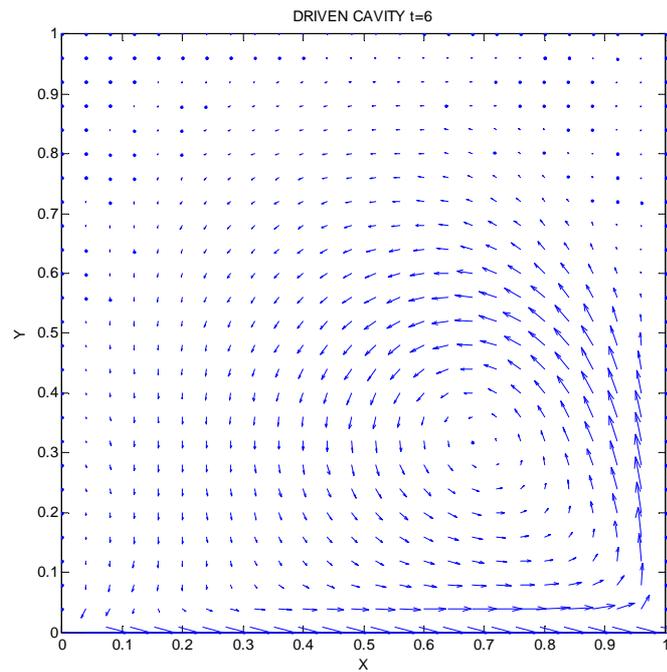


Figura 5.9: Driven cavity a $\tilde{t} = 6$

Ora si è messa in moto anche la parte in alto del fluido.

Dopo 25 unità di tempo possiamo considerare esaurito il transitorio e la soluzione stazionaria è la seguente:

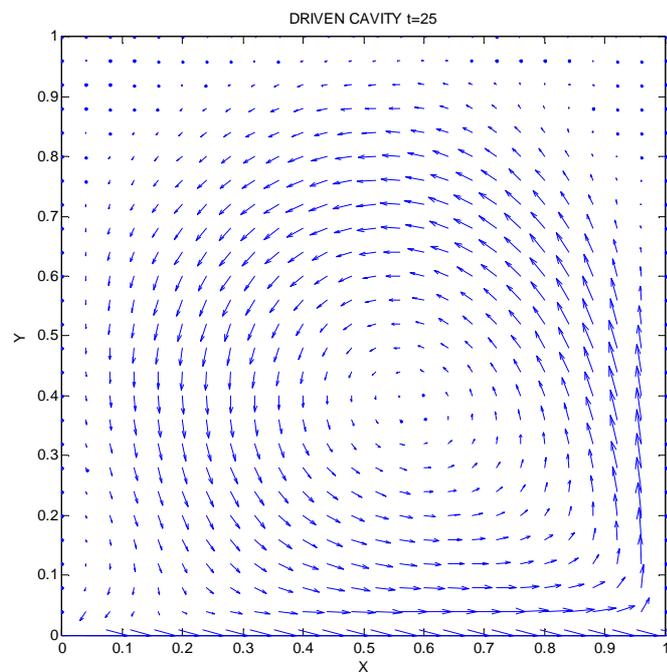


Figura 5.10: Driven cavity a $\tilde{t} = 25$

Il centro del vortice si è stabilizzato nel punto $(0.53, 0.43)$; giustamente non è nel centro della cavità poiché la parete in moto tende a spostarlo verso destra. Inoltre si osserva come al centro del vortice la velocità sia molto bassa mentre è più alta nella parte superiore prima di iniziare la fase di discesa.

Negli angoli in alto a sinistra e a destra il flusso è quasi fermo, e si può intuire la presenza di una bolla di ricircolazione.

In questa situazione si possono plottare le linee di corrente; in questo caso però verrà usata una griglia 80×80 e si ottiene:

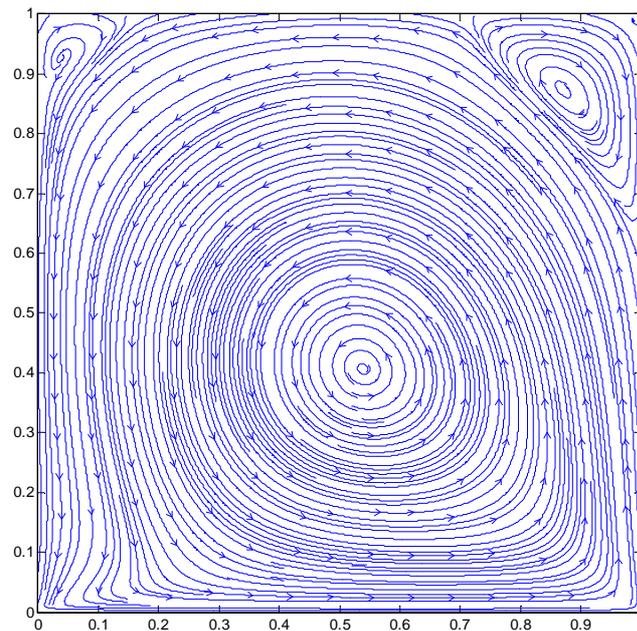


Figura 5.11: Driven cavity, streamline a $\tilde{t} = 25$

Il risultato sopra riportato è sicuramente quello più corretto grazie all'ispessimento della griglia; inoltre le linee di corrente ci danno un risultato più chiaro dei vettori velocità infatti si osserva chiaramente come nell'angolo in alto a destra e a sinistra si sia formata una sorta di "sacca" dove il fluido ruota in senso opposto al vortice centrale.

Il metodo MAC ci permette anche di conoscere la pressione. Si ha (sempre con una griglia 80×80):

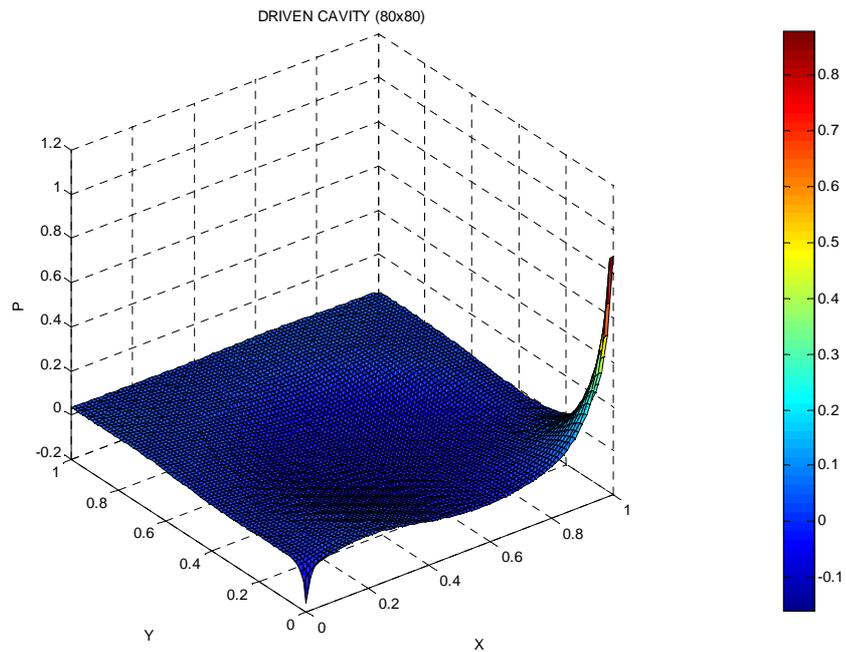


Figura 5.12: Driven cavity, pressione a $\tilde{t} = 25$

Si possono notare due punti in cui vi sono delle discontinuità, una nell'angolo in basso a sinistra e l'altra in quello in basso a destra. Tuttavia per capire meglio dove sono localizzate le varie zone di pressione conviene riportare nello stesso grafico sia i vettori che rappresentano la velocità sia le curve di livello della pressione:

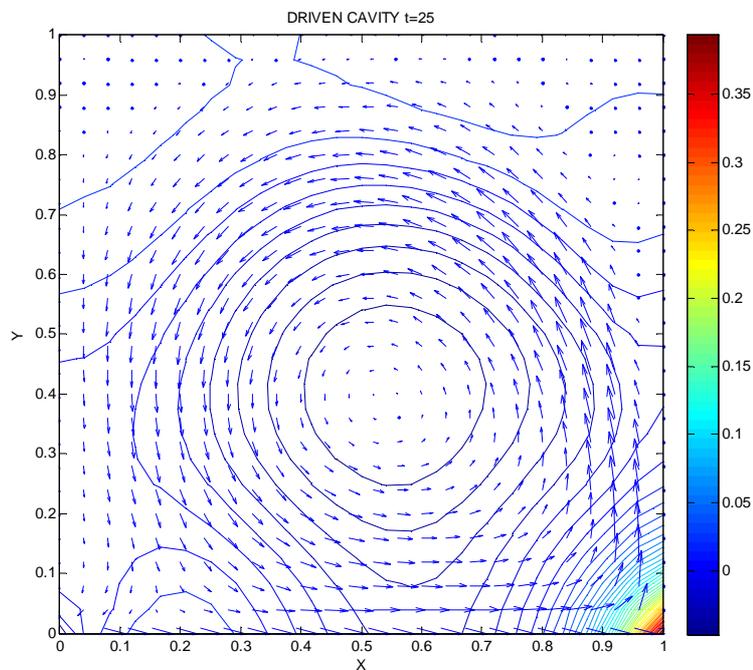


Figura 5.13: Driven cavity, linee di livello della pressione e vettori velocità a $\tilde{t} = 25$

Come si vede nella zona del centro del vortice si ha un minimo di pressione caratterizzato da una depressione. Invece nell'angolo in basso a sinistra si ha un leggero aumento di pressione. Nell'angolo in alto a sinistra, dove il fluido è in quiete, la pressione è circa costante.

In particolare si nota un aumento molto marcato nell'angolo in basso a destra, in questa zona si raggiunge il valore massimo che è pari a 0.4028

Infine si traccia anche l'andamento della vorticità che è così definita:

$$\underline{\Omega} = 2\underline{\omega} = \text{rot}\underline{V} = \underline{\nabla} \times \underline{V} \tag{5.19}$$

che nel caso 2D si riduce a:

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{5.20}$$

Il grafico che si ottiene è il seguente:

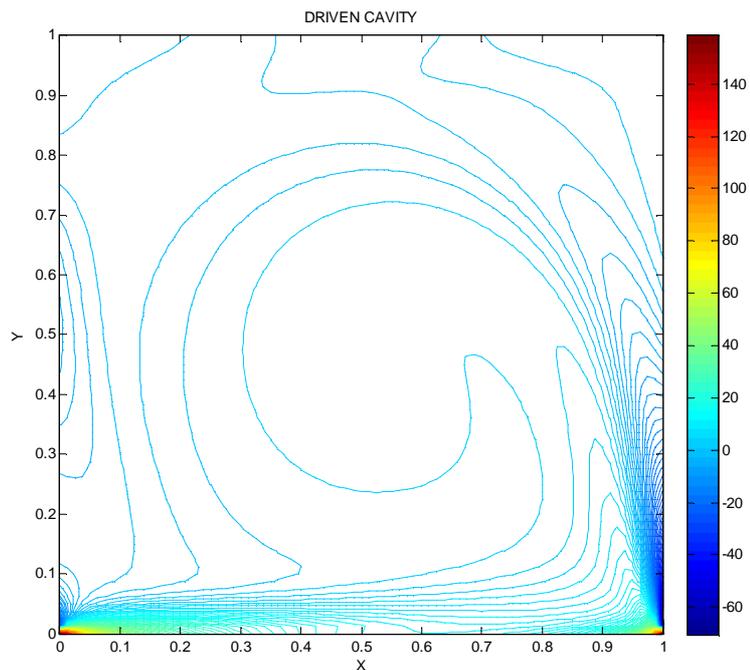


Figure 5.14: Driven cavity, linee di livello (200) della vorticità a $\tilde{t} = 25$

Oppure nella versione tridimensionale:

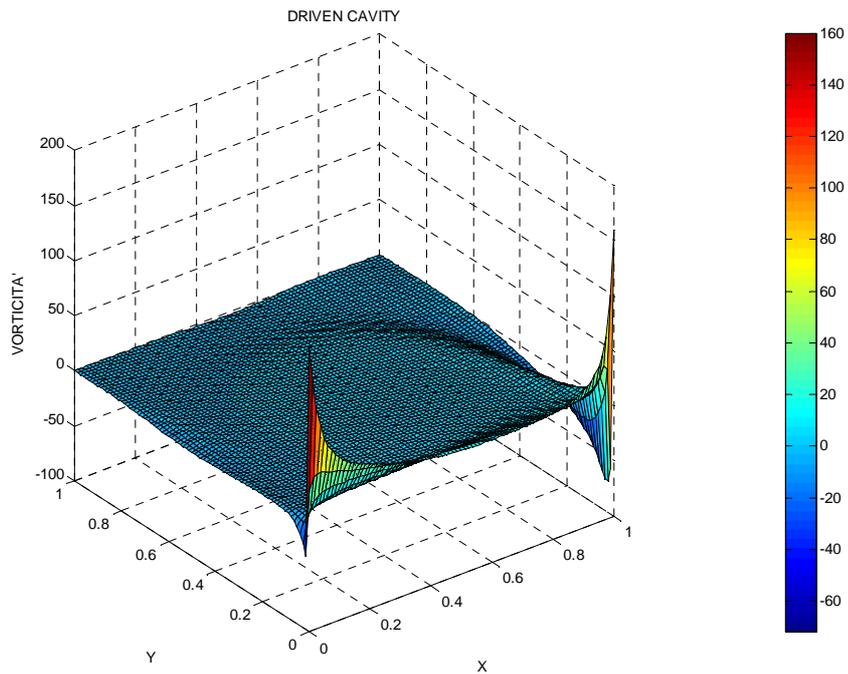


Figura 5.15: Driven Cavity, andamento 3D della vorticità

NOTA:

- ✓ Si riportano qui di seguito le matrici con i valori numerici delle velocità, ricordando che si tratta di valori adimensionali e quindi per poter avere i valori dimensionali occorre moltiplicarli per i rispettivi coefficienti moltiplicativi:

Tabella 5.1: Matrice della componente orizzontale della velocità

Columns 1 through 8							
2	1.8500	1.7463	1.6737	1.6151	1.5634	1.5160	1.4720
0	0.1500	0.2537	0.3263	0.3849	0.4366	0.4840	0.5280
0	-0.0905	-0.0844	-0.0415	0.0115	0.0672	0.1226	0.1756
0	-0.0195	-0.0343	-0.0231	0.0082	0.0493	0.0935	0.1371
0	-0.0059	-0.0052	0.0105	0.0380	0.0721	0.1087	0.1449
0	0.0013	0.0106	0.0289	0.0538	0.0824	0.1125	0.1420
0	0.0053	0.0195	0.0390	0.0612	0.0848	0.1088	0.1320
0	0.0076	0.0237	0.0421	0.0605	0.0791	0.0976	0.1151
0	0.0087	0.0242	0.0394	0.0535	0.0671	0.0804	0.0927
0	0.0087	0.0215	0.0322	0.0413	0.0499	0.0584	0.0661
0	0.0075	0.0161	0.0215	0.0252	0.0289	0.0328	0.0364
0	0.0053	0.0086	0.0083	0.0066	0.0053	0.0048	0.0047
0	0.0022	-0.0001	-0.0064	-0.0135	-0.0198	-0.0247	-0.0283
0	-0.0013	-0.0094	-0.0214	-0.0339	-0.0453	-0.0546	-0.0618
0	-0.0050	-0.0184	-0.0356	-0.0533	-0.0698	-0.0838	-0.0948

0	-0.0083	-0.0261	-0.0478	-0.0703	-0.0917	-0.1107	-0.1261
0	-0.0107	-0.0318	-0.0570	-0.0834	-0.1094	-0.1332	-0.1536
0	-0.0121	-0.0349	-0.0621	-0.0912	-0.1208	-0.1490	-0.1742
0	-0.0122	-0.0349	-0.0625	-0.0927	-0.1244	-0.1558	-0.1851
0	-0.0111	-0.0321	-0.0581	-0.0876	-0.1195	-0.1523	-0.1840
0	-0.0090	-0.0268	-0.0497	-0.0765	-0.1066	-0.1385	-0.1704
0	-0.0064	-0.0200	-0.0383	-0.0609	-0.0872	-0.1162	-0.1461
0	-0.0037	-0.0126	-0.0257	-0.0428	-0.0638	-0.0881	-0.1142
0	-0.0014	-0.0059	-0.0137	-0.0249	-0.0396	-0.0576	-0.0781
0	0.0003	-0.0009	-0.0043	-0.0100	-0.0183	-0.0290	-0.0421
0	0.0007	0.0011	0.0006	-0.0009	-0.0034	-0.0069	-0.0114
0	-0.0007	-0.0011	-0.0006	0.0009	0.0034	0.0069	0.0114

Columns 9 through 16

1.4316	1.3950	1.3625	1.3344	1.3107	1.2912	1.2759	1.2643
0.5684	0.6050	0.6375	0.6656	0.6893	0.7088	0.7241	0.7357
0.2250	0.2699	0.3096	0.3439	0.3727	0.3960	0.4141	0.4272
0.1776	0.2136	0.2443	0.2692	0.2883	0.3016	0.3096	0.3124
0.1783	0.2075	0.2315	0.2498	0.2622	0.2689	0.2701	0.2658
0.1691	0.1923	0.2109	0.2243	0.2326	0.2357	0.2338	0.2268
0.1529	0.1702	0.1833	0.1922	0.1967	0.1971	0.1933	0.1854
0.1303	0.1423	0.1507	0.1556	0.1571	0.1554	0.1505	0.1423
0.1029	0.1104	0.1150	0.1168	0.1161	0.1130	0.1075	0.0994
0.0721	0.0761	0.0777	0.0774	0.0752	0.0712	0.0655	0.0579
0.0391	0.0403	0.0400	0.0383	0.0352	0.0309	0.0253	0.0184
0.0046	0.0039	0.0024	-0.0001	-0.0034	-0.0077	-0.0130	-0.0193
-0.0309	-0.0330	-0.0352	-0.0378	-0.0411	-0.0451	-0.0499	-0.0555
-0.0668	-0.0703	-0.0730	-0.0755	-0.0784	-0.0819	-0.0862	-0.0912
-0.1027	-0.1079	-0.1112	-0.1138	-0.1163	-0.1193	-0.1230	-0.1277
-0.1376	-0.1452	-0.1501	-0.1532	-0.1557	-0.1584	-0.1619	-0.1665
-0.1694	-0.1808	-0.1883	-0.1931	-0.1965	-0.1996	-0.2033	-0.2080
-0.1951	-0.2112	-0.2227	-0.2306	-0.2361	-0.2405	-0.2446	-0.2489
-0.2108	-0.2318	-0.2480	-0.2599	-0.2683	-0.2743	-0.2785	-0.2812
-0.2129	-0.2379	-0.2582	-0.2736	-0.2846	-0.2916	-0.2949	-0.2942
-0.2004	-0.2272	-0.2495	-0.2668	-0.2788	-0.2854	-0.2863	-0.2812
-0.1751	-0.2012	-0.2232	-0.2401	-0.2511	-0.2558	-0.2537	-0.2442
-0.1403	-0.1642	-0.1843	-0.1992	-0.2081	-0.2102	-0.2050	-0.1923
-0.0995	-0.1201	-0.1377	-0.1506	-0.1575	-0.1577	-0.1507	-0.1367
-0.0568	-0.0719	-0.0858	-0.0966	-0.1027	-0.1030	-0.0969	-0.0846
-0.0170	-0.0233	-0.0298	-0.0357	-0.0398	-0.0412	-0.0390	-0.0332
0.0170	0.0233	0.0298	0.0357	0.0398	0.0412	0.0390	0.0332

Columns 17 through 24

1.2567	1.2521	1.2519	1.2552	1.2666	1.2866	1.3318	1.4132
0.7433	0.7479	0.7481	0.7448	0.7334	0.7134	0.6682	0.5868
0.4358	0.4397	0.4392	0.4332	0.4207	0.3967	0.3547	0.2771
0.3106	0.3040	0.2935	0.2780	0.2579	0.2295	0.1905	0.1243

0.2564	0.2419	0.2230	0.1996	0.1724	0.1400	0.1002	0.0432
0.2148	0.1978	0.1759	0.1497	0.1198	0.0859	0.0456	-0.0037
0.1730	0.1561	0.1348	0.1094	0.0804	0.0472	0.0079	-0.0339
0.1305	0.1150	0.0957	0.0729	0.0464	0.0151	-0.0218	-0.0559
0.0886	0.0749	0.0582	0.0384	0.0148	-0.0143	-0.0480	-0.0738
0.0483	0.0365	0.0223	0.0053	-0.0159	-0.0429	-0.0725	-0.0891
0.0099	-0.0002	-0.0122	-0.0271	-0.0467	-0.0715	-0.0958	-0.1020
-0.0267	-0.0353	-0.0458	-0.0595	-0.0780	-0.1002	-0.1173	-0.1113
-0.0620	-0.0697	-0.0796	-0.0929	-0.1103	-0.1283	-0.1358	-0.1154
-0.0971	-0.1046	-0.1146	-0.1278	-0.1432	-0.1547	-0.1496	-0.1129
-0.1336	-0.1414	-0.1517	-0.1640	-0.1751	-0.1769	-0.1567	-0.1036
-0.1727	-0.1807	-0.1903	-0.1995	-0.2030	-0.1917	-0.1547	-0.0882
-0.2139	-0.2209	-0.2274	-0.2299	-0.2217	-0.1943	-0.1411	-0.0678
-0.2532	-0.2566	-0.2563	-0.2477	-0.2245	-0.1807	-0.1163	-0.0465
-0.2816	-0.2781	-0.2674	-0.2452	-0.2071	-0.1516	-0.0856	-0.0290
-0.2885	-0.2760	-0.2540	-0.2197	-0.1719	-0.1138	-0.0565	-0.0169
-0.2689	-0.2481	-0.2176	-0.1767	-0.1274	-0.0760	-0.0333	-0.0086
-0.2267	-0.2009	-0.1668	-0.1261	-0.0827	-0.0434	-0.0155	-0.0020
-0.1721	-0.1449	-0.1122	-0.0768	-0.0432	-0.0167	-0.0011	0.0041
-0.1163	-0.0908	-0.0626	-0.0349	-0.0116	0.0039	0.0103	0.0091
-0.0672	-0.0463	-0.0246	-0.0053	0.0088	0.0157	0.0158	0.0110
-0.0242	-0.0132	-0.0023	0.0065	0.0117	0.0128	0.0105	0.0064
0.0242	0.0132	0.0023	-0.0065	-0.0117	-0.0128	-0.0105	-0.0064

Columns 25 through 26

1.6079	2.0000
0.3921	0
0.1370	0
0.0355	0
-0.0116	0
-0.0356	0
-0.0491	0
-0.0574	0
-0.0629	0
-0.0663	0
-0.0672	0
-0.0644	0
-0.0564	0
-0.0432	0
-0.0278	0
-0.0158	0
-0.0094	0
-0.0060	0
-0.0035	0
-0.0016	0
-0.0002	0
0.0011	0
0.0026	0

0.0041	0
0.0044	0
0.0021	0
-0.0021	0

Tabella 5.II:Matrice della componente verticale della velocità

Columns 1 through 8							
0	0	0	0	0	0	0	0
0.1499	-0.1499	-0.1035	-0.0725	-0.0584	-0.0516	-0.0473	-0.0439
0.0592	-0.0592	-0.1095	-0.1152	-0.1113	-0.1072	-0.1025	-0.0968
0.0396	-0.0396	-0.0945	-0.1262	-0.1425	-0.1481	-0.1467	-0.1403
0.0335	-0.0335	-0.0952	-0.1418	-0.1698	-0.1822	-0.1832	-0.1763
0.0347	-0.0347	-0.1044	-0.1600	-0.1946	-0.2107	-0.2132	-0.2058
0.0398	-0.0398	-0.1185	-0.1794	-0.2166	-0.2342	-0.2372	-0.2289
0.0474	-0.0474	-0.1345	-0.1977	-0.2350	-0.2527	-0.2556	-0.2463
0.0560	-0.0560	-0.1499	-0.2129	-0.2490	-0.2662	-0.2689	-0.2585
0.0647	-0.0647	-0.1626	-0.2237	-0.2580	-0.2748	-0.2774	-0.2662
0.0722	-0.0722	-0.1711	-0.2290	-0.2617	-0.2785	-0.2813	-0.2698
0.0775	-0.0775	-0.1744	-0.2287	-0.2600	-0.2772	-0.2808	-0.2697
0.0798	-0.0798	-0.1720	-0.2224	-0.2528	-0.2709	-0.2759	-0.2662
0.0785	-0.0785	-0.1639	-0.2105	-0.2403	-0.2596	-0.2665	-0.2591
0.0735	-0.0735	-0.1506	-0.1933	-0.2226	-0.2431	-0.2525	-0.2481
0.0653	-0.0653	-0.1328	-0.1716	-0.2001	-0.2218	-0.2336	-0.2326
0.0546	-0.0546	-0.1118	-0.1465	-0.1737	-0.1958	-0.2097	-0.2123
0.0426	-0.0426	-0.0891	-0.1194	-0.1446	-0.1663	-0.1815	-0.1871
0.0305	-0.0305	-0.0664	-0.0919	-0.1144	-0.1347	-0.1501	-0.1578
0.0194	-0.0194	-0.0455	-0.0659	-0.0849	-0.1028	-0.1174	-0.1261
0.0104	-0.0104	-0.0278	-0.0431	-0.0581	-0.0727	-0.0855	-0.0942
0.0040	-0.0040	-0.0142	-0.0248	-0.0355	-0.0464	-0.0565	-0.0643
0.0003	-0.0003	-0.0054	-0.0117	-0.0184	-0.0254	-0.0323	-0.0382
-0.0010	0.0010	-0.0008	-0.0039	-0.0072	-0.0107	-0.0143	-0.0177
-0.0007	0.0007	0.0004	-0.0005	-0.0015	-0.0025	-0.0035	-0.0046
0	0	0	0	0	0	0	0
Columns 9 through 16							
0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0404	-0.0366	-0.0324	-0.0282	-0.0237	-0.0196	-0.0153	-0.0117
-0.0897	-0.0814	-0.0722	-0.0625	-0.0525	-0.0429	-0.0335	-0.0249
-0.1302	-0.1175	-0.1029	-0.0874	-0.0717	-0.0563	-0.0415	-0.0277
-0.1636	-0.1466	-0.1269	-0.1057	-0.0842	-0.0630	-0.0427	-0.0235
-0.1906	-0.1698	-0.1454	-0.1191	-0.0925	-0.0662	-0.0409	-0.0166
-0.2114	-0.1871	-0.1586	-0.1280	-0.0970	-0.0666	-0.0372	-0.0086

-0.2266	-0.1991	-0.1670	-0.1329	-0.0986	-0.0650	-0.0323	-0.0005
-0.2368	-0.2066	-0.1716	-0.1347	-0.0978	-0.0619	-0.0268	0.0075
-0.2428	-0.2105	-0.1733	-0.1343	-0.0957	-0.0580	-0.0212	0.0151
-0.2455	-0.2118	-0.1730	-0.1326	-0.0926	-0.0537	-0.0156	0.0220
-0.2453	-0.2111	-0.1714	-0.1302	-0.0893	-0.0494	-0.0104	0.0283
-0.2427	-0.2089	-0.1692	-0.1275	-0.0860	-0.0454	-0.0056	0.0339
-0.2377	-0.2054	-0.1666	-0.1250	-0.0831	-0.0419	-0.0014	0.0389
-0.2298	-0.2002	-0.1632	-0.1224	-0.0806	-0.0389	0.0024	0.0435
-0.2184	-0.1925	-0.1583	-0.1193	-0.0780	-0.0362	0.0058	0.0481
-0.2025	-0.1812	-0.1508	-0.1144	-0.0746	-0.0330	0.0095	0.0528
-0.1816	-0.1651	-0.1393	-0.1065	-0.0690	-0.0286	0.0136	0.0571
-0.1559	-0.1441	-0.1231	-0.0946	-0.0606	-0.0226	0.0178	0.0598
-0.1270	-0.1191	-0.1028	-0.0791	-0.0495	-0.0156	0.0211	0.0591
-0.0969	-0.0923	-0.0804	-0.0617	-0.0375	-0.0090	0.0222	0.0540
-0.0679	-0.0662	-0.0584	-0.0448	-0.0263	-0.0042	0.0201	0.0446
-0.0419	-0.0422	-0.0382	-0.0298	-0.0174	-0.0020	0.0150	0.0319
-0.0204	-0.0216	-0.0205	-0.0168	-0.0104	-0.0018	0.0081	0.0180
-0.0056	-0.0064	-0.0066	-0.0059	-0.0042	-0.0014	0.0021	0.0058
0	0	0	0	0	0	0	0

Columns 17 through 24

0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0077	-0.0047	-0.0002	0.0032	0.0113	0.0200	0.0452	0.0814
-0.0164	-0.0086	0.0001	0.0092	0.0238	0.0440	0.0871	0.1591
-0.0146	-0.0022	0.0107	0.0246	0.0438	0.0723	0.1261	0.2252
-0.0052	0.0122	0.0295	0.0479	0.0709	0.1047	0.1658	0.2822
0.0067	0.0292	0.0513	0.0741	0.1008	0.1386	0.2061	0.3315
0.0190	0.0460	0.0726	0.0995	0.1298	0.1717	0.2453	0.3732
0.0308	0.0615	0.0918	0.1224	0.1562	0.2029	0.2823	0.4072
0.0415	0.0752	0.1085	0.1422	0.1798	0.2320	0.3159	0.4330
0.0511	0.0870	0.1226	0.1591	0.2009	0.2589	0.3454	0.4496
0.0596	0.0970	0.1346	0.1740	0.2204	0.2838	0.3696	0.4558
0.0669	0.1056	0.1451	0.1876	0.2389	0.3059	0.3867	0.4498
0.0734	0.1133	0.1549	0.2009	0.2562	0.3238	0.3942	0.4293
0.0793	0.1208	0.1648	0.2141	0.2716	0.3352	0.3890	0.3925
0.0852	0.1285	0.1750	0.2264	0.2827	0.3370	0.3687	0.3394
0.0914	0.1365	0.1845	0.2355	0.2861	0.3255	0.3316	0.2728
0.0973	0.1434	0.1910	0.2379	0.2779	0.2981	0.2783	0.1994
0.1017	0.1468	0.1907	0.2293	0.2547	0.2543	0.2138	0.1295
0.1022	0.1432	0.1799	0.2070	0.2165	0.1988	0.1477	0.0729
0.0965	0.1307	0.1579	0.1727	0.1687	0.1407	0.0904	0.0332
0.0843	0.1100	0.1273	0.1318	0.1194	0.0893	0.0476	0.0085
0.0669	0.0842	0.0933	0.0911	0.0761	0.0500	0.0198	-0.0050
0.0467	0.0571	0.0606	0.0558	0.0425	0.0235	0.0041	-0.0102
0.0264	0.0317	0.0325	0.0281	0.0192	0.0080	-0.0022	-0.0090
0.0090	0.0108	0.0109	0.0088	0.0052	0.0011	-0.0023	-0.0041
0	0	0	0	0	0	0	0

Columns 25 through 27		
0	0	0
0.1948	0.3922	-0.3922
0.3350	0.5293	-0.5293
0.4239	0.5648	-0.5648
0.4786	0.5532	-0.5532
0.5105	0.5176	-0.5176
0.5257	0.4685	-0.4685
0.5272	0.4111	-0.4111
0.5163	0.3482	-0.3482
0.4934	0.2818	-0.2818
0.4585	0.2146	-0.2146
0.4114	0.1501	-0.1501
0.3523	0.0937	-0.0937
0.2825	0.0504	-0.0504
0.2066	0.0225	-0.0225
0.1341	0.0066	-0.0066
0.0756	-0.0029	0.0029
0.0351	-0.0090	0.0090
0.0095	-0.0125	0.0125
-0.0059	-0.0141	0.0141
-0.0143	-0.0143	0.0143
-0.0174	-0.0133	0.0133
-0.0160	-0.0106	0.0106
-0.0109	-0.0065	0.0065
-0.0043	-0.0022	0.0022
0	0	0

Legenda:

Valore massimo*

Valore minimo*

*si considerano solo i valori all'interno del dominio

Infine si studia l'andamento dell'errore. Questo verrà calcolato in questa maniera:

$$e^n = \iint_{x y} ((u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n)^2 + (v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n)^2) dx_i dy_j ,$$

(5.21)

dove n rappresenta l'indice di (pseudo-) tempo, e che in forma discreta e riferito ad una griglia 80x80 diventa:

$$e^n = \left(\sum_{i,j=1}^{i=82,j=81} (u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n)^2 + \sum_{i,j=1}^{i=81,j=82} (v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n)^2 \right) \Delta x_i \Delta y_j \quad (5.22)$$

Riportando in scala logaritmica per l'errore e lineare per l'iterazione si ottiene:

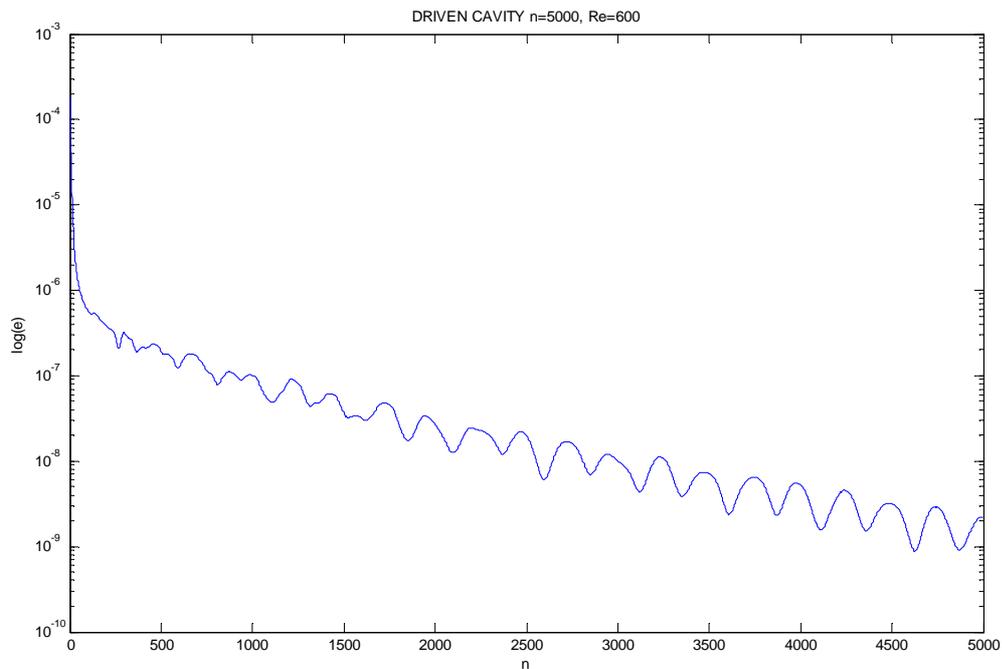


Figura 5.16: Andamento del residuo

Il valore minimo è di $8.7975e-010$ e si è partiti da un valore di $1.7977e-004$. Si osservi che 5000 iterazioni temporali ci hanno portato ad un valore finale dello pseudo-tempo pari a 20. A tale valore del tempo si è raggiunta una soluzione stazionaria.

5.7 Validazione con la letteratura per $Re=1000$

Il problema della cavità in moto è stato molto studiato quindi in letteratura si trovano molti risultati con cui potersi confrontare. Tra gli innumerevoli lavori si sceglierà quello di Charles-Henri Bruneau, Mazen Saad *The 2D lid-driven cavity problem revisited*

5.7.1 Confronto qualitativo

I due precedenti autori hanno, tra l'altro, effettuato uno studio sulla driven cavity con $Re=1000$ e hanno riportato in una stessa figura i grafici delle linee di corrente, della vorticità e della pressione. Per effettuare un confronto qualitativo si riportano qui di seguito le figure:

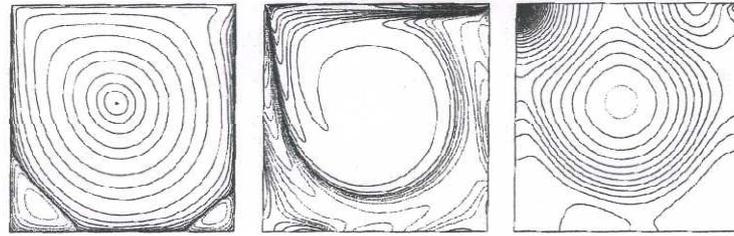


Fig. 2. Steady solution at $Re = 1000$ computed with present scheme on grid 1024×1024 . From left to right stream-function, vorticity and pressure fields.

Figure 5.17: Risultati di Charles-Henri Bruneau, Mazen Saad

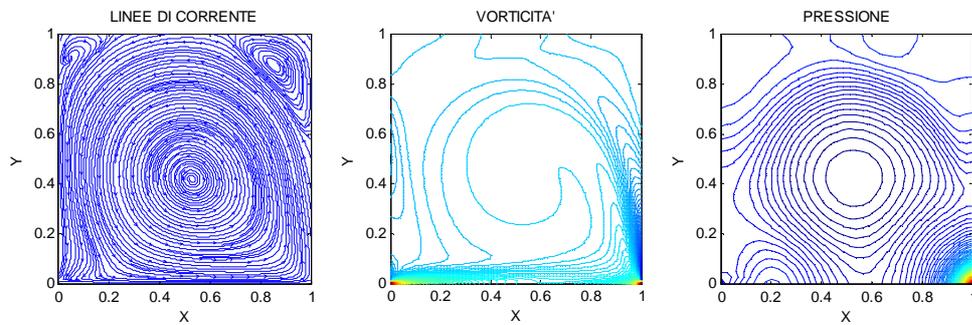


Figure 5.18: Risultati ottenuti

Si fa notare subito come nel caso in alto sia stata messa in moto la parete superiore verso sinistra perciò i risultati ottenuti con il metodo della comprimibilità artificiale risultano speculari. Quindi per poter effettuare un confronto migliore si ruota figura 5.17:

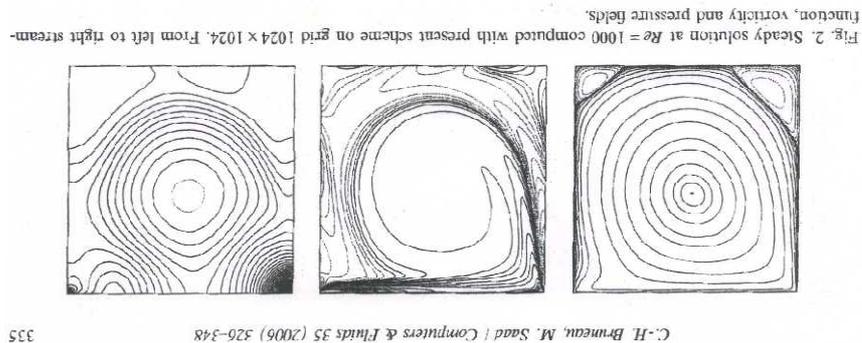


Figura 5.19: Rotazione di figura 5.17 per avere un confronto migliore

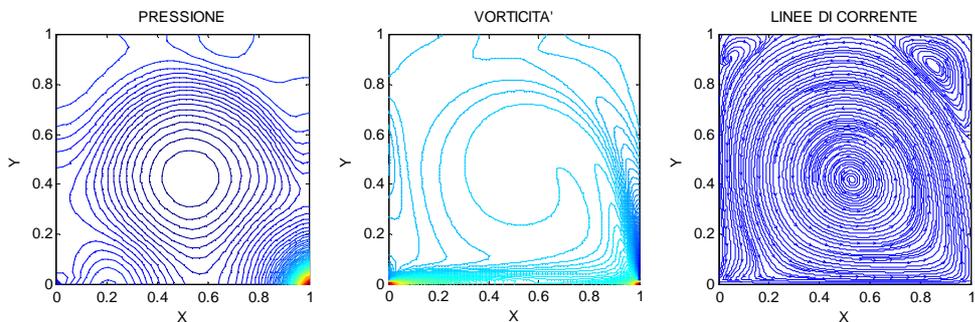


Figura 5.20: Risultati ottenuti

Si può notare che per:

- la pressione: vi è nelle due situazioni un aumento molto marcato della pressione in prossimità dell'angolo in cui il fluido colpisce la parete, le isolinee hanno forma quasi circolare al centro della cavità, inoltre nel mezzo della parete in moto, in entrambi i casi, si “incuneano”.
- la vorticità: in entrambi i casi si ha un aumento molto marcato in prossimità della parete in movimento e al centro quella forma particolare simile ad un uncino.
- le linee di corrente: ci sono in entrambi i casi il vortice primario e quello secondario, inoltre le loro dimensioni sono molto simili, solamente il vortice terziario risulta leggermente maggiore.

5.7.2 Confronto quantitativo

Oltre a confrontare delle figure si analizzano anche dei valori numerici. Infatti nell'articolo i ricercatori confrontano quattro metodi del terzo ordine sia nel centro del vortice primario sia nel centro di quello secondario, sempre con $Re=1000$ e riportano i valori massimi o minimi della funzione di corrente, della vorticità e la loro locazione. Il confronto è presentato nelle tabelle seguenti:

Tabella 5.III: Risultati numerici di Charles-Henri Bruneau, Mazen Saad per il vortice primario

Schema	Griglia	Ψ_{\max}	ω	x	y
Present	128x128	0.11786	2.0508	0.46875	0.5625
Upwind 3	128x128	0.11796	2.0549	0.46875	0.5625
Kawamura	128x128	0.11790	2.0557	0.46875	0.5625
Quicktest	128x128	0.11503	1.9910	0.46875	0.5625

Nel nostro caso il centro si trova nel complemento a 1 delle precedenti coordinate e si ha:

Tabella 5.IV: Risultati numerici ottenuti con comprimibilità artificiale e per il vortice primario

Schema	Griglia	Ψ_{\max}	ω	x	y
Compr. Artifi.	80x80	0.1091	2.1187	0.53125	0.4375

Tabella 5.V: Risultati numerici di Charles-Henri Bruneau, Mazen Saad per il vortice secondario

Schema	Griglia	Ψ_{\min}	ω	x	y
Present	128x128	-1.7003×10^{-3}	-1.1304	0.14603	0.10938
Upwind 3	128x128	-1.7322×10^{-3}	-1.1204	0.14603	0.10938
Kawamura	128x128	-1.7281×10^{-3}	-1.1138	0.14603	0.10938
Quicktest	128x128	-1.7689×10^{-3}	-1.0771	0.14603	0.10938

Tabella 5.VI: Risultati numerici ottenuti con comprimibilità artificiale e per il vortice secondario

Schema	Griglia	Ψ_{\min}	ω	x	y
Compr. Artifi.	80x80	-0.0065	-0.9895	0.85937	0.89062

L'accordo è accettabile e si presume possa migliorare ancora nel momento in cui raffinarsimo ulteriormente la griglia di calcolo.

Il raggiungimento di una soluzione stazionaria anche con $Re=1000$ è garantito dalla seguente figura:

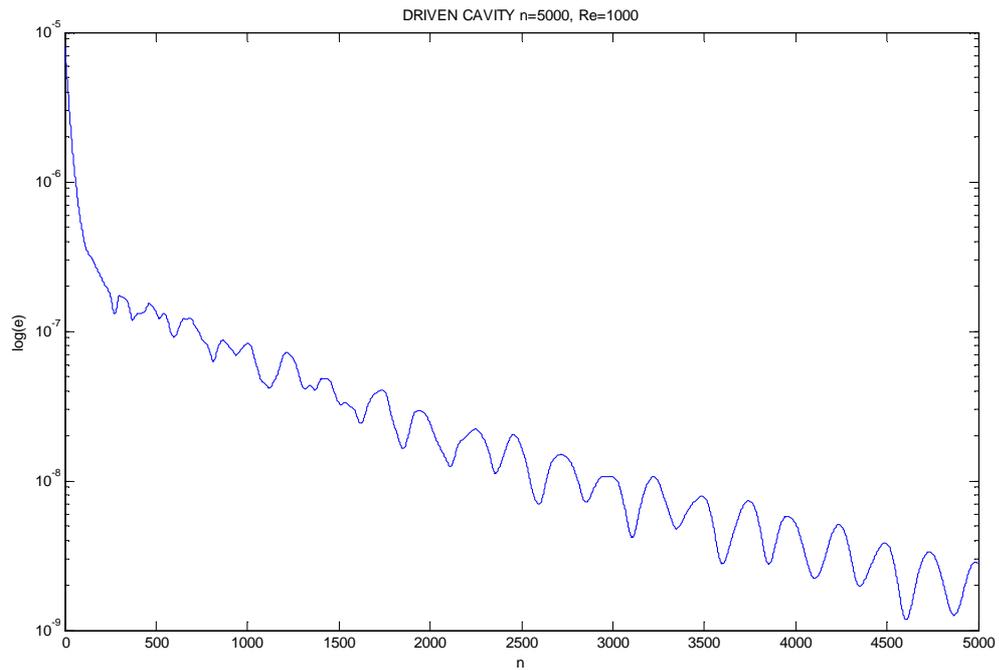


Figura 5.21: Andamento errori con Re=1000

Il valore di partenza è di $7.9872e-006$, mentre il valore minimo è $1.1707e-009$

5.8 Riferimenti bibliografici:

Hoffmann K.A., Chiang S.T., *Computational Fluid Dynamics*, volume I ,4^a edizione, EES BOOKS, 2004

Charles-Henri Bruneau, Mazen Saad *The 2D lid-driven cavity problem revisited* Computers & Fluids 35 (2006) 326-348

Conclusioni, ovvero cosa ho imparato

Dopo aver concluso la tesi mi sento di aver imparato:

- i. Alcuni metodi alle differenze finite utili per la risoluzione delle equazioni differenziali.
In particolare ho imparato il comportamento di equazioni iperboliche non-lineari, e ho appreso la possibilità dell'instaurarsi di urti, singolarità matematiche delle equazioni.
Ho inoltre approfondito una tecnica importante per la risoluzione delle equazioni di *Navier-Stokes* stazionarie, scrivendo un codice e validandolo adeguatamente.
- ii. Ad usare maggiormente le grandi potenzialità di MatLab sia a livello di programmazione sia di tools per ottenere grafici.
Tra questi i comandi:
 - `quiver` → che consente, note le matrici delle componenti della velocità, di tracciare su di un grafico i vettori velocità
 - `contour` → che traccia le linee di livello o isolinee.
 - `surf` → che permette di ottenere grafici 3D
 - `streamline` & `streamslice` → che consentono di plottare le linee di corrente, in particolare il secondo traccia anche dei vettori che indicano la direzione del moto del fluido
- iii. Le enormi possibilità del calcolo numerico, ma anche l'estrema difficoltà a verificarne i risultati per evitare di essere grossolanamente smentiti dai risultati sperimentali. Tuttavia premesso questo svantaggio, ho scoperto una "realtà numerica", per me assolutamente sconosciuta, fatta di grandi risultati ottenuti grazie ad una precisa e accurata modellazione matematica.
- iv. I rudimenti del calcolo scientifico.
Ossia alcuni metodi per risolvere le equazioni non lineari, come il metodo di bisezione e il metodo di Newton, l'approssimazione di funzioni con polinomi di Taylor, alcune tecniche per la differenziazione e l'integrazione numerica.

