



Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Energetica, Gestionale e dei Trasporti (DIME)
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Meccanica

TESI

Moto di un fluido su parete scabra microstrutturata

Relatore:
Prof. Alessandro Bottaro

Presentata da:
Calabrese Gianmarco

Sessione Estiva
Anno Accademico 2019/2020

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Letteratura	3
2	Formulazione matematica	6
2.1	Equazioni iniziali, continuità e moto	6
2.2	Sviluppi asintotici equazioni caso micro	8
2.2.1	Sviluppo asintotico delle variabili	8
2.2.2	Equazioni riscritte con sviluppi asintotici	8
2.2.3	Sforzi tangenziali e normale	8
2.3	Condizioni finali	16
3	Metodo agli elementi finti	16
3.1	Richiami sugli spazi funzionali lineari	17
3.2	Metodi variazionali	18
3.3	formulazioni deboli	18
3.4	Il metodo degli elementi finiti o FEM	18
4	Risultati ottenuti con FreeFEM++	19
4.1	Risultati sul bordo della cella unitaria in $y_\infty = 5$	19
5	Conclusioni	22

Sommario

In questa tesi andremo a studiare come una parete scabra influenzi la dinamica del fluido che si muove a contatto con la parete stessa. La rugosità della parete influenza il flusso di strato limite; vogliamo quindi trovare le condizioni di parete equivalenti da poter applicare al problema di Navier-Stokes, che ha luogo su una scala spaziale di dimensioni tipicamente molto maggiori rispetto alla dimensione caratteristica della scabrezza. Per far ciò bisogna impostare lo studio delle equazioni di Stokes in uno spazio microscopico (detto *volume elementare* o *cella unitaria*) molto vicino alla parete, dove sono presenti elementi di rugosità che hanno la forma di cubetti disposti regolarmente sulla superficie solida. Tramite la teoria multiscala e la tecnica di omogeneizzazione si possono sviluppare le equazioni in vari sistemi, di ordine via via crescente (e di importanza via via decrescente) in termini del parametro ϵ , con $\epsilon \ll 1$ rapporto tra le scale di lunghezza introdotte sopra. I risultati delle equazioni microscopiche all'ordine principale e all'ordine successivo (chiamate *equazioni ausiliarie*) forniscono dei coefficienti che andranno impiegati nelle condizioni al contorno del problema macroscopico. Tali condizioni sono dette *effettive*; sono applicate su una superficie fittizia, posta al di sopra della parete reale, e mimano il comportamento e l'effetto della scabrezza sul campo di moto a grande scala del fluido. L'interesse dell'omogeneizzazione è proprio quello di rimpiazzare il comportamento microscopico attorno ad elementi di rugosità (il cui studio richiederebbe una griglia di calcolo molto raffinata localmente, e tempi di calcolo molto alti) con un comportamento opportunamente omogeneizzato, la cui soluzione numerica può essere ottenuta in modo molto più rapido.

1 Introduzione

L'oggetto di questa tesi è lo studio del moto incomprimibile di un fluido in prossimità di una parete scabra, strutturata in modo regolare. L'obiettivo prefisso è lo sviluppo di condizioni *equivalenti* o *effettive* da applicare ad una certa distanza dalla parete reale per replicarne l'effetto.

Per studiare il fenomeno del moto vicino alla parete scabra si è diviso lo spazio in una regione *interna*, vicino alla parete, ed una *esterna*, lontano dalla stessa, e cercato una linea di confine sulla quale effettuare un *matching* tra le soluzioni interna ed esterna. Nella regione interna il moto è retto da effetti viscosi, e le equazioni che abbiamo risolto sono le equazioni di Stokes. Tale soluzione permette di ricavare coefficienti da utilizzare nello studio del moto esterno, imponendo condizioni *effettive* ad una distanza Y_∞ ($Y_\infty \rightarrow 0$) dalla parete.

Per studiare la dinamica in prossimità della superficie solida scabra si è modellato uno spazio 3d con una unità periodica che rappresenta la singola unità di asperità, ovvero un cubo che fuoriesce dalla superficie, come si può vedere raffigurato in fig. 1. La parete è composta da un piano sopra il quale la singola unità si ripete periodicamente lungo le direzioni degli assi X e Z . Abbiamo assegnato un valore pari a 0,5 per k e 1 per S_x . Per eseguire i calcoli e trovare le soluzioni dei 9 problemi ausiliari che risultano dall'analisi asintotica si è utilizzato il metodo degli elementi finiti, andando a discretizzare lo spazio e applicando le dovute condizioni al contorno.

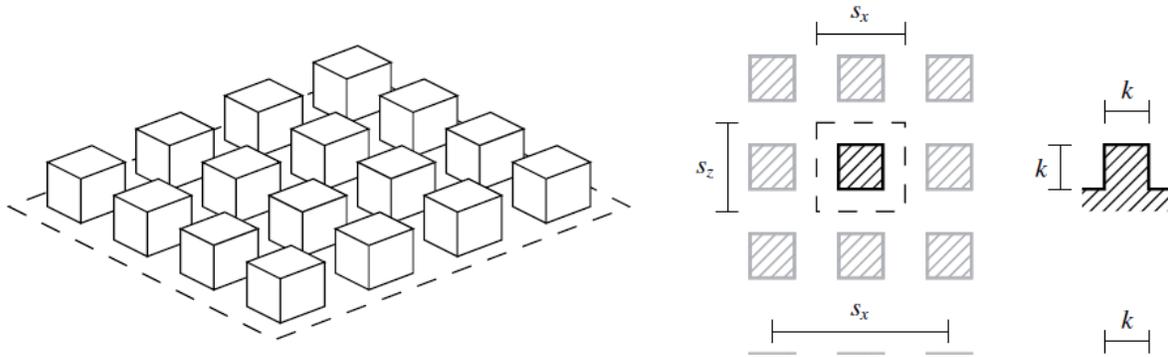


Figura 1: Riproduzione del modello utilizzato per la parete scabra

1.1 Letteratura

La definizione delle condizioni al contorno per una parete solida ed impermeabile in contatto con un fluido viscoso incompressibile ha tenuto occupati molti ricercatori ancora prima che lo studioso francese Henri Navier derivò per primo l'equazioni che oggi portano il suo nome. Nel suo lavoro iniziale risalente al 1823, Navier [1] considerava che la forza esercitata da un fluido viscoso sulla parete fosse bilanciata dalla resistenza che la parete oppone al fluido, e che quest'ultima fosse proporzionale ad una certa velocità di scorrimento. Se la direzione normale alla parete è indicata con Y e la velocità tangente alla parete con U , la velocità di scorrimento diviene:

$$U = \epsilon \lambda^x U_Y, \quad (1)$$

con la costante di Navier, λ^x , un effettiva profondità di penetrazione, uguale alla distanza nella parete dove la componente della velocità estrapolata linearmente svanisce. Il piccolo parametro ϵ viene definito in seguito. Nell'equazione scritta sopra e nelle seguenti, una variabile indipendente utilizzata come indice indica un'operazione di differenziazione parziale rispetto a quella variabile.

La condizione di Navier è stata messa in discussione solo dopo cento anni, quando G. I. Taylor [2] pose la questione con una serie di esperimenti sul flusso tra cilindri concentrici rotanti diversamente, vicino al limite della prima instabilità dell'idrodinamica. La teoria di Taylor, che fornisce risultati in eccellente accordo con gli esperimenti, era basata sull'idea che il fluido non può scorrere quando in contatto con la superficie solida. Da quel momento, la condizione di non scorrimento venne, per la maggioranza, accettata universalmente. Configurazioni per le quali le condizioni di scorrimento rimangono in uso includono il flusso a tripla linea (per esempio che descrive il movimento di punta di una goccia di liquido che scivola giù da un piano inclinato), il flusso dei gas rarefatti, per esempio nei dispositivi micro-fluidici (in questo caso la condizione di Navier è spesso associata al nome di Maxwell), o il flusso al di sopra delle superfici con micro rugosità, eventualmente impregnate con un fluido lubrificante (per una rivalutazione recente il lettore faccia riferimento a [3]). Tutte queste eccezioni condividono la peculiarità che la descrizione continua del flusso si rompe o diventa troppo difficile o impegnativa per essere

risolta, e.g. da tecniche computerizzate, così che una visione microscopica-macroscopica coniugata è preferibile. Questi sono casi in cui la tecnica della omogeneizzazione si dimostra valida.

Il presente lavoro è dedicato alla descrizione di un approccio per derivare le effettive condizioni di confine vicino ad una parete ondulata partendo dallo studio su una scala microdimensionale, così che in una applicazione pratica la parete ondulata possa essere sostituita da una superficie fittizia liscia sulla quale il flusso può scorrere e attraverso la quale è permessa la traspirazione, ottenendo nella maggior parte del dominio lo stesso risultato che si avrebbe con la reale superficie scabra.

Questa strategia consente di estrapolare gli effetti legati alla dimensione microscopica evitando la complessa risoluzione numerica dei flussi con strutture microscopiche. Come nella maggior parte degli studi precedenti, si presume che la caratteristica di rugosità periodica si ripeta su una scala molto più corta di una grandezza caratteristica del flusso macroscopico; questo rende necessaria una descrizione del problema su più scale [4]. Al contrario della letteratura esaminata di seguito, le condizioni efficaci ottenute qui sono corrette fino al terzo ordine nei termini di un piccolo parametro, definito dal rapporto tra scale microscopiche e macroscopiche. Pertanto, il presente modello descrive in modo più accurato, rispetto alle relazioni disponibili fino ad ora in letteratura, l'effetto delle piccole scale asintotiche sul flusso in larga scala. Come risultato significativo, verrà mostrato che tutti i parametri inclusi nelle condizioni al contorno al secondo ordine derivano dalla risoluzione numerica di un problema microscopico di Stokes unico; al terzo ordine devono essere risolti alcuni sistemi ausiliari aggiuntivi.

La necessità di disporre di modelli precisi per il flusso in prossimità di pareti con determinate caratteristiche e pattern è particolarmente sentita quando il flusso diventa turbolento, come accade nella maggioranza delle applicazioni. Quindi, è noto che la resistenza all'attrito di solito aumenta, se confrontata nelle stesse condizioni con il caso a parete liscia, ad eccezione di modelli di parete progettati in modo intelligente. Esempi di questi ultimi includono microscalature [5, 6, 7, 8] e altre pareti con particolari rugosità presenti in natura [9, 10, 11, 12]. A condizione che la rugosità rimanga nel sottostrato viscoso, le "effective conditions" alla parete scabra sviluppate nel presente documento consentiranno di effettuare, in breve tempo, ricerche parametriche di schemi superficiali regolari applicabili, ad esempio, per ridurre al minimo l'attrito dovuto allo strisciamento.

La prima pubblicazione importante che descrive l'applicazione di uno studio multiscale per estrapolare condizioni efficaci per una parete ruvida è dovuta a Achdou et al [13]. Questi autori si sono concentrati sul caso bidimensionale, incomprimibile e le condizioni derivate sono al secondo ordine in termini di ϵ , una misura della dimensione relativa della rugosità. Per un confronto successivo, le condizioni (non lineari) in [13] sono espresse:

$$U = \epsilon \lambda^x U_Y - \epsilon^2 [\xi P_X + \chi U^2], \quad (2)$$

$$V = 0, \tag{3}$$

con P la pressione. Le costanti λ^x , ξ e χ derivano dalla risoluzione di problemi di Stokes in una cella di unità periodica costruita attorno a un singolo elemento di rugosità. Per le configurazioni macroscopiche del flusso laminare testate nel loro documento, Achdou e colleghi hanno ottenuto buoni risultati confrontandoli con simulazioni complete, portandoli a dichiarare che la soluzione al primo ordine è già molto accurata e per concludere che non è sicuro che valga la pena proseguire al secondo ordine. Discuteremo di seguito che la condizione (3) non è accurata al secondo ordine.

Successivi sviluppi non seguirono il percorso avviato da Achdou e collaboratori e si limitarono principalmente all'esame di vari aspetti della condizione di Navier. Ad esempio, Jäger e Mikelić [14] hanno fornito una giustificazione rigorosa dello slittamento di Navier per il flusso in un canale piano e hanno condotto stime asintotiche della forza di attrito tangenziale e della portata effettiva. Basson e Gérard-Varet [15] hanno usato l'omogeneizzazione stocastica per estendere la precedente analisi al caso di un flusso in un canale con un modello di rugosità omogenea disposta in maniera arbitraria. Kamrin et al. [16], utilizzando variabili di scala diverse da quelle qui impiegate, ha trovato una forma tensoriale di scorrimento di Navier per il flusso su superfici periodiche con approssimazione di secondo ordine. Hanno introdotto un *tensore di moto* Λ (o tensore di scorrimento Navier) e, dopo aver sviluppato la parete in serie di Fouries, hanno fornito una formula per Λ , dimostrando la sua simmetria. Luchini [17] ha esteso l'analisi considerando due configurazioni. Nella prima, chiamata *shallow-roughness limit* , la superficie considerata era $Y = \epsilon H(X, Z)$, ovvero la rugosità diventa più liscia come $Y = \epsilon H(X/\epsilon, Z/\epsilon)$. Il secondo limite, chiamato limite di rugosità ridotta, riguardava una famiglia di superfici definite da $Y = \epsilon H(X/\epsilon, Z/\epsilon)$, ovvero un modello che rimane geometricamente simile a se stesso con ϵ variabile. L'analisi del primo ordine di Luchini ha tenuto conto dell'effetto del rapporto di rugosità attraverso un coefficiente di sporgenza e dell'interferenza tra elementi di rugosità uguale posti in una disposizione periodica tramite un coefficiente di prossimità. Gli aspetti collegati al trasferimento di calore e ai gradienti di concentrazione attraverso confini eterogenei e approssimativi sono stati studiati da Introïni et al. [18] e Guo et al. [19] da un'analisi di alto livello basata sulla teoria della media del volume. Anche in questo caso, la condizione di slittamento Navier è stata ripristinata al primo ordine. Analisi più recenti basate sull'omogeneizzazione multiscala sono state condotte da Jiménez-Bolaños e Vernescu [20], Zampogna et al. [21] e Lācis et al. [22]. Quest'ultimo studio è stato l'unico a spingere lo sviluppo al secondo ordine, anche se solo per V , derivando una condizione di traspirazione su una parete fittizia. La condizione è stata testata con successo per il caso di un flusso di canale turbolento legato da una parete ruvida, dimostrando l'importanza di tenere conto delle fluttuazioni di velocità normali della parete in un modello di parete ruvida. Il presente contributo parte da queste premesse.

2 Formulazione matematica

Possiamo studiare il problema nei due sottodomini che chiameremo macro e micro. Le coordinate spaziali sono definite tramite le variabili dimensionali $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$.

2.1 Equazioni iniziali, continuità e moto

Equazioni in forma dimensionale:

Equazione di continuità:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} = 0$$

Equazioni del moto:

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} \right) &= -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \mu \nabla^2 \hat{u} \\ \rho \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{z}} \right) &= -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} + \mu \nabla^2 \hat{v} \\ \rho \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{y}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} \right) &= -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} + \mu \nabla^2 \hat{w}\end{aligned}$$

Scriviamo in forma adimensionale le equazioni sia per il caso macro che per il caso micro utilizzando delle scale appropriate.

Scale macroscopiche:

- L : scala di lunghezza
- \bar{U} : scala di velocità
- $\rho \bar{U}^2$: scala di pressione
- $\frac{L}{\bar{U}}$: scala temporale

Scale microscopiche:

- l : scala di lunghezza
- \bar{u} : scala di velocità
- $\mu \frac{\bar{u}}{l}$: scala di pressione viscosa
- $\frac{l}{\bar{u}}$: scala temporale

Variabili adimensionalizzate:

Macro:

- $X_i = \frac{x_i}{L}$

- $U_i = \frac{\hat{u}_i}{\bar{U}}$
- $T = \frac{\hat{t}}{L} \bar{U}$
- $P = \frac{\hat{p}}{\rho U^2}$

Micro:

- $x_i = \frac{\hat{x}_i}{l}$
- $u_i = \frac{\hat{u}_i}{\bar{u}}$
- $t = \frac{\hat{t} u}{l} \bar{u}$
- $p = \frac{\hat{p} l}{\mu \bar{u}}$

Ora possiamo riscrivere le equazioni nella forma adimensionalizzata.

Macro:

Equazione di continuità:

$$\frac{\partial \hat{U}_i}{\partial \hat{X}_i} = 0$$

Equazioni del moto:

$$\frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + W \frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \nabla^2 U$$

Dove abbiamo introdotto il numero di Reynolds, per il caso macro $Re = \frac{UL\rho}{\mu}$. Introducendo la derivata multiscale possiamo riscrivere il primo termine dell'equazione del moto. Utilizzando gli indici i e j :

$$\frac{DU_i}{DT} = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j^2}$$

Micro:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_i} = 0$$

$$R \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla^2 u$$

dove R rappresenta il numero di Reynolds per il caso micro, $R = \frac{l\bar{u}}{\nu}$.

Possiamo riscrivere l'equazioni del moto per il caso micro introducendo la derivata materiale ed ϵ , dove $\epsilon = \frac{l}{L} = \frac{\bar{u}}{\bar{U}}$ è un numero molto piccolo ($\epsilon \ll 1$), definito come il rapporto fra le scale di lunghezza o di velocità. Perciò $R = \epsilon^2 Re$.

Equazione del moto caso micro:

$$\epsilon^2 Re \left(\frac{Du_i}{Dt} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nabla^2 u_i$$

Il laplaciano è un operatore matematico: $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

2.2 Sviluppi asintotici equazioni caso micro

2.2.1 Sviluppo asintotico delle variabili

Ogni variabile può essere scritta come combinazione di funzioni delle stesse variabili in ordine crescente.

$$(u, v, w, p) = (u^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)}, p^{(0)}) + \epsilon(u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}, p^{(1)}) + \epsilon^2(u^{(2)}, v^{(2)}, w^{(2)}, p^{(2)}) + \dots$$

Gli ordini si indicano con $\mathcal{O}(\epsilon^n)$, dove n indica il grado dell'ordine. Nei prossimi passaggi sarà illustrato come riscrivere le equazioni del problema all'ordine 0, detto anche ordine principale, e al primo ordine.

Ogni singola variabile è funzione sia delle variabili (x, y, z) del caso micro che delle variabili (X, Y, Z) del caso macro. Non sarà invece funzione del tempo t poichè prendiamo in considerazione il caso stazionario.

Ipotizzando che le variabili microscopiche e macroscopiche siano indipendenti utilizziamo la derivata multiscala, definita come segue:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \epsilon \frac{\partial}{\partial X_i} \right)$$

2.2.2 Equazioni riscritte con sviluppi asintotici

Introduciamo gli sviluppi all'interno dell'equazioni.

Equazione di continuità:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial}{\partial X} \right) (u^{(0)} + \epsilon u^{(1)} + \dots) + \left(\frac{\partial}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial}{\partial Y} \right) (v^{(0)} + \epsilon v^{(1)} + \dots) + \left(\frac{\partial}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial}{\partial Z} \right) (w^{(0)} + \epsilon w^{(1)} + \dots) = 0$$

All'ordine principale $\mathcal{O}(\epsilon^0)$:

$$\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_i} = 0$$

Al primo ordine $\mathcal{O}(\epsilon)$:

$$\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_i} = - \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial X_i}$$

Equazioni del moto:

$$\epsilon Re \left(\frac{Du_i}{Dt} \right) = - \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial x_j^2} - \epsilon \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} - \epsilon \frac{\partial p^{(0)}}{\partial X_i} + \epsilon \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial x_j^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial x_j \partial X_j}$$

All'ordine principale $\mathcal{O}(\epsilon^0)$:

$$- \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial x_j^2} = 0$$

Al primo ordine $\mathcal{O}(\epsilon)$:

$$- \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial x_j^2} = \frac{\partial p^{(0)}}{\partial X_i} - 2 \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial x_j \partial X_j}$$

2.2.3 Sforzi tangenziali e normale

Le espressioni di sforzi tangenziali e lo sforzo normale sono:

$$\hat{S}^{T_x} = \mu \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \right)$$

$$\hat{S}^{T_z} = \mu \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{z}} \right)$$

$$\hat{S}^N = -\hat{p} + 2\mu \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}}$$

Adimensionalizzo gli sforzi nel caso macro:

$$S^{T_x} = \frac{\mu \bar{U}}{L} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)$$

$$S^{T_z} = \frac{\mu \bar{U}}{L} \left(\frac{\partial W}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial Z} \right)$$

$$S^N = \frac{\mu \bar{U}}{L} \left(-ReP + 2 \frac{\partial V}{\partial Y} \right)$$

Adimensionalizzo gli sforzi nel caso micro:

$$s^{T_x} = \frac{\mu \bar{U}}{L} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$s^{T_z} = \frac{\mu \bar{U}}{L} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$s^N = \frac{\mu \bar{U}}{L} \left(-p + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Condizioni al contorno: uguaglianza tra sforzi macro e micro all'interfaccia

$$S^{T_x} = s^{T_x}$$

$$S^{T_z} = s^{T_z}$$

$$S^N = s^N$$

Sostituisco e ottengo:

$$\frac{\mu \bar{U}}{L} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) |_{\epsilon y_\infty} = \frac{\mu \bar{U}}{L} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) |_{y_\infty}$$

$$\frac{\mu \bar{U}}{L} \left(\frac{\partial W}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial Z} \right) |_{\epsilon y_\infty} = \frac{\mu \bar{U}}{L} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) |_{y_\infty}$$

$$\frac{\mu \bar{U}}{L} \left(-ReP + 2 \frac{\partial V}{\partial Y} \right) |_{\epsilon y_\infty} = \frac{\mu \bar{U}}{L} \left(-p + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) |_{y_\infty}$$

Riscrivo come:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) |_{y_\infty} = S^{T_x} |_{\epsilon y_\infty}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) |_{y_\infty} = S^{T_z} |_{\epsilon y_\infty}$$

$$\left(-p + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) |_{y_\infty} = S^N |_{\epsilon y_\infty}$$

Sviluppo gli sforzi:

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial U^{(0)}}{\partial Y} + \epsilon \frac{\partial V^{(0)}}{\partial X} + \dots = S^{T_x} |_{\epsilon y_\infty}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(0)}}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial w^{(1)}}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial v^{(1)}}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial W^{(0)}}{\partial Y} + \epsilon \frac{\partial V^{(0)}}{\partial Z} + \dots = S^{T_z}|_{\epsilon y_\infty} \\ -p^{(0)} + 2\frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} + -\epsilon p^{(1)} + 2\epsilon \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} + 2\epsilon \frac{\partial V^{(0)}}{\partial Y} + \dots = S^N|_{\epsilon y_\infty} \end{aligned}$$

Condizioni alla parete, per $y = y_{wall}$ applichiamo la condizione di no-slip, ovvero che tutte le componenti del vettore velocità siano nulle sulla parete. La parete in questione sarà identificata dalla cordinata y_{wall} , la quale è funzione di x e z e definisce la geometria della cella unitaria dove studiamo il problema a livello microscopico.

Le condizioni al contorno per $y = y_{wall}$ sono:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

La condizione di impermeabilità, ovvero l'impossibilità per il liquido di penetrare la parete, è soddisfatta imponendo nulla la componente normale alla parete. La condizione di no-slip, ovvero di completa aderenza del fluido alla parete, è soddisfatta imponendo nulle le componenti tangenziali della velocità. Da tali considerazioni risulta perciò evidente che il vettore velocità abbia tutte e tre le componenti nulle, per ogni punto dello spazio dove $y = y_{wall}$, qualsiasi sia il valore di x e z .

Sviluppando tale condizione di parete si ottiene:

$$\begin{cases} u_i^{(0)} + \epsilon u_i^{(1)} + \epsilon^2 u_i^{(2)} + \dots = 0 \end{cases}$$

Si ha un problema di ordine 0 e un problema di ordine 1.

Problema all'ordine principale $\mathcal{O}(\epsilon^0)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_i} = 0 \\ -\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial x_j^2} = 0 \end{cases}$$

Le condizioni al contorno per y_∞ sono:

$$\begin{cases} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} = S^{T_x} \\ \frac{\partial w^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(0)}}{\partial z} = S^{T_z} \\ -p^{(0)} + 2\frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} = S^N \end{cases}$$

Le condizioni al contorno per $y = y_{wall}$ sono:

$$\begin{cases} u^{(0)} = 0 \\ v^{(0)} = 0 \\ w^{(0)} = 0 \end{cases}$$

Problema al primo ordine $\mathcal{O}(\epsilon^1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_i} = -\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial X_i} \\ -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial x_j^2} = \frac{\partial p^{(0)}}{\partial X_i} - 2\frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial x_j \partial X_j} \end{cases}$$

Le condizioni al contorno per y_∞ sono:

$$\begin{cases} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} = -\frac{\partial U^{(0)}}{\partial Y} - \frac{\partial V^{(0)}}{\partial X} \\ \frac{\partial w^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial z} = -\frac{\partial W^{(0)}}{\partial Y} - \frac{\partial V^{(0)}}{\partial Z} \\ -p^{(1)} + 2\frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} = 2\frac{\partial V^{(0)}}{\partial Y} \end{cases}$$

Le condizioni al contorno per $y = y_{wall}$ sono:

$$\begin{cases} u_i^{(1)} = 0 \end{cases}$$

Risoluzione del Problema all'ordine principale $\mathcal{O}(\epsilon^0)$.

Essendo lineare possiamo riscrivere le variabili in funzione di altre così:

$$\begin{cases} u^{(0)} = u^+ S^{T_x} + u^\dagger S^{T_z} + u^\# S^N \\ v^{(0)} = v^+ S^{T_x} + v^\dagger S^{T_z} + v^\# S^N \\ w^{(0)} = w^+ S^{T_x} + w^\dagger S^{T_z} + w^\# S^N \\ p^{(0)} = p^+ S^{T_x} + p^\dagger S^{T_z} + p^\# S^N \end{cases}$$

Dove $u_i^+, u_i^\dagger, u_i^\#, p^+, p^\dagger, p^\#$ sono funzioni delle coordinate micro, mentre S^{T_x}, S^{T_z}, S^N sono funzioni delle coordinate macro, perciò sarà importante porre attenzione alle derivate parziali durante i passaggi successivi, dove andremo a sostituire gli sviluppi all'interno delle equazioni del problema.

Sostituendo $u^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)}, p^{(0)}$ nella equazione di continuità all'ordine principale $\mathcal{O}(\epsilon^0)$, si ottiene:

$$u_x^+ S^{T_x} + u_x^\dagger S^{T_z} + u_x^\# S^N + v_y^+ S^{T_x} + v_y^\dagger S^{T_z} + v_y^\# S^N + w_z^+ S^{T_x} + w_z^\dagger S^{T_z} + w_z^\# S^N = 0$$

Riscritta con gli indici:

$$\frac{\partial u_i^+}{\partial x_i} S^{T_x} + \frac{\partial u_i^\dagger}{\partial x_i} S^{T_z} + \frac{\partial u_i^\#}{\partial x_i} S^N = 0$$

Stessa procedura per l'equazioni del moto:

$$-\frac{\partial p^+}{\partial x_i} S^{T_x} - \frac{\partial p^\dagger}{\partial x_i} S^{T_z} - \frac{\partial p^\#}{\partial x_i} S^N + \frac{\partial^2 u_i^+}{\partial x_j^2} S^{T_x} \frac{\partial^2 u_i^\dagger}{\partial x_j^2} S^{T_z} + \frac{\partial^2 u_i^\#}{\partial x_j^2} S^N = 0$$

Sostituiamo le variabili nelle equazioni che costituiscono le condizioni al contorno del problema:

Per $y = y_\infty$:

$$\begin{cases} u_y^+ S^{T_x} + u_y^\dagger S^{T_z} + u_y^\# S^N + v_x^+ S^{T_x} + v_x^\dagger S^{T_z} + v_x^\# S^N = S^{T_x} \\ w_y^+ S^{T_x} + w_y^\dagger S^{T_z} + w_y^\# S^N + v_z^+ S^{T_x} + v_z^\dagger S^{T_z} + v_z^\# S^N = S^{T_z} \\ -p^+ S^{T_x} - p^\dagger S^{T_z} - p^\# S^N + 2v_y^+ S^{T_x} + 2v_y^\dagger S^{T_z} + 2v_y^\# S^N = S^N \end{cases}$$

Per $y = y_{wall}$:

$$\left\{ u_i^+ S^{T_x} + u_i^\dagger S^{T_z} + u_i^\# S^N = 0 \right.$$

Forzo i problemi per S^{T_x}, S^{T_z}, S^N .

Problema forzato per S^{T_x}

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i^+}{\partial x_i} = 0 \\ -\frac{\partial p^+}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i^+}{\partial x_j^2} = 0 \end{array} \right.$$

Le condizioni per y_∞

$$\left\{ \begin{array}{l} u_y^+ + v_x^+ = 1 \\ w_y^+ + v_z^+ = 0 \\ -p^+ + 2v_y^+ = 0 \end{array} \right.$$

Le condizioni per $y = y_{wall}$

$$\left\{ u_i^+ = 0 \right.$$

Problema forzato per S^{T_z}

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i^\dagger}{\partial x_i} = 0 \\ -\frac{\partial p^\dagger}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i^\dagger}{\partial x_j^2} = 0 \end{array} \right.$$

Le condizioni per y_∞

$$\left\{ \begin{array}{l} u_y^\dagger + v_x^\dagger = 0 \\ w_y^\dagger + v_z^\dagger = 1 \\ -p^\dagger + 2v_y^\dagger = 0 \end{array} \right.$$

Le condizioni per $y = y_{wall}$

$$\left\{ u_i^\dagger = 0 \right.$$

Problema forzato per S^N

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i^\#}{\partial x_i} = 0 \\ -\frac{\partial p^\#}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i^\#}{\partial x_j^2} = 0 \end{array} \right.$$

Le condizioni per y_∞

$$\left\{ \begin{array}{l} u_y^\# + v_x^\# = 0 \\ w_y^\# + v_z^\# = 0 \\ -p^\# + 2v_y^\# = 1 \end{array} \right.$$

Le condizioni per $y = y_{wall}$

$$\left\{ u_i^\# = 0 \right.$$

Si trova che $p^\# = -1$ e $u^\# = v^\# = 0$, perciò la risoluzione del problema all'ordine $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ si riduce a:

$$\begin{cases} u^{(0)} = u^+ S^{T_x} + u^\dagger S^{T_z} \\ v^{(0)} = v^+ S^{T_x} + v^\dagger S^{T_z} \\ p^{(0)} = p^+ S^{T_x} + p^\dagger S^{T_z} - S^N \end{cases}$$

Problema al primo ordine $\mathcal{O}(\epsilon^1)$.

Equazioni di continuità e del moto al primo ordine $\mathcal{O}(\epsilon^1)$:

$$\begin{cases} u_x^{(1)} + v_y^{(1)} + w_z^{(1)} = -u_X^{(0)} - v_Y^{(0)} - w_Z^{(0)} \\ -p_x^{(1)} + (\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz})u^{(1)} = p_X^{(0)} - 2(\partial_x X + \partial_y Y + \partial_z Z)u^{(0)} \\ -p_y^{(1)} + (\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz})v^{(1)} = p_Y^{(0)} - 2(\partial_x X + \partial_y Y + \partial_z Z)v^{(0)} \\ -p_z^{(1)} + (\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz})w^{(1)} = p_Z^{(0)} - 2(\partial_x X + \partial_y Y + \partial_z Z)w^{(0)} \end{cases}$$

Le condizioni al contorno in $y = y_\infty$ sono:

$$\begin{cases} u_y^{(1)} + v_x^{(1)} = -u_Y^{(0)} - v_X^{(0)} \\ w_y^{(1)} + v_z^{(1)} = -w_Y^{(0)} - v_Z^{(0)} \\ -p^{(1)} + 2v_y^{(1)} = -2v_Y^{(0)} \end{cases}$$

Le condizioni al contorno in $y = y_{wall}$ sono:

$$\begin{cases} u_i^{(1)} = 0 \end{cases}$$

Essendo il problema lineare possiamo riscrivere le variabili del primo ordine come segue:

$$\begin{cases} f^{(1)} = \hat{f} S_X^{T_x} + \hat{f} S_Y^{T_x} + \hat{\hat{f}} S_Z^{T_x} + \tilde{f} S_X^{T_z} + \tilde{f} S_Y^{T_z} + \tilde{\tilde{f}} S_Z^{T_z} + \check{f} S_X^N + \check{f} S_Y^N + \check{\check{f}} S_Z^N \end{cases}$$

con f che può essere sia una componente della velocità che la pressione al prim'ordine.

Problema forzato da $S_j^{T_x}$. j va da 1 a 3 corrispondenti alle derivate degli sforzi rispetto a X, Y, Z . L'indice i identifica la direzione nel sistema cartesiano. L'indice j indica rispetto a quale variabile macro è stata derivata la componente dello sforzo e la variabile micro associata (i.e. $j = 2$ sta per $j = Y$ quindi \hat{u}_{ij} diventa \hat{u}_i). I problemi sono scritti con gli indici poichè le equazioni risultano ripetitive e di facile intuizione.

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}_{ij}}{\partial x_i} = -u_j^+ \\ -\frac{\partial \hat{p}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{ij}}{\partial^2 x_k^2} = p^+ \delta_{ij} - 2 \frac{\partial u_i^+}{\partial x_j} \end{cases}$$

$S_X^{T_x}$

Condizioni al contorno in $y = y_\infty$:

$$\begin{cases} \hat{u}_y + \hat{v}_x = -v^+ \\ \hat{w}_y + \hat{v}_z = 0 \\ -\hat{p} + 2\hat{v}_y = 0 \end{cases}$$

Condizioni al contorno in $y = y_{wall}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_i = 0 \end{array} \right.$$

$S_Y^{T_x}$

Condizioni al contorno in $y = y_\infty$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_y + \hat{v}_x = -u^+ \\ \hat{w}_y + \hat{v}_z = -w^+ \\ -\hat{p} + 2\hat{v}_y = -2v^+ \end{array} \right.$$

Condizioni al contorno in $y = y_{wall}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_i = 0 \end{array} \right.$$

$S_Z^{T_x}$

Condizioni al contorno in $y = y_\infty$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_y + \hat{v}_x = 0 \\ \hat{w}_y + \hat{v}_z = -v^+ \\ -\hat{p} + 2\hat{v}_y = 0 \end{array} \right.$$

Condizioni al contorno in $y = y_{wall}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_i = 0 \end{array} \right.$$

Problema forzato da $S_j^{T_z}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}_{ij}}{\partial x_i} = -u_j^\dagger \\ -\frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{ij}}{\partial^2 x_k^2} = p^\dagger \delta_{ij} - 2 \frac{\partial u_i^\dagger}{\partial x_j} \end{array} \right.$$

$S_X^{T_z}$

Condizioni al contorno in $y = y_\infty$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_y + \tilde{v}_x = -v^\dagger \\ \tilde{w}_y + \tilde{v}_z = 0 \\ -\tilde{p} + 2\tilde{v}_y = 0 \end{array} \right.$$

Condizioni al contorno in $y = y_{wall}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_i = 0 \end{array} \right.$$

$S_Y^{T_z}$

Condizioni al contorno in $y = y_\infty$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_y + \tilde{v}_x = -u^\dagger \\ \tilde{w}_y + \tilde{v}_z = -w^\dagger \\ -\tilde{p} + 2\tilde{v}_y = -2v^\dagger \end{array} \right.$$

Condizioni al contorno in $y = y_{wall}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_i = 0 \end{array} \right.$$

$S_Z^{T_z}$

Condizioni al contorno in $y = y_\infty$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_y + \tilde{v}_x = 0 \\ \tilde{w}_y + \tilde{v}_z = -v^\ddagger \\ -\tilde{p} + 2\tilde{v}_y = 0 \end{array} \right.$$

Condizioni al contorno in $y = y_{wall}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_i = 0 \end{array} \right.$$

Problema forzato da S_j^N :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}_{ij}}{\partial x_i} = 0 \\ -\frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{ij}}{\partial^2 x_k^2} = -\delta_{ij} \end{array} \right.$$

S_X^N

Condizioni al contorno in $y = y_\infty$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{u}_y + \check{v}_x = 0 \\ \check{w}_y + \check{v}_z = 0 \\ -\check{p} + 2\check{v}_y = 0 \end{array} \right.$$

Condizioni al contorno in $y = y_{wall}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{u}_i = 0 \end{array} \right.$$

S_Y^N

Condizioni al contorno in $y = y_\infty$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{\check{u}}_y + \check{\check{v}}_x = 0 \\ \check{\check{w}}_y + \check{\check{v}}_z = 0 \\ -\check{\check{p}} + 2\check{\check{v}}_y = 0 \end{array} \right.$$

Condizioni al contorno in $y = y_{wall}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{\check{u}}_i = 0 \end{array} \right.$$

S_Z^N

Condizioni al contorno in $y = y_\infty$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{\check{\check{u}}}_y + \check{\check{\check{v}}}_x = 0 \\ \check{\check{\check{w}}}_y + \check{\check{\check{v}}}_z = 0 \\ -\check{\check{\check{p}}} + 2\check{\check{\check{v}}}_y = 0 \end{array} \right.$$

Condizioni al contorno in $y = y_{wall}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{u}_i = 0 \end{array} \right.$$

2.3 Condizioni finali

Una volta che tutti i calcoli microscopici sono stati eseguiti la condizione *effettiva*, corretta fino all'ordine ϵ^2 , per la generica componente macroscopica di velocità U_i è:

$$\begin{aligned} U_i|_{Y_\infty} = & \epsilon \left[u_i^+ S^{T_x} + u_i^\dagger S^{T_z} + u_i^\# S^N \right] + \\ & \epsilon^2 \left[\hat{u}_i S_X^{T_x} + \hat{u}_i S_Y^{T_x} + \hat{u}_i S_Z^{T_x} + \tilde{u}_i S_X^{T_z} + \tilde{u}_i S_Y^{T_z} + \right. \\ & \left. \tilde{u}_i S_Z^{T_z} + \check{u}_i S_X^N + \check{u}_i S_Y^N + \check{u}_i S_Z^N \right]. \end{aligned}$$

Tutti i campi microscopici nell'equazione qui sopra (u_i^+ , etc.) sono valutati in y_∞ . A tale posizione, posta a sufficiente distanza dalla scabrezza, tali campi sono diventati indipendenti dalla coordinata x . Fortunatamente molti di questi campi risulteranno nulli in y_∞ , e le condizioni al contorno finali del problema macroscopico non saranno eccessivamente complesse.

3 Metodo agli elementi finti

Per studiare l'effetto della rugosità della parete si ricorre alle equazioni del problema formulate da Navier-Stokes. Esse però conducono a sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali che non ammettono soluzioni in forma chiusa, ovvero tramite la soluzione di operazioni note. Per questo risulta conveniente e necessario ricorrere all'analisi numerica che permette ottenere una riformulazione risolvibile delle equazioni la cui soluzione è un'approssimazione di quella "reale". A seconda del metodo utilizzato e della scelta dei parametri la soluzione approssimata avrà differente grado di convergenza, ovvero i risultati si distaccheranno da quelli reali di un certo divario che ovviamente si vuole ridurre al minimo possibile e accettabile.

Le equazioni ricavate per il flusso di strato limite nel caso tri-dimensionale sono state nel nostro caso risolte con l'applicazione del metodo agli elementi finiti ed i calcoli effettuati tramite l'utilizzo del software di modellazione ad elementi finiti FreeFEM++.

L'approccio si basa sul riformulare debolmente le equazioni ottendo una forma integrale risolvibile in forma chiusa che con FreeFEM++ abbiamo potuto risolvere in uno spazio discretizzato, non continuo, dove le variabili assumono valori puntuali sui nodi degli elementi finiti con cui si è costruito lo spazio tridimensionale.

Per la riscrittura delle equazioni abbiamo utilizzato la formulazione debole di Galerkin che si basa appunto sul metodo agli elementi finiti. Ci sono ovviamente diverse formulazioni che si possono utilizzare basate sull'analisi numerica ed esse sono valutabili in termini di velocità con cui la soluzione converge, la stabilità numerica della formulazione, ovvero se la stessa formulazione rimane valida pur variando le condizioni e i dati del problema,

ed infine la sua computabilità poiché per essere utile deve essere risolvibile tramite i calcolatori a nostra disposizione. Nel nostro caso il problema di Navier-Stokes si presenta come sistemi di equazioni alle derivate parziali (PDE, in inglese Partial Differential Equation). Nel processo del calcolo numerico le equazioni sono state discretizzate, ovvero abbiamo riscritto le funzioni che sono in origine continue ed appartenenti perciò ad uno spazio L di dimensioni infinita, esprimendole come combinazione lineare di un dato numero di funzioni base lineari che definiscono un sottospazio finito di L . il sottospazio deve essere contenuto in L e le soluzioni quindi approssimare quelle reali.

Tutto ciò permette di semplificare la risoluzione del problema, in quanto ora la soluzione è data dall'insieme dei coefficienti delle combinazioni lineari delle funzioni base, che rappresentano un numero seppur spesso elevato, comunque finito di incognite, ricavabili risolvendo semplici equazioni algebriche che rendono il calcolo facilmente effettuabile tramite programmi come FreeFEM++.

3.1 Richiami sugli spazi funzionali lineari

Uno spazio lineare è un'entità matematica che descrive un insieme di elementi che condividono stesse proprietà. Se consideriamo uno spazio lineare reale dove gli elementi sono funzioni esso si può pertanto definire spazio funzionale lineare. Uno spazio funzionale lineare ha dimensione infinita nel caso in cui sia composto da un numero infinito di elementi indipendenti, allora due funzioni $u(x)$ e $v(x)$ appartenenti a tale spazio e definite in \mathbf{R} hanno infinite componenti.

Esiste quindi un'analogia tra gli spazi lineari reali, come gli spazi vettoriali, e gli spazi funzionali lineari. Ad esempio, possiamo definire operatori lineari differenziali con derivate parziali, come ad esempio l'operatore differenziale Laplaciano:

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Seguendo queste analogie si vuole arrivare ad esentendere il concetto di elementi base che definiscono uno spazio lineare anche agli spazi funzionali, nonostante quest'ultimi abbiano dimensione infinita.

Consideriamo la successione di funzioni linearmente indipendenti appartenenti a F (spazio funzionale): $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$.

Essa si dice completa o chiusa se vale: $\forall u(x) \in F$ ed $\forall \varepsilon > 0$ (ε scalare) $\exists n$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ t.c.:

Per la funzione:

$$\hat{u}_n = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \dots + \alpha_n \xi_n$$

Valga:

$$\|u - \hat{u}_n\| < \varepsilon$$

Allora si dice che la funzione u è approssimabile con \hat{u}_n a meno di un errore ε . Ogni ξ_i appartenente a tale successione è chiamata funzione base.

3.2 Metodi variazionali

Dato un problema differenziale alle derivate parziali come nel nostro caso, avendo applicato le equazioni di Navier-Stokes, esistono metodi, detti variazionali, che cercano una approssimazione della soluzione reale espressa come combinazione lineare di una successione di funzioni linearmente indipendenti, come le funzioni base. Questo consente la riscrittura delle equazioni che definiscono il problema tramite funzioni di grado inferiore a quelle di partenza, perciò più semplici. Uno dei metodi è ad esempio il metodo di Galerkin usato per risolvere taluni problemi che non presentano una soluzione analitica chiusa. In questi casi si effettua la formulazione numerica per riscrivere le equazioni in forma integrale ed effettuando un'integrazione per parti si giunge ad una formulazione risolvibile.

3.3 formulazioni deboli

La formulazione del problema iniziale scritta con le equazioni differenziali alle derivate parziali è detta forma forte, mentre la forma integrale (secondo il metodo di Galerkin) viene chiamata formulazione debole. Questo perché essa non rappresenta le equazioni nella loro forma reale, ma approssimata, quindi bisogna fare attenzione quando si applicano i metodi variazionali perché se la formulazione non è ben posta può portare a grandi oscillazioni nelle soluzioni al variare dei dati iniziali del problema. Quindi una formulazione si dice ben posta se le soluzioni sono continue nel dominio dei dati.

Per ciascun elemento la funzione da valutare possiamo approssimarla con funzioni note, scelte dall'operatore, ad ognuna delle quali si associa un coefficiente. La risoluzione del problema quindi si limiterà al calcolo dei coefficienti relativi ad ognuna delle funzioni note utilizzate per semplificare le funzioni. Nonostante, il metodo possa portare a dover calcolare un numero elevato di coefficienti, che cresce all'aumentare del grado di accuratezza della soluzione, rimane comunque uno strumento con grandi potenzialità che permette di risolvere problemi molto complessi, tramite semplici equazioni algebriche.

3.4 Il metodo degli elementi finiti o FEM

Per poter applicare il metodo agli elementi finiti occorre discretizzare il dominio, ovvero non essendo possibile effettuare i calcoli nell'infinità di punti che compongono qualsiasi spazio, che sia monodimensionale o tridimensionale, si riduce lo spazio ad una griglia di punti.

Nel nostro caso essendo il dominio tridimensionale si può pensare alla costruzione della griglia partendo dal definire le sue superfici che racchiudono il dominio. Per ogni superficie consideriamo i lati, o spigoli, che la compongono e per ognuno di essi scegliamo una griglia di punti tale da suddividere i lati in intervalli (nel nostro caso i punti sono equidistanti). Si ottiene così una serie di punti, detti nodi o punti nodali. Ora tramite diagonalizzazione estendiamo la griglia sulle superfici e intersecando i tratti che congiungono i vari punti otteniamo altrettanti nodi disposti sulle superfici. La nostra griglia si può vedere come le superfici laterali del dominio siano scomposte in elementi triangolari. Questi sono elementi finiti in 2D. Estendendo lo stesso ragionamento

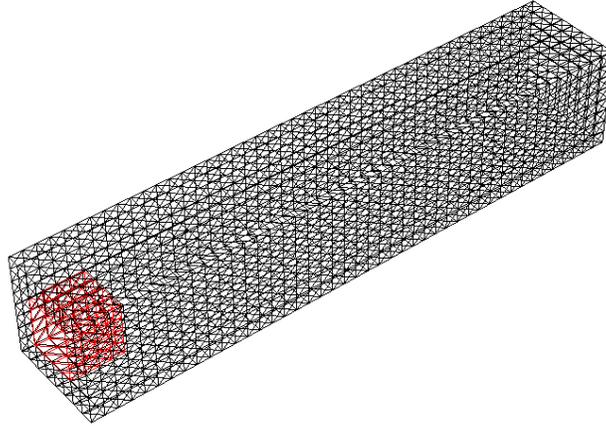


Figura 2: Immagine della griglia impiegata per i calcoli.

nella terza dimensione possiamo unire i vari nodi sulle superfici andando così a creare una griglia, detta mesh, tridimensionale dove gli elementi finiti possono essere a seconda della scelta del tipo di discretizzazione di varie forme.

Il dominio risulta così diviso in piccoli pezzi chiamati elementi finiti e gli angoli che li compongono sono i nodi. Allora qualsiasi variabile che sia essa la velocità o la pressione è calcolata nei punti nodali. Successivamente per ognuno degli elementi finiti si definiscono funzioni polinomiali di interpolazione per poter calcolare i valori all'interno dell'elemento finito partendo dai valori calcolati nei punti nodali.

4 Risultati ottenuti con FreeFEM++

I calcoli sulla cella unitaria di tutti i problemi microscopici ottenuti sono stati condotti con un codice di calcolo basato sul programma *open source* FreeFEM (<https://freefem.org/>). La griglia agli elementi finiti impiegata è raffigurata in fig. 1, la parte mostrata in rosso corrisponde all'elemento cubico di rugosità (di lato pari a 0.5). Il dominio si estende da $y = -0.5$ a $y = 5$. Il valore più alto corrisponde al valore chiamato y_∞ dove i valori delle variabili microscopiche devono essere valutati.

4.1 Risultati sul bordo della cella unitaria in $y_\infty = 5$

Con il massimo grado possibile di raffinatezza della griglia permesso dall'hardware a disposizione si hanno i risultati seguenti in $y = y_\infty$.

Problema forzato per S^{T_x}

$$\begin{cases} u^+ = 5.06303 \\ v^+ = 1.28414e - 15 \\ w^+ = -0.000191111 \\ p^+ = -3.89143e - 15 \end{cases}$$

Problema forzato per $S_X^{T_x}$

$$\begin{cases} \hat{u} = 2.89711e - 14 \\ \hat{v} = -12.8234 \\ \hat{w} = -6.44736e - 05 \\ \hat{p} = -10.1261 \end{cases}$$

Problema forzato per $S_Y^{T_x}$

$$\begin{cases} \hat{\hat{u}} = 3.48365e - 13 \\ \hat{\hat{v}} = -1.59909e - 15 \\ \hat{\hat{w}} = -1.8334e - 06 \\ \hat{\hat{p}} = 3.41818e - 17 \end{cases}$$

Problema forzato per $S_Z^{T_x}$

$$\begin{cases} \hat{\hat{\hat{u}}} = -1.7521e - 15 \\ \hat{\hat{\hat{v}}} = 0.00099882 \\ \hat{\hat{\hat{w}}} = -9.04592e - 05 \\ \hat{\hat{\hat{p}}} = 0.000382221 \end{cases}$$

Problema forzato per S^{T_z}

$$\begin{cases} u^\dagger = -0.000191111 \\ v^\dagger = 1.28414e - 15 \\ w^\dagger = 5.06303 \\ p^\dagger = -3.89143e - 15 \end{cases}$$

Problema forzato per $S_X^{T_z}$

$$\begin{cases} \tilde{u} = -1.7521e - 15 \\ \tilde{v} = -9.04592e - 05 \\ \tilde{w} = 0.00099882 \\ \tilde{p} = 0.000382221 \end{cases}$$

Problema forzato per $S_Y^{T_z}$

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{u}} = 3.48365e - 13 \\ \tilde{\tilde{v}} = -1.8334e - 06 \\ \tilde{\tilde{w}} = -1.59909e - 15 \\ \tilde{\tilde{p}} = 3.41818e - 17 \end{cases}$$

Problema forzato per $S_Z^{T_z}$

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{\tilde{u}}} = 2.89711e - 14 \\ \tilde{\tilde{\tilde{v}}} = -12.8234 \\ \tilde{\tilde{\tilde{w}}} = -6.44736e - 05 \\ \tilde{\tilde{\tilde{p}}} = -10.1261 \end{cases}$$

Problema forzato per S^N

$$\begin{cases} u^\# = 1.38795e - 18 \\ v^\# = -1.01683e - 32 \\ w^\# = -8.57342e - 17 \\ p^\# = -1 \end{cases}$$

Problema forzato per S_X^N

$$\begin{cases} \check{u} = 12.8234 \\ \check{v} = -6.82202e - 16 \\ \check{w} = -0.00100288 \\ \check{p} = -2.02123e - 14 \end{cases}$$

Problema forzato per S_Y^N

$$\begin{cases} \check{\check{u}} = 2.45311e - 17 \\ \check{\check{v}} = -1.42917e - 30 \\ \check{\check{w}} = 2.20462e - 15 \\ \check{\check{p}} = 4.42605e - 17 \end{cases}$$

Problema forzato per S_Z^N

$$\begin{cases} \check{\check{\check{u}}} = -0.00099882 \\ \check{\check{\check{v}}} = -1.38658e - 14 \\ \check{\check{\check{w}}} = 12.8229 \\ \check{\check{\check{p}}} = -1.93945e - 14 \end{cases}$$

I risultati sono riportati in forma grafica nelle figure seguenti. Si osservi che molti dei valori forniti qui sopra sono approssimati, abbiamo deciso di fissare a zero tutti i valori inferiori a 10^{-3} , e di mantenere solo i valori delle variabili macroscopiche che sono di ordine unitario.

5 Conclusioni

Dai risultati calcolati per ciascun problema abbiamo estrapolato gli elementi significativi, il cui pedice ∞ significa che sono valori valutati a $y_\infty = 5$:

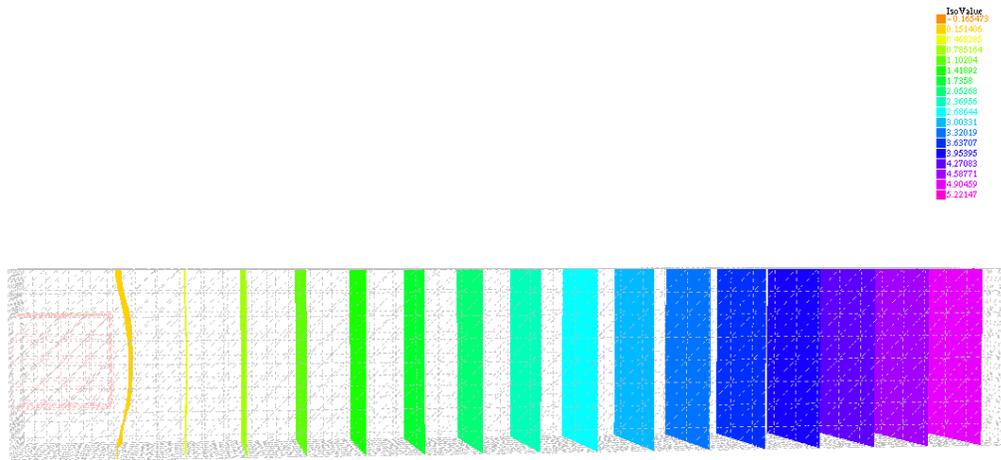


Figura 3: Isolinee di u_∞^+ e w_∞^\dagger .

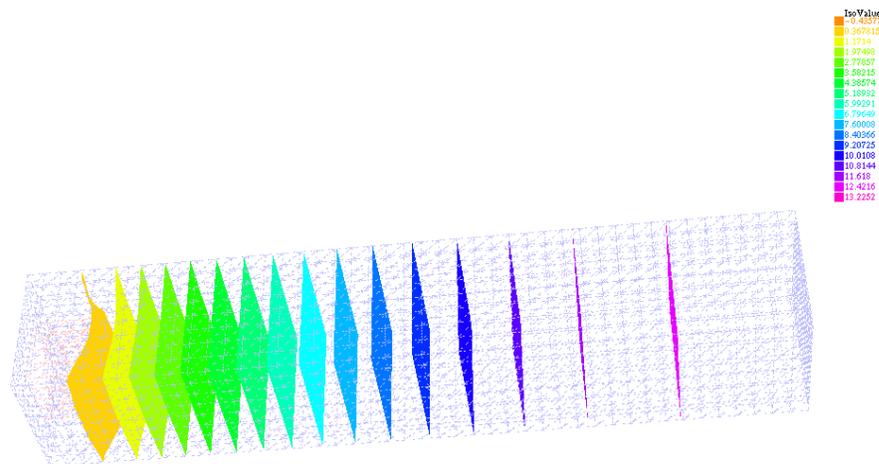


Figura 4: Isolinee di \check{u}_∞ e \check{w}_∞ .

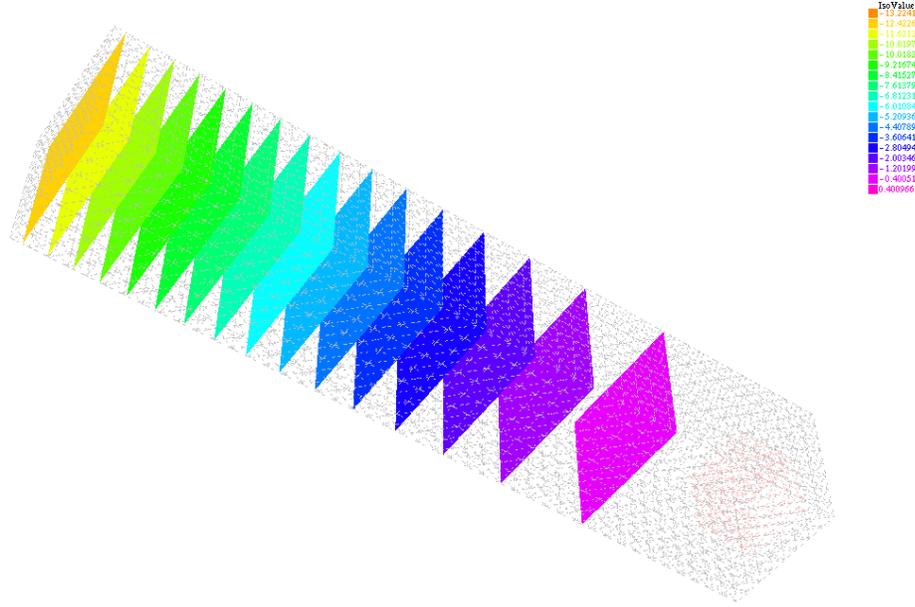


Figura 5: Isolinee di \hat{v}_∞ e \tilde{v}_∞ .

$$\begin{cases} u_\infty^+ = 5.063 \\ \check{u}_\infty = 12.823 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{v}_\infty = -12.823 \\ \tilde{v}_\infty = -12.823 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_\infty^\ddagger = 5.063 \\ \check{\check{w}}_\infty = 12.823 \end{cases}$$

Il fatto che $u_\infty^+ = w_\infty^\ddagger$ e $\check{u}_\infty = \check{\check{w}}_\infty$ è dovuto al fatto che l'elemento di rugosità elementare è cubico, e che l'asse x diventa l'asse z dopo una rotazione di $\pi/2$.

In conclusione abbiamo ottenuto le condizioni di scorrimento del fluido sulla parete fittizia e di traspirazione attraverso la stessa. Tali condizioni sono:

$$\begin{cases} U|_{Y_\infty} = \epsilon u_\infty^+ S^{T_x} + \epsilon^2 \check{u}_\infty S_X^N \\ V|_{Y_\infty} = \epsilon^2 [\hat{v}_\infty S_X^{T_x} + \tilde{v}_\infty S_Z^{T_z}] \\ W|_{Y_\infty} = \epsilon w_\infty^\ddagger S^{T_z} + \epsilon^2 \check{\check{w}}_\infty S_Z^N \end{cases}$$

e il parametro ϵ è una misura dell'ampiezza relativa della scabrezza di parete.

Armati di queste condizioni al contorno si può ora affrontare lo studio del moto macroscopico di un fluido sopra un insieme ordinato di microrugosità di parete senza dover necessariamente fare un CAD ed una discretizzazione della scabrezza reale. Quest'ultima procedura richiederebbe un notevole investimento in tempo di calcolo e in memoria del computer, a causa della necessità di discretizzare adeguatamente il campo di moto nell'intorno di ciascun elemento. Questa è la forza della teoria dell'omogeneizzazione, che permette di evitare la descrizione microscopica del moto e la rimpiazza con opportune condizioni mediate.

Il caso studiato di elementi di scabrezza cubici e allineati è forse il più semplice che si poteva affrontare. Tuttavia l'analisi svolta in questa tesi può essere estesa ad elementi di forma più complessa e disposti in modo non necessariamente allineato. Qualora una scabrezza più realistica venisse studiata ci si aspetta che le condizioni equivalenti contengano più termini rispetto ai pochi che sono emersi in questo studio.

Riferimenti bibliografici

- [1] Navier, C.L.M.H., Mémoire sur les lois du mouvement des fluides, Mem. Acad. R. Sci. Inst. Fr., 6 , 389 (1823)
- [2] Taylor, G.I., Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders, Phil. Trans. R. Soc. Lond., A 223, 289 (1923)
- [3] Bottaro, A., Flow over natural or engineered surfaces: an adjoint homogenization perspective, J. Fluid Mech., 877, 1 (2019)
- [4] Mei, C.C., and Vernescu, B., Homogenization Methods for Multiscale Mechanics, 348, World Scientific Publishing Co Pte Ltd, Singapore, (2010).
- [5] Walsh, M.J., Riblets as a viscous drag reduction technique, AIAA J., 21, 485 (1983)
- [6] Bechert, D.W., and Bartenwerfer, M., The viscous flow on surfaces with longitudinal ribs, J. Fluid Mech., 206, 105 (1989)
- [7] Luchini, P., Manzo, D., and Pozzi, A., Resistance of a grooved surface to parallel flow and cross-flow, J. Fluid Mech., 228, 87 (1991)
- [8] García-Mayoral, R., and Jiménez, J., Drag reduction by riblets, Phil. Trans. R. Soc., A 369, 1412 (2011)
- [9] Bechert, D.W., Hoppe, G., and Reif, W.-E., On the drag reduction of shark skin, AIAA paper, 85-0546 (1985)
- [10] Sirovich, L., and Karlsson, S., Turbulent drag reduction by passive mechanisms, Nature, 388, 753 (1997)
- [11] Bechert, D.W., Bruse, M., Hage, W., and Meyer, R., Fluid mechanics of biological surfaces and their technological application, Naturwissenschaften, 87, 157 (2000)
- [12] Domel, A.G., Saadat, M., Weaver, J.C., Haj-Hariri, H., Bertoldi, K., and Lauder, G.V., Shark skin-inspired designs that improve aerodynamic performance, J. Roy. Soc. Interface, 15, 20170828 (2018)
- [13] Achdou, Y., Pironneau, O., and Valentin, F., Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries, J. Comp. Phys., 147, 187 (1998).
- [14] Jäger, W., and Mikelić, A., On the roughness-induced effective boundary conditions for an incompressible viscous flow, J. Diff. Equations, 170, 96 (2001).
- [15] Basson, A., and Gérard-Varet, D., Wall laws for fluid flows at a boundary with random roughness, Comm. Pure Appl. Math., 61, 941 (2008).
- [16] Kamrin, K., Bazant, M., and Stone, H.A., Effective slip boundary conditions for arbitrary periodic surfaces: the surface mobility tensor, J. Fluid Mech., 658, 409 (2010).
- [17] Luchini, P., Linearized no-slip boundary conditions at a rough surface, J. Fluid Mech., 737, 349 (2013).

- [18] Introïni, C., Quintard, M., and Duval, F., Effective surface modeling for momentum and heat transfer over rough surfaces: Application to a natural convection problem, *Int. J. Heat Mass Transf.*, 54, 3622 (2011).
- [19] Guo, J., Veran-Tissoires, S., and Quintard, M., Effective surface and boundary conditions for heterogeneous surfaces with mixed boundary conditions, *J. Comput. Phys.*, 305, 942 (2016).
- [20] Jiménez Bolaños, S., and Vernescu, B., Derivation of the Navier slip and slip length for viscous flows over a rough boundary, *Phys. Fluids*, 29, 057103 (2017)
- [21] Zampogna, G.A., Magnaudet, J., and Bottaro, A., Generalized slip condition over rough surfaces, *J. Fluid Mech.*, 858, 407 (2019).
- [22] Lācis, U., Sudhakar, Y., Pasche, S., and Bagheri, S., Transfer of mass and momentum at rough and porous surfaces, *J. Fluid Mech.*, 884, A21 (2020).