

DICAT Department of Civil, Chemical and Environmental Engineering. University of Genova



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI GENOVA
SCUOLA POLITECNICA

Formazione di gocce in un getto libero usando un modello ridotto

Relatori:

Chiar.mo Prof. Alessandro Bottaro

Chiar.mo Prof. François Gallaire

Allievo:

Tobias Ansaldo

Tesi per il conseguimento della Laurea

in

INGEGNERIA MECCANICA

Anno accademico 2011/2012

Marzo 2013



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI GENOVA
SCUOLA POLITECNICA

Droplet formation in a free stream jet using a reduced model

Abstract

We present a numerical model for predicting the instability and breakup of viscous microjets of Newtonian fluid. We adopt a one-dimensional slender-jet approximation and obtain the equations of motion in the form of a pair of coupled nonlinear partial differential equations (PDEs). We solve these equations using the method of lines, wherein the PDEs are transformed to a system of ordinary differential equations for the nodal values of the jet variables on a uniform staggered grid. We use the model to predict the instability and drop formation for different physical case. For the microthread analysis, we take into account arbitrary initial perturbations of the free-surface and jet velocity. For the continuous nozzle-driven jet analysis, we take into account arbitrary time-dependent perturbations of the free-surface, velocity and/or surface tension as boundary conditions at the nozzle orifice. We validate the model comparing it with experiments and numerical solutions. The key advantages of

the model are its ease of implementation and speed of computation, which is several orders of magnitude faster than the simulations that solve the two-dimensional Navier-Stokes equations. The model enables rapid parametric analysis of jet breakup and satellite formation as a function of jet dimensions and modulation parameters.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Instabilità di Rayleigh-Plateau	4
1.2	Sottile getto di liquido	10
2	Equazioni del moto	12
2.1	Equazioni 2D	12
2.2	Equazioni 1D	15
2.3	Adimensionalizzazione	17
2.4	Procedura numerica	18
3	Modelli	20
3.1	Cilindro infinito	20
3.2	Instabilità temporale	20
3.2.1	Validazione del codice	21
3.2.2	Confronto con la teoria Rayleigh-Plateau . . .	22
3.2.3	Risultati	24
3.3	Contrazione di un filamento liquido	26
3.3.1	Validazione	30
3.3.2	Risultati	31
3.4	Getto libero	35
3.4.1	Convergenza della soluzione	36
3.4.2	Risultati	38
3.4.3	Confronto con i dati sperimentali:	41
3.4.4	Interazione tra la perturbazione e la punta del getto:	42
4	Conclusioni	47

Elenco delle figure

1.1	Un sottile getto d'acqua fuoriesce da un tubo di 4 mm di diametro e viene perturbato con onde acustiche a differenti frequenze. La "lunghezza d'onda" della perturbazione è rispettivamente dal basso verso l'alto 4.6, 12.5, e 42 volte il diametro del tubo. Fotografie di Rutland and Jameson (1971).	2
1.2	Gocce d'inchiostro formate da iniettori di una stampante. Eggers and Villermaux 2008 [9]	2
1.3	ω e k , rispettivamente frequenza e lunghezza d'onda della perturbazione adimensionalizzate. Il sistema è instabile solo per $k < 1$	10
2.1	Velocità dell'interfaccia e del fluido.	14
3.1	Configurazione al tempo $t = 0$	20
3.2	Confronto tra il risultato ottenuto da Furlani (in nero) ed il mio per $Oh = \frac{1}{200}$	21
3.3	Confronto tra il risultato ottenuto da Furlani (in nero) ed il mio per $Oh = 10$	22
3.4	Confronto tra teoria Rayleigh-Plateau (linea tratteggiata) e quella di Eggers e Dupont (linea continua)	24
3.5	Inverso del $t_{breakup}$ per vari valori di k quando $Oh = \frac{1}{200}$	25
3.6	Inverso del $t_{breakup}$ per vari valori di k quando $Oh = 10$	26
3.7	Forma del filamento al tempo $t = 0$	28
3.8	In rosso il tratto di curva dove sono risolte le quazioni del moto tutto il resto segue per simmetria	29
3.9	In blu il mio risultato ed in nero quello ottenuto da Notz <i>et al.</i> quando $Oh = 10^{-2}$	30

3.10	In blu il mio risultato ed in nero quello ottenuto da Notz <i>et al.</i> quando $Oh = 1$ all'istante di tempo $t = 8$	31
3.11	Diversi istanti di tempo per $Oh = 1$	32
3.12	Diversi istanti di tempo per $Oh = 0.1$	32
3.13	Diversi istanti di tempo per $Oh = 10^{-2}$	33
3.14	Diversi istanti di tempo per $Oh = 2.05 \cdot 10^{-2}$	33
3.15	In blu il mio risultato ed in nero quello ottenuto da Notz <i>et al.</i> nella zona di transizione per due diversi valori di Oh	34
3.16	La condizione iniziale è indicata con linea continua rossa (figura di proprietà di Hoeve <i>et al.</i>)	35
3.17	Soluzione del getto nel punto di rottura all'aumentare del numero di punti specifico N_s	36
3.18	Tempo in cui avviene la formazione della prima goccia all'aumentare del numero di punti specifico N_s	37
3.19	Nonostante le differenti condizioni iniziali la soluzione finale è identica per tutte le configurazioni	38
3.20	In figura è mostrato l'andamento del getto in assenza di tensione superficiale	39
3.21	In figura è mostrato l'andamento del getto in assenza di tensione superficiale con una perturbazione delle condizioni iniziali pari al 50% di h_0	40
3.22	Istante in cui avviene la formazione della goccia in presenza della tensione superficiale	41
3.23	Confronto tra i risultati ottenuti da Hoeve <i>et al.</i> con la soluzione numerica con i parametri sopra citati. I risultati indicano che la teoria 1D pronostica in maniera soddisfacente la formazione della goccia. La barra presente nel pannello di superiore indica la distanza di $200\mu m$.	42
3.24	Tempo di breakup in funzione della frequenza della perturbazione per $\varepsilon = 0.1$	43
3.25	Tempo di breakup in funzione della frequenza della perturbazione per $\varepsilon = 0.05$	43
3.26	Tempo di breakup in funzione della frequenza della perturbazione per $\varepsilon = 0.01$	44

3.27	La perturbazione e la fine del getto interagiscono tra loro	45
3.28	Tempo di breakup in funzione dell'ampiezza della perturbazione per $f = 0.5$	45
3.29	La perturbazione e la fine del getto interagiscono tra loro	46

Capitolo 1

Introduzione

Ciascuno di noi aprendo un qualsiasi rubinetto, in modo da formare un sottile filo d'acqua, ha assistito ad un'instabilità fluidodinamica che prende il nome dai primi due scienziati che ne hanno capito il meccanismo fisico, Rayleigh e Plateau. L'instabilità di cui stiamo parlando è la rottura del getto d'acqua in tante goccioline.

Sperimentalmente si osserva che è possibile controllare la frequenza di formazione delle gocce ed il loro diametro eccitando il getto di liquido con una perturbazione esterna, tipicamente onde acustiche (vedi fig. 1.1).

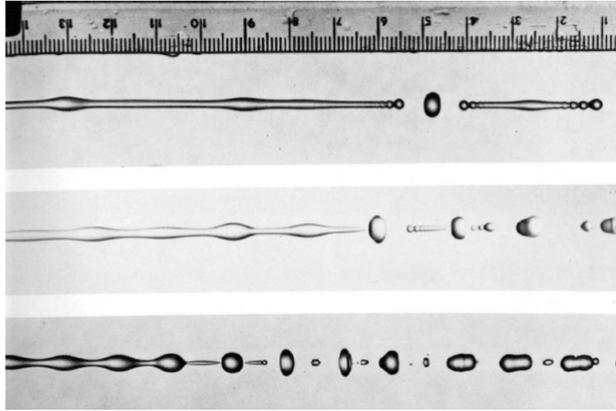


Figura 1.1: Un sottile getto d'acqua fuoriesce da un tubo di 4 mm di diametro e viene perturbato con onde acustiche a differenti frequenze. La "lunghezza d'onda" della perturbazione è rispettivamente dal basso verso l'alto 4.6, 12.5, e 42 volte il diametro del tubo. Fotografie di Rutland and Jameson (1971).

Questa tecnica, per esempio, è ben nota ai costruttori di stampanti i quali desiderano che le gocce d'inchiostro che bagnano il foglio siano le più piccole possibili (vedi fig.1.2).

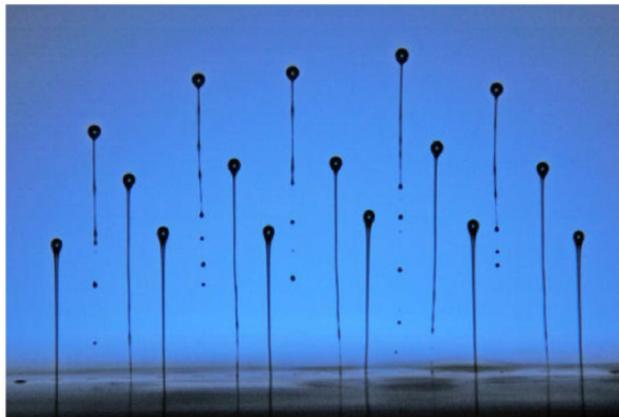


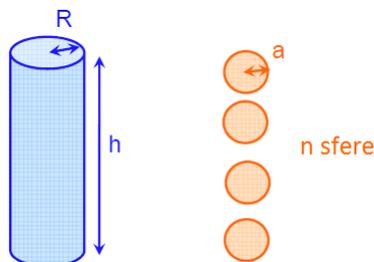
Figura 1.2: Gocce d'inchiostro formate da iniettori di una stampante. Eggers and Villermaux 2008 [9]

La prima osservazione della rottura del getto in gocce è avvenuta da parte di Savart [10]. Tuttavia, non riconobbe nella tensione superficiale la causa di questa instabilità. Il primo ad accorgersi del ruolo giocato dalla tensione superficiale fu Plateau [11]. Costui, inoltre, dalle sue numerose osservazioni sperimentali notò che ad un incremento della viscosità consegue un aumento del diametro delle gocce. Rayleigh [12] fu il primo ad effettuare un'analisi di stabilità, eseguita trascurando la viscosità e riconoscendo nell'inerzia il fattore ritardante della destabilizzazione causata dalla tensione superficiale. La sezione 1.1 riporta nei dettagli i calcoli eseguiti da Rayleigh che prendono il nome di teoria di Rayleigh-Plateau.

A questo punto sorge spontanea una domanda: perchè la tensione superficiale è la causa dell'instabilità?

La tensione superficiale agisce minimizzando la superficie esterna di un dato volume. Se studiassimo l'interfaccia tra due lastre di fluido sotto l'azione della gravità, troveremmo che la tensione superficiale ha un ruolo stabilizzante. Questo perchè qualsiasi perturbazione applicata ad un'interfaccia piana non può che incrementarne l'area A e di conseguenza l'energia γA ad essa associata, dove $\gamma \left[\frac{N}{m} \right]$ è la tensione superficiale.

Nel nostro caso, invece, per una colonna cilindrica di fluido la tensione superficiale ha un ruolo destabilizzante e ad essa va attribuita la causa di questa instabilità fluidodinamica. Infatti, per un fissato volume di fluido, la superficie del cilindro di raggio r ed altezza h (vedi figura a lato) vale $2\pi R^2 + 2\pi Rh$, mentre la superficie totale delle n sfere di raggio a sarà $4\pi a^2 n$, dove n dalla conservazione del volume di liquido vale $n = \frac{3R^2 h}{4a^3}$.



Nell'ipotesi $h \gg R$ scriviamo il rapporto tra le due aree:

$$\frac{\text{area sfera}}{\text{area cilindro}} = \frac{3R}{2a}$$

Il rapporto tra le due aree si riduce se il raggio della sfera a au-

menta. Per minimizzare la superficie il cilindro deve trasformarsi in una sfera (goccia) il più grande possibile. L'instabilità in esame è quindi una transizione verso uno stato ad energia superficiale più bassa. Formare una grossa goccia, però, significa muovere una grande quantità di massa e questo va in contrapposizione con l'inerzia del fluido. Il diametro risultante della goccia sarà un compromesso tra il fattore destabilizzante, la tensione superficiale, ed il fattore stabilizzante (o comunque ritardante), l'inerzia del fluido.

Il tempo di formazione della goccia può essere stimato da un'analisi dimensionale del fenomeno fisico omettendo gli effetti della viscosità. Le variabili dalle quali il problema considerato dipende sono: la densità del fluido ρ , il raggio della colonna di liquido R e la tensione superficiale γ . Da queste grandezze possiamo ricavare il tempo caratteristico τ_c :

$$\tau_c = \sqrt{\frac{\rho R^3}{\gamma}}.$$

Possiamo supporre che questa scala ci dia l'ordine di grandezza del tempo a cui avviene la transizione da cilindro a goccia. Il tempo di formazione della goccia cresce con l'aumentare della sua massa e decresce con la tensione superficiale, il che sembra ragionevole. Si noti che per 1mm di colonna d'acqua la scala di tempo è dell'ordine dei millisecondi.

1.1 Instabilità di Rayleigh-Plateau

L'idea di Rayleigh era partire da un flusso di base, detto *base flow*, ed applicarvi una piccola perturbazione di tipo sinusoidale per studiarne l'evoluzione spazio-temporale. Il flusso di base è un cilindro infinito di raggio h_0 , velocità assiale V_0 , velocità radiale nulla, non viscoso, incomprimibile ed assialsimmetrico.

Scriviamo l'equazione di Eulero in coordinate cilindriche tenendo conto delle ipotesi fatte:

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g, \quad (1.2)$$

dove V_z, V_r, p, ρ sono rispettivamente la velocità in direzione assiale, radiale, la pressione e la densità.

L'equazione di continuità si scrive:

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{V_r}{r} = 0. \quad (1.3)$$

A queste equazioni Rayleigh accoppia la condizione di impermeabilità dell'interfaccia:

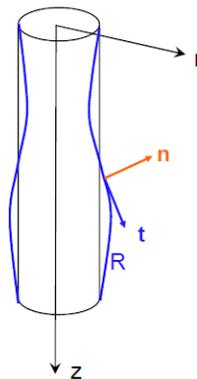
$$\frac{\partial h}{\partial t} = V_r - V_z \frac{\partial h}{\partial z}, \quad (1.4)$$

e l'equilibrio delle forze agenti all'interfaccia (si ricorda che la forza dovuta alla tensione superficiale γ agisce sempre e solo in direzione normale alla superficie):

$$P - P_{atm} = \gamma \left(\frac{1}{h(1 + \frac{\partial h^2}{\partial z})^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}}{(1 + \frac{\partial h^2}{\partial z})^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (1.5)$$

Per quanto riguarda il *base flow* le eq. 1.1 e 1.2 ci dicono che la pressione P è costante lungo tutta la colonna di fluido. Dall'eq. 1.5 si ha che all'interfaccia nella configurazione imperturbata $P(h, z, t) = P_{atm} + \frac{\gamma}{h_0}$, ma essendo la pressione costante lungo tutto il cilindro possiamo mettere $P_0 = P_{atm} + \frac{\gamma}{h_0}$

Si rimanda alla sezione 2.1 per una trattazione più approfondita dei passaggi che portano alle condizioni al contorno 1.4 e 1.5.



Prima di procedere è utile adimensionalizzare tutte le equazioni. Per fare questo scegliamo i parametri più rappresentativi per questo fenomeno fisico. Le unità fondamentali sono la lunghezza, il tempo e la massa L, T, M . La lunghezza L viene adimensionalizzata con l'altezza del getto h_0 , il tempo T con il cosiddetto tempo critico $\tau_c = \sqrt{\frac{\rho h_0^3}{\gamma}}$ (stima della scala di tempo a cui avviene la formazione delle gocce) e la densità del fluido ρ viene usata per formare un gruppo dimensionale che normalizzi la massa del liquido.

La colonna di fluido adimensionalizzata ha raggio nelle condizioni imperturbate $h_o^* = \frac{h_0}{h_0} = 1$, velocità $V_0^* = \frac{\tau_c}{h_0} V_0 = \sqrt{We}$ dove $We = \frac{\rho h_0 V_0^2}{\gamma}$ è il rapporto tra le forze inerziali e quelle viscosse e $P_0^* = \frac{h_0}{\gamma} P_0$.

Le equazioni adimensionalizzate diventano:

$$\frac{\partial V_r^*}{\partial t^*} + V_r^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} + V_z^* \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial r^*}, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial V_z^*}{\partial t^*} + V_r^* \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} + V_z^* \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} - Bo \cdot g, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} + \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} + \frac{V_r^*}{r^*} = 0. \quad (1.8)$$

dove $Bo = \frac{\rho h^2 g}{\gamma}$ (detto *numero di Biot*) è il rapporto tra forze gravitazionali e tensione superficiale. In tutti i casi da noi studiati h è abbastanza piccola da considerare Bo infinitesimo e quindi trascurabile.

Condizioni iniziali :

$$\frac{\partial h^*}{\partial t} = V_r^* - V_z^* \frac{\partial h^*}{\partial z^*}, \quad (1.9)$$

$$P^* - \frac{h_0}{\gamma} P_{atm} = \left(\frac{1}{h^* \left(1 + \frac{\partial h^{*2}}{\partial z^{*2}}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{\partial^2 h^*}{\partial z^{*2}}}{\left(1 + \frac{\partial h^{*2}}{\partial z^{*2}}\right)^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (1.10)$$

Di seguito si farà riferimento solo a grandezze adimensionali quindi l'apice verrà rimosso per comodità.

Applichiamo ora una piccola perturbazione al base flow, quindi le variabili diventano:

$$V_r = 0 + \varepsilon u_r(z, r, t),$$

$$V_z = V_0 + \varepsilon u_z(z, r, t),$$

$$P = P_0 + \varepsilon p(z, r, t),$$

$$h = h_0 + \varepsilon \eta(z, t).$$

Tenendo solo l'ordine di infinitesimo più grande si ha:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + V_0 \frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r}, \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + V_0 \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \quad (1.12)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (1.13)$$

la (1.9) diventa:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \eta}{\partial z} = u_r, \quad (1.14)$$

la (1.10) diventa:

$$p = -\left(\eta + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}\right). \quad (1.15)$$

Ricordo che le eq. (1.14) e (1.15) sono valide solo all'interfaccia quando $r = h$.

Dalle eq. (2.8-2.10) deriva che il Laplaciano della pressione è uguale a zero:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (1.16)$$

Applicando la trasformata di Fourier alla perturbazione lungo gli assi invarianti per traslazione (i.e. t e z) si ottiene:

$$\begin{aligned}
u_r &= \hat{u}_r(r)e^{i(kz-\omega t)} \\
u_z &= \hat{u}_z(r)e^{i(kz-\omega t)} \\
p &= \hat{p}(r)e^{i(kz-\omega t)} \\
\eta &= Be^{i(kz-\omega t)}
\end{aligned} \tag{1.17}$$

dove k è il numero d'onda e ω la frequenza.
Sostituendo nella eq. (1.16) si ha:

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} - k^2 \hat{p} = 0, \tag{1.18}$$

Le soluzioni di questa famiglia di equazioni differenziali sono note con il nome di funzioni di Bessel ed in particolare per l'equazione (1.17) la soluzione è:

$$\hat{p} = AI_0(kr) + CK_0(kr), \tag{1.19}$$

dove $I_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{kr \cdot \cos(\theta)} d\theta$ e $K_0 = \int_0^\infty e^{-kr \cdot \cosh(t)} dt$, mentre A e C sono costanti che dipendono dalle condizioni al contorno; applicando la condizione al contorno $\frac{\partial \hat{p}}{\partial r}_{r=0} = 0$ si ottiene necessariamente $C = 0$ e quindi:

$$\hat{p}(r) = AI_0(kr). \tag{1.20}$$

Inserendo la (1.17) nella (1.11) si ottiene:

$$-i\omega \hat{u}_r + ikV_0 \hat{u}_r = -AkI'_0(kr),$$

dove con l'apice ' si intende $\frac{d}{d(kr)}$.

Abbiamo così un'espressione per u_r :

$$\hat{u}_r = -\frac{i}{(\omega - kV_0)} AkI'_0(kr),$$

che sostituita a sua volta nella (1.14) ci dà:

$$-i\omega B + ikV_0 B = -\frac{i}{(\omega - V_0 k)} AkI'_0(k).$$

Dalla 1.15 invece si ha:

$$AI_0(k) = -B(1 - k^2).$$

Mettendo a sistema si trova una relazione, detta *relazione di dispersione*, che ci permette di individuare quali perturbazioni sono destabilizzanti:

$$\begin{pmatrix} I_0(k) & (1 - k^2) \\ \frac{kI_0'(k)}{(\omega - V_0k)} & -(\omega - V_0k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0.$$

La soluzione non banale esiste se e solo se il determinante della matrice è uguale a zero. Arriviamo così a scrivere un'espressione per ω :

$$\omega = Uk \pm \sqrt{k(k^2 - 1) \frac{I_0'(k)}{I_0(k)}}.$$

Per come abbiamo definito la perturbazione, essa ha un andamento temporale instabile, ovvero amplificato nel tempo $\iff \Im(\omega) > 0$.

In figura è mostrato l'andamento della parte complessa della frequenza ω in funzione della lunghezza d'onda k . Si noti come nel caso adimensionale tale curva sia universale:

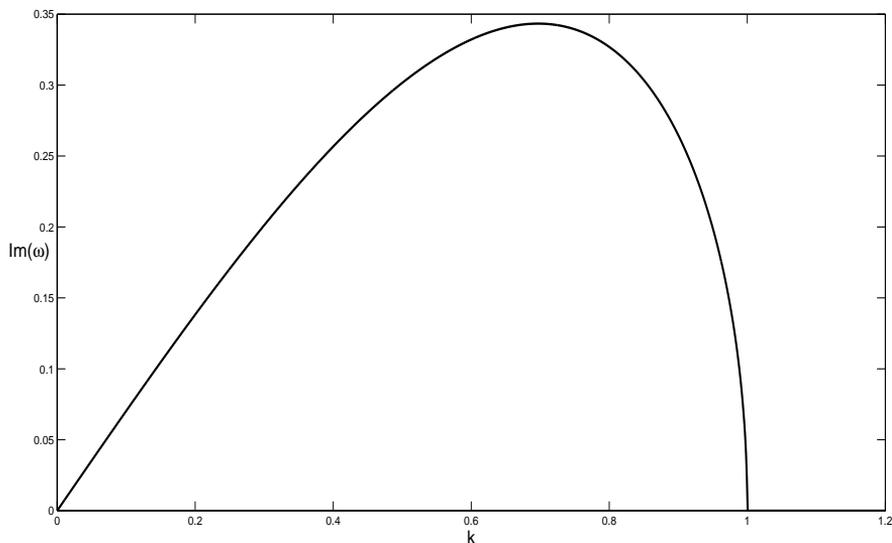


Figura 1.3: ω e k , rispettivamente frequenza e lunghezza d'onda della perturbazione adimensionalizzate. Il sistema è instabile solo per $k < 1$.

La velocità V_0 non influenza i risultati per quanto riguarda la parte immaginaria di ω . Ciò significa che con le ipotesi fatte l'inerzia non è riconosciuta come fattore ritardante dell'instabilità.

1.2 Sottile getto di liquido

Avvicinandosi al punto di rottura del cilindro il raggio tende a zero, l'iniziale colonna di fluido si separa e le equazioni trattano una singolarità. L'analisi di stabilità lineare mostrata nella sez.1.1 ci dà una buona stima del diametro delle gocce che si vengono a formare, ma è incapace di predire la forma della superficie dopo che si è applicata una perturbazione su di essa, per esempio non spiega il fatto che il cilindro non si rompa in maniera uniforme, oppure che spesso dopo la formazione di una goccia ne segue subito dopo una molto più piccola detta *goccia satellite*. Le ricerche riguardo la rottura dei micro-getti e alla formazione di gocce stanno notevol-

mente incrementando negli ultimi anni. Questo fenomeno è dovuto al rapido avanzamento che si sta avendo in microfluidica, biomedica e nanotecnologie. Nuove tecnologie sono alla ricerca di costi sempre più sostenibili e velocità sempre maggiori per la deposizione di gocce alle scale dei micro- o nano-metri. Una grande diversità di materiali può essere potenzialmente depositata tramite un moderno micro-iniettore incluso metalli liquidi, nanoparticelle, polimeri, una miriade di biomateriali, adesivi ecc.. Applicazioni emergenti in questo campo sono: stampaggio di materiale in micro-chip elettronici, deposito di biomateriali (celle, materiale genetico ecc.), prototipazione 3D ecc.[8].

Anche nell'industria alimentare il trasporto di polveri con una distribuzione omogenea delle particelle attraverso un nebulizzatore porta ad una riduzione del costo energetico. Gli iniettori delle stampanti devono formare gocce singole con diametro prestabilito per ottenere un adeguato deposito sul foglio. La somministrazione via aerea di farmaci a volte richiede una dispersione adeguata delle particelle per agire efficacemente sui polmoni.

Come visto svariati settori industriali sono interessati a capire in fondo questo fenomeno fisico ed in particolare a controllarlo sfruttandolo a loro vantaggio.

In questa tesi cercheremo di convincere il lettore che il codice da noi sviluppato è in grado di predire con accuratezza questo fenomeno fisico e ne discuteremo in dettaglio i risultati ottenuti.

Capitolo 2

Equazioni del moto

In questo breve capitolo verranno descritte le equazioni che descrivono il moto del getto, dove basandoci sulla teoria della lubrificazione, le equazioni saranno rese mono-dimensionali.

In tutti i casi che andremo a studiare il fluido viscoso viene considerato adiabatico (viscosità, densità e tensione superficiale costante), incomprimibile, assialsimmetrico.

2.1 Equazioni 2D

Scriviamo le equazioni di N-S in coordinate cilindriche per una colonna di fluido assialsimmetrica con viscosità cinematica ν , densità ρ e tensione superficiale γ :

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} \right), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) - g, \quad (2.2)$$

dove V_z è la velocità in direzione assiale, V_r la velocità in direzione radiale e p la pressione.

A queste due equazioni accoppiamo l'equazione di continuità (1.8).

Queste equazioni sono risolte per $0 \leq r < h(z, t)$, dove h è l'altezza della colonna di fluido.

All'interfaccia invece, imponiamo ad ogni istante ed in ogni punto, l'equilibrio delle forze in direzione normale e in direzione tangenziale alla superficie della colonna di fluido.

Il bilancio delle forze normali, ricordando che le forze dovute alla tensione superficiale agiscono sempre e solo in direzione normale alla superficie, si scrive:

$$(\mathbf{n}^T \sigma) \cdot \mathbf{n} = -\gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (2.3)$$

dove \mathbf{n} è il vettore di modulo unitario e direzione normale alla superficie, σ è il tensore delle tensioni effettive, R_1 e R_2 sono i raggi principali di curvatura.

Nel bilancio delle forze tangenziali si trascura l'interazione tra aria e liquido.

Questa ipotesi è ampiamente giustificata dalla moderata velocità del getto, dalla ridotta superficie di esso e soprattutto dalla ridotta viscosità dell'aria:

$$(\mathbf{n}^T \sigma) \cdot \mathbf{t} = 0, \quad (2.4)$$

dove \mathbf{t} è il vettore di modulo unitario e direzione tangente alla superficie.

Da considerazioni geometriche si ricavano i parametri \mathbf{n} e \mathbf{t} funzioni di h :

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial h^2}{\partial z^2}}}, -\frac{\frac{\partial h}{\partial z}}{\sqrt{1 + \frac{\partial h^2}{\partial z^2}}} \right), \quad (2.5)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \left(-\frac{\frac{\partial h}{\partial z}}{\sqrt{1 + \frac{\partial h^2}{\partial z^2}}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial h^2}{\partial z^2}}} \right). \quad (2.6)$$

Inserendo la (2.5) e (2.6) nella (2.3) e (1.5) si ottiene rispettivamente:

$$\frac{p}{\rho} - \frac{2\nu}{1 + \frac{\partial h^2}{\partial z}} \left[\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \frac{\partial h}{\partial z} \right] = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (2.7)$$

$$\frac{\nu}{1 + \frac{\partial h^2}{\partial z}} \left[2 \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{\partial h}{\partial z} + \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \left(1 - \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right) - 2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} \right] = 0. \quad (2.8)$$

Altra condizione all'interfaccia è l'impermeabilità di quest'ultima:

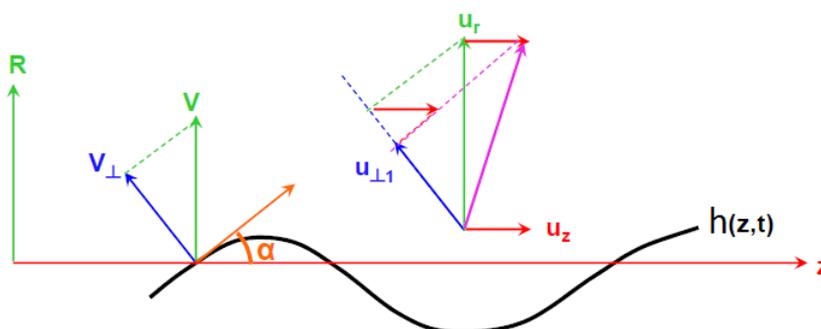


Figura 2.1: Velocità dell'interfaccia e del fluido.

Affinchè questa condizione sia verificata la velocità dell'interfaccia in direzione normale all'interfaccia stessa deve essere uguale alla velocità del fluido in quella direzione, cioè:

$$V_{\perp} = u_{\perp 1}, \quad (2.9)$$

$$V_{\perp} = \frac{\partial h}{\partial t} \cos(\alpha), \quad (2.10)$$

$$u_{\perp 1} = u_r \cos(\alpha) - u_z \sin(\alpha), \quad (2.11)$$

sostituendo nella (1.12) la (1.13) e la (1.14) si ha:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = u_r - u_z \frac{\partial h}{\partial z}. \quad (2.12)$$

Infine si riportano le condizioni del flusso in $r = 0$:

$$\frac{\partial V_z}{\partial r} = 0, \quad (2.13)$$

e

$$V_r = 0; \quad (2.14)$$

la (2.13) è data dalla simmetria del problema, mentre la (2.14) assicura la non compenetrazione degli elementi di fluido sull'asse.

2.2 Equazioni 1D

Abbiamo ricavato le equazioni che descrivono il nostro fenomeno fisico.

Risolvere Navier-Stokes completo con queste condizioni al contorno, senza le semplificazioni fatte, risulterebbe estremamente complicato.

Tuttavia anche in presenza delle ipotesi semplificative fatte fin ad ora la risoluzione numerica vicino al punto di rottura del getto (che è una singolarità in quanto $h \rightarrow 0$) risulta molto costoso in termini computazionali.

Una soluzione a questo problema è trovare una strada per scrivere queste equazioni in 1D, diminuendo così il tempo computazionale anche di 4 ordini di grandezza.

L'idea è seguire la strada proposta da Eggers and Dupont [1] ovvero sotto l'ipotesi di $r \ll L$ (dove L è la lunghezza della colonna di fluido) ricaviamo un sistema di equazioni mono-dimensionali dalla espansione in serie di Taylor rispetto ad r delle variabili V_z, V_r e p mantenendo solo l'ordine più grande nelle equazioni di Navier-Stokes.

possiamo scrivere la velocità assiale V_z e la pressione p come potenze di r :

$$V_z(r, z, t) = V_0(z, t) + V_2(z, t)r^2 + \dots, \quad (2.15)$$

$$p(r, z, t) = p_0(z, t) + p_2(z, t)r^2 + \dots. \quad (2.16)$$

Il termine di ordine 1 è stato posto uguale a zero per simmetria. L'espressione di V_r segue dalla continuità:

$$V_r(r, z, t) = -\frac{\partial V_0(z, t)}{\partial z} \frac{r}{2} - \frac{\partial V_2(z, t)}{\partial z} \frac{r^3}{4} + \dots \quad (2.17)$$

Inseriamo le eq. (2.15-2.17) nella 2.1 e 2.2 e nella 2.7, 1.11 e 1.15. Queste equazioni vengono risolte mantenendo il più basso ordine in r .

l'eq.(2.1) è identicamente soddisfatta.

Dall'equazione (2.2) si ha:

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} + V_0 \frac{\partial V_0}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial z} + \nu(4V_2 + \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2}) - g. \quad (2.18)$$

Siccome studiamo una teoria ad onde lunghe possiamo supporre che $\frac{\partial h}{\partial z}$ è al più dello stesso ordine di r e quindi dalla (2.7) otteniamo un'espressione per p_0 :

$$\frac{p_0}{\rho} + \nu \frac{\partial V_0}{\partial z} = \frac{\gamma}{\rho} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (2.19)$$

Allo stesso modo dalla (1.11) otteniamo un'espressione per V_2 :

$$-3 \frac{\partial V_0}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} + 2V_2 h - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} = 0. \quad (2.20)$$

Sostituendo i valori trovati per V_2 e P_0 nella (2.16) si ha:

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} = -V_0 \frac{\partial V_0}{\partial z} - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + 3\nu \frac{\partial}{\partial z} \left(h^2 \frac{\partial V_0}{\partial z} \right) - g. \quad (2.21)$$

Dalla condizione di impermeabilità (1.15) si ha:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -V_0 \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial V_0}{\partial z} h = -\frac{1}{2h} \frac{\partial}{\partial z} (h^2 V_0). \quad (2.22)$$

La formula per le curvature principali di un corpo di rivoluzione è nota (do Carmo [2]) quindi possiamo finalmente scrivere il nostro sistema di equazione PDE (*partial differenetial equations*) 1D:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} = -V \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 3\nu \left(\frac{2 \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z}}{h} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \\ p = \gamma \left[\frac{1}{h(1 + \frac{\partial h^2}{\partial z^2})} - \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}}{(1 + \frac{\partial h^2}{\partial z^2})} \right] \\ \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{2h} \frac{\partial}{\partial z} (h^2 V) \end{cases} \quad (2.23)$$

dove il pedice “0” nella velocità V_0 è stato ommesso per semplicità e il contributo della tensione superficiale nella pressione viene indicato con p .

Il sistema di equazioni (2.23) viene risolto imponendo le seguenti condizioni al contorno:

$$h(\pm L(t), t) = h_0 \cdot f_{1,2}(t), \quad (2.24)$$

$$V(\pm L(t), t) = V_0 \cdot g_{1,2}(t). \quad (2.25)$$

Dove $f_{1,2}$ e $g_{1,2}$ dipendono dal modello studiato e verranno quindi esplicitate in seguito.

2.3 Adimensionalizzazione

Adimensionalizziamo le equazioni e le condizioni al contorno con i parametri più rappresentativi di questo modello che sono la lunghezza h_0 (altezza della colonna di fluido nel caso imperturbato) ed il tempo caratteristico $\tau_c = \sqrt{\frac{\rho h_0^3}{\gamma}}$:

$$L = h_0 L^*; \quad V = \frac{h_0}{\tau_c} V^*; \quad h = h_0 h^*; \quad t = \tau_c t^*; \quad z = h_0 z^*$$

Riscrivendo le equazioni in forma adimensionale si ha:

$$\begin{cases} \frac{\partial V^*}{\partial t^*} = -V^* \frac{\partial V^*}{\partial z^*} - \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + 3Oh \left(\frac{2 \frac{\partial h^*}{\partial z^*} \frac{\partial V^*}{\partial z^*}}{h^*} + \frac{\partial^2 V^*}{\partial z^{*2}} \right) \\ p^* = \left[\frac{1}{h^*(1 + \frac{\partial h^{*2}}{\partial z^{*2}})} - \frac{\frac{\partial^2 h^*}{\partial z^{*2}}}{(1 + \frac{\partial h^{*2}}{\partial z^{*2}})} \right] \\ \frac{\partial h^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{2h^*} \frac{\partial}{\partial z^*} (h^{*2} V^*) \end{cases} \quad (2.26)$$

Anche in questo caso come nel capitolo 1.1 il termine gravitazionale è stato trascurato essendo Bo infinitesimo.

Le condizioni al contorno sono:

$$h^*(\pm L^*(t^*), t^*) = f_{1,2}(t^*), \quad (2.27)$$

$$V^*(\pm L^*(t^*), t^*) = \sqrt{We} \cdot f_{3,4}(t^*). \quad (2.28)$$

e la seguente condizione iniziale:

$$h^*(z^*, 0) = g_1(z) \quad (2.29)$$

$$V^*(z^*, 0) = g_2(z) \quad (2.30)$$

Dall'analisi adimensionale ricaviamo due numeri, *Ohnesorge* (Oh) e *Weber* (We) i quali da soli caratterizzano il sistema fisico.

$$Oh = \frac{\text{forze viscosse}}{\sqrt{\text{inerzia} \cdot \text{tensione superficiale}}} \implies Oh = \frac{\nu}{\sqrt{\frac{\gamma h_0}{\rho}}}, \quad (2.31)$$

$$We = \frac{\text{inerzia}}{\text{tensione superficiale}} \implies We = \frac{\rho h_0 V_0^2}{\gamma}. \quad (2.32)$$

Si noti come al crescere di Oh la viscosità del fluido in esame cresce.

Da adesso in avanti faremo sempre riferimento ai parametri adimensionali. Per semplicità quindi, gli apici nelle equazioni adimensionali verranno omissi.

2.4 Procedura numerica

In tutti i modelli che andremo a studiare, che si differenziano tra loro esclusivamente per le condizioni al contorno, la strategia per la risoluzione numerica del sistema di equazioni PDE (2.26) è la seguente:

Si definisce una griglia, che può essere “staggered” o no a seconda del modello in esame, distribuita in maniera uniforme lungo tutto il getto e si scrivono le derivate spaziali alle differenze finite facendo riferimento a questa griglia.

Le derivate parziali rispetto al tempo delle variabili V e h diventano così in ogni nodo derivate temporali ordinarie.

In questo modo le due equazioni PDE si riducono ad un sistema di $2N$ equazioni ODE, dove N è il numero di punti della griglia spaziale.

I termini diffusivi sono risolti alle differenze finite centrate, mentre per i termini convettivi viene usato uno schema upwind.

Questo schema viene risolto in MATLAB usando un particolare ODE solver presente nella libreria di MATLAB. La scelta del solutore ODE è diversa da modello a modello, ma comunque in ogni caso è fatta in funzione della sua accuratezza e dei tempi di calcolo necessari.

Capitolo 3

Modelli

3.1 Cilindro infinito

Il primo modello ad essere studiato è un cilindro fluido di lunghezza infinita al quale viene applicata una perturbazione spaziale.

3.2 Instabilità temporale

La colonna di fluido ha velocità iniziale pari a zero lungo tutto il dominio. Per “innescare” l’instabilità all’istante di tempo $t = 0$ viene imposta una perturbazione spaziale lungo tutto il dominio del cilindro.

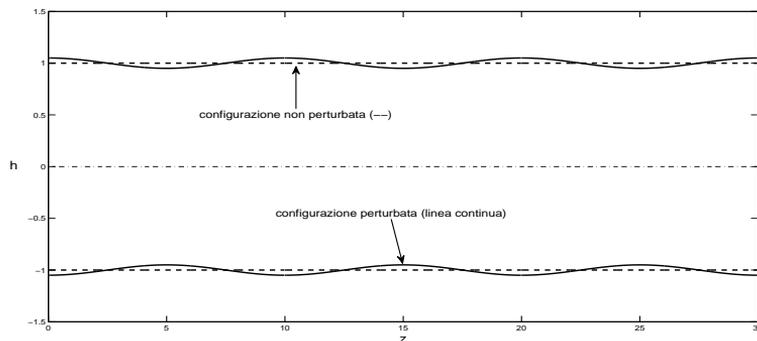


Figura 3.1: Configurazione al tempo $t = 0$

La perturbazione altro non è che la condizione iniziale (2.29) ed ha la seguente legge sinusoidale per h :

$$h(z, 0) = 1 + \epsilon \cos(2\pi f \cdot z), \quad (3.1)$$

mentre

$$V(z, 0) = 0, \quad (3.2)$$

dove f ed ϵ sono rispettivamente la frequenza e l'ampiezza della perturbazione.

Il sistema (2.26) viene risolto con queste condizioni fino al raggiungimento della singolarità che da un punto di vista fisico altro non è che l'istante in cui si forma la prima goccia, il cosiddetto pinch-off.

3.2.1 Validazione del codice

Per validare il codice confronto i risultati ottenuti da Furlani *et al.* [3] con i miei.

Primo caso $Oh = \frac{1}{200}$, $f = 0.7 \cdot 2\pi$, $\epsilon = 5\%$, numero di punti della griglia 135:

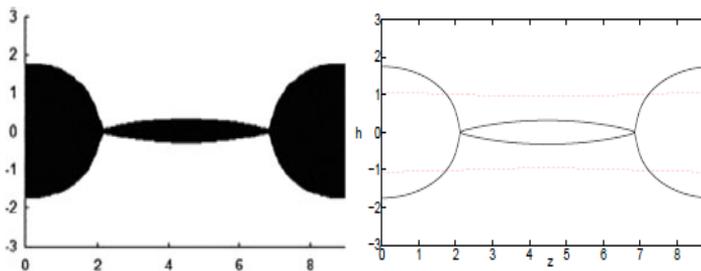


Figura 3.2: Confronto tra il risultato ottenuto da Furlani (in nero) ed il mio per $Oh = \frac{1}{200}$.

secondo caso $Oh = 10$, $f = 0.7 \cdot 2\pi$, $\epsilon = 5\%$, numero di punti della griglia 135:

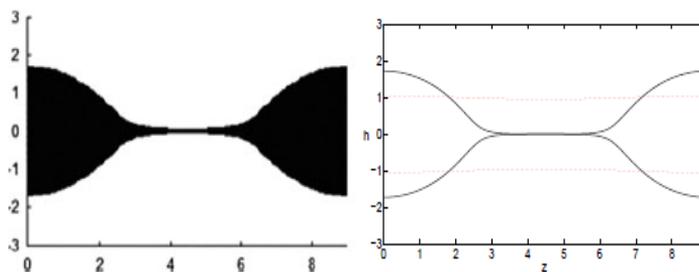


Figura 3.3: Confronto tra il risultato ottenuto da Furlani (in nero) ed il mio per $Oh = 10$.

In tabella si riportano i valori del tempo di pinchoff nel mio caso, in quello di Furlani e in quello ottenuto da Ashgriz and Mashayek [4] i quali usano un metodo alle differenze finite per studiare l'instabilità di un cilindro di liquido assialsimmetrico newtoniano e incomprimibile.

$Re \downarrow, 2\pi \cdot f \rightarrow$	0.2	0.45	0.7	0.9
200	25.2	12.9	10.0	14.5
	25.0	12.6	9.7	11.0
	24.9	12.7	9.8	11.0
10	26.7	14.3	11.6	14.8
	27.9	14.3	11.4	14.4
	27.7	14.4	11.5	14.4
0.1	230.6	243.2	311.9	628.2
	227	238	305	634
	233.7	245.6	312.3	626.0

Tabella 3.1: In rosso sono riportati i risultati ottenuti risolvendo da Ashgriz *et al.* le equazioni 2D, in rosa sono riportati i risultati ottenuti con le equazioni 1D risolte da Furlani ed in nero risolte con il mio codice.

3.2.2 Confronto con la teoria Rayleigh-Plateau

Come visto nella sezione 1.2 la teoria di Rayleigh-Plateau fa riferimento ad un cilindro fluido infinito, non viscoso.

La teoria di Rayleigh-Plateau ci dice che applicando una perturbazione di tipo sinusoidale a tutto il dominio, all'istante di tempo $t = 0$, l'instabilità fluidodinamica si verifica se e solo la lunghezza d'onda della perturbazione λ è maggiore di 2π .

Ripetiamo l'analisi di stabilità anche per il nostro modello.

Supponiamo che il cilindro di raggio unitario e velocità nulla riceva una perturbazione sinusoidale con una lunghezza d'onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ ed una frequenza $f = \frac{\omega}{2\pi}$:

$$h(z, t) = 1 + \varepsilon e^{i(kz - \omega t)} \quad (3.3)$$

con ε piccolo, $\omega \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{R}$.

Inseriamo la (3.3) nella (2.26) e otteniamo:

$$V = V_0 \varepsilon e^{i(kz - \omega t)} \quad (3.4)$$

$$V_0 \omega = -k + k^3 - (6Oh \cdot \omega k)i \quad (3.5)$$

dove $V_0 = \frac{2\omega}{k}$.

Risolvendo rispetto ad ω :

$$2\omega^2 + (6Ohk^2i)\omega + k^2 - k^4 = 0 \quad (3.6)$$

La perturbazione è destabilizzante $\iff \Im(\omega) > 0$ e questo avviene per $0 < k < 1$ indipendentemente dal valore di Oh ; ciò significa che il punto di cut-off si ha per $k = 1 \rightarrow \lambda = 2\pi$ in perfetto accordo con la teoria di Rayleigh-Plateau.

L' $(\Im(\omega))_{opt}$ si ha quando :

$$k = k_{opt} = \sqrt{\frac{1}{2 + 3\sqrt{2}Oh}} \quad (3.7)$$

E' importante notare che Il valore di k_{opt} coincide con quello trovato da Chandrasekhar (Chandrasekhar [5]) nella teoria da lui proposta.

Confrontiamo la curva di instabilità ottenuta dalla teoria di Rayleigh-Plateau e i risultato ottenuto dall'analisi di stabilità dello sviluppo asintotico sviluppato da Eggers e Dupont ($Oh = 0$ ovvero

il caso senza viscosità) come si vede in figura 3.4 c'è un buon accordo tra le due diverse teorie:

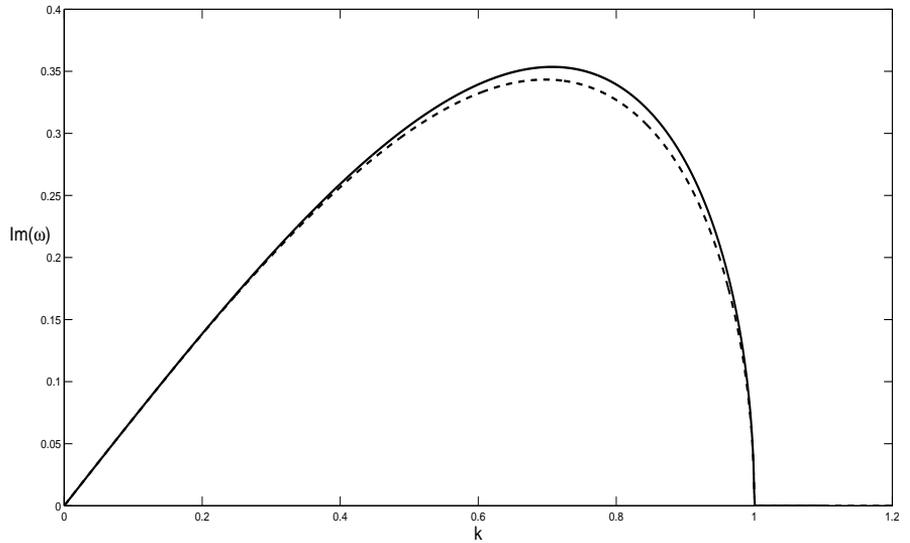


Figura 3.4: Confronto tra teoria Rayleigh-Plateau (linea tratteggiata) e quella di Eggers e Dupont (linea continua)

3.2.3 Risultati

Di seguito si riportano i valori di $\Im(\omega)$ al variare di k per due casi molto diversi tra loro.

I risultati ottenuti sono in buon accordo con l'analisi di stabilità fatta sul nostro modello.

Il primo caso fa riferimento ad un fluido poco viscoso $Oh = \frac{1}{200}$, quindi quello che ci aspettiamo è un'andamento simile a quello ottenuto nella teoria di Rayleigh-Plateau (sezione 1.1),

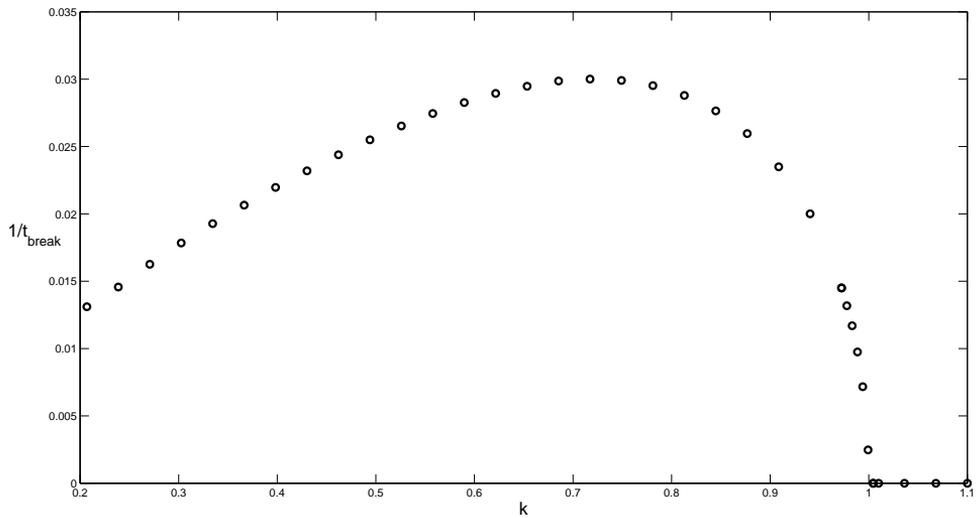


Figura 3.5: Inverso del t_{breakup} per vari valori di k quando $Oh = \frac{1}{200}$

Si noti come il cutoff si ha per $k = 1$ ed il k_{opt} si ha per $k = 0.71$ l'analisi di stabilità fatta su queste equazioni lo da a $k = 0.7$

Il secondo caso invece considera un fluido 2000 volte più viscoso, $Oh = 10$, in questo caso si ha una crescita più lenta dell'instabilità come si può riscontrare facendo il raffronto tra le fig.7 e 8:

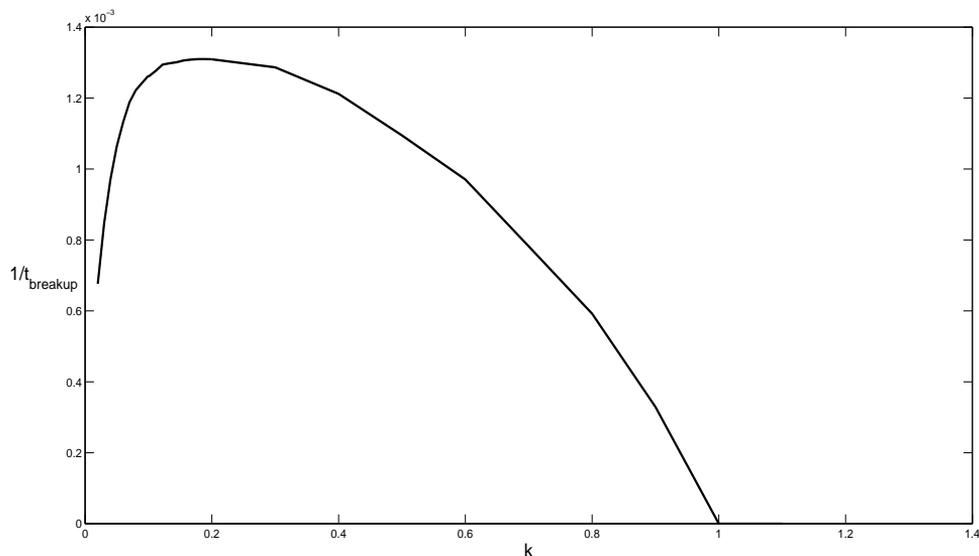


Figura 3.6: Inverso del $t_{breakup}$ per vari valori di k quando $Oh = 10$

Si ha sempre il cut-off per $k = 1$ confermando la non-dipendenza da Oh . Il k_{opt} si ha per $k = 0.18$ ed anche in questo caso l'analisi di stabilità con le sue semplificazioni prevede abbastanza bene il valore ponendolo a $k = 0.15$.

Si noti che in fig. 3.5 ed in fig. 3.6 sulle ordinate compare $\frac{1}{t_{breakup}}$, questo è dovuto al fatto che quando risolvo direttamente le equazioni non esiste una vera e propria ω in risposta alla mia perturbazione, ma ho ritenuto lecito affermare che la perturbazione con la frequenza più destabilizzante è anche quella che porta alla rottura del getto nel tempo minore.

3.3 Contrazione di un filamento liquido

In questo modello abbiamo un filamento di fluido viscoso immerso in un ambiente passivo (il gas che lo circonda non interagisce in alcun modo con il filamento) che evolve sotto l'effetto della tensione superficiale.

La tensione superficiale agisce in modo da ridurre al minimo la superficie totale del corpo fluido. Da questa osservazione si potrebbe dedurre che dato un corpo fluido di volume V la sua condizione finale sarà una singola sfera di identico volume indipendentemente dalle proprietà del fluido e dalla sua forma iniziale. Questo perchè dato un volume V la minima superficie che lo racchiude è la sfera. In realtà non è sempre così: la configurazione finale potrebbe essere l'insieme di più sfere.

Perchè? la tensione superficiale agisce velocemente, e a volte risulta più rapido ridurre la superficie "rompendola" in più parti piuttosto che raggrupparla fino ad ottenere un'unica grossa sfera. Si noti che ridurre la superficie localmente anziché globalmente richiede un minor spostamento di massa.

La forma iniziale del filamento può essere scelta in modo del tutto arbitrario. Sicuramente la scelta più intuitiva, che è anche la scelta fatta da Notz *et al.* [6], è quella di un cilindro di raggio h_0 e lunghezza $2(L_0 - h_0)$ chiuso alle due estremità da due semi-sfere anch'esse di raggio h_0 (vedi figura 3.7). La velocità iniziale è nulla lungo tutto l'asse z . È bene notare che questa configurazione iniziale presenta una discontinuità del valore di p nel punto di giuntura tra cilindro e sfera, infatti p è costante ed uguale a 1 per $0 < z < L_0 - h_0$ (vedi eq.2.26) mentre è costante ed uguale a 2 per $L_0 - h_0 < z < L_0$, pertanto questa condizione iniziale è poco sensata da un punto di vista strettamente fisico.

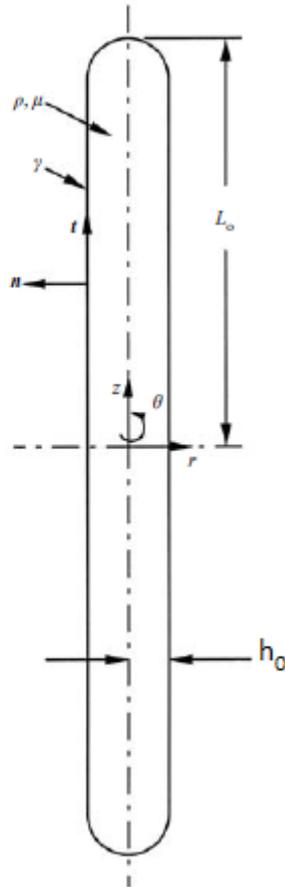


Figura 3.7: Forma del filamento al tempo $t = 0$

Anche in questo modello tutte le grandezze sono adimensionalizzate seguendo il procedimento illustrato nella sezione 2.3.

Sfruttando la doppia simmetria di questa configurazione le equazioni 2.26 sono risolte con le condizioni al contorno appropriate solo per il tratto di curva evidenziato in rosso nella figura 3.8:

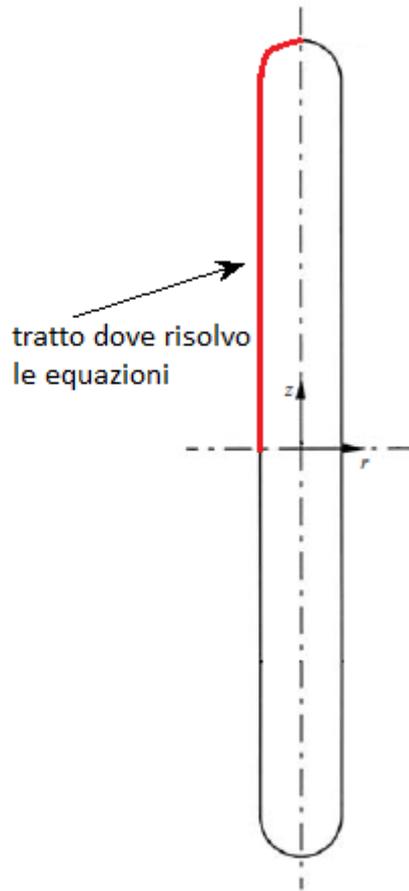


Figura 3.8: In rosso il tratto di curva dove sono risolte le equazioni del moto tutto il resto segue per simmetria

Le condizioni al contorno sono:

$$V(0, t) = 0, \forall t > 0,$$

che esclude la presenza di pozzi o sorgenti nell'origine. Inoltre si ha:

$$\frac{\partial h}{\partial t}(0, t) = 0, \forall t > 0.$$

Questa condizione al contorno è data per simmetria.

Infine, sempre da considerazioni puramente geometriche l'altezza del cilindro e la velocità del fluido al suo interno verificano rispettivamente le seguenti condizioni; $h(z, t) = h(-z, t)$ e $V(z, t) = -V(-z, t)$.

3.3.1 Validazione

In figura 11 e 12 si comparano i miei risultati con quelli ottenuti da Notz *et al.* [6] usando le stesse condizioni iniziali e lo stesso modello matematico.

In questo primo caso comparativo (fig.11) Oh viene fissato al valore di 10^{-2} , l'istante catturato nella figura è quello del pinch-off:

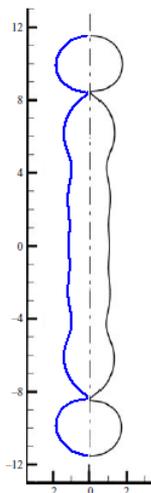


Figura 3.9: In blu il mio risultato ed in nero quello ottenuto da Notz *et al.* quando $Oh = 10^{-2}$

Nel secondo caso comparativo $Oh = 1$: (cf. fig 16)

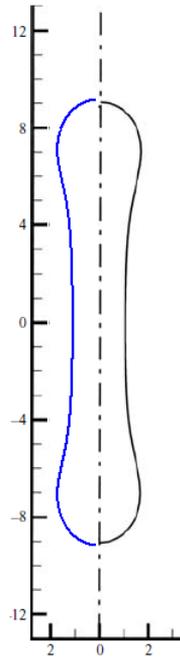


Figura 3.10: In blu il mio risultato ed in nero quello ottenuto da Notz *et al.* quando $Oh = 1$ all'istante di tempo $t = 8$

In entrambi i casi le soluzioni sono in ottimo accordo.

3.3.2 Risultati

In questo paragrafo analizzeremo l'influenza della viscosità nel comportamento del filamento fluido.

Se la viscosità è predominante ($Oh = 1$) il sistema è stabile, non si ha quindi la rottura del filamento, che evolve fino alla configurazione finale in modo completamente smorzato.

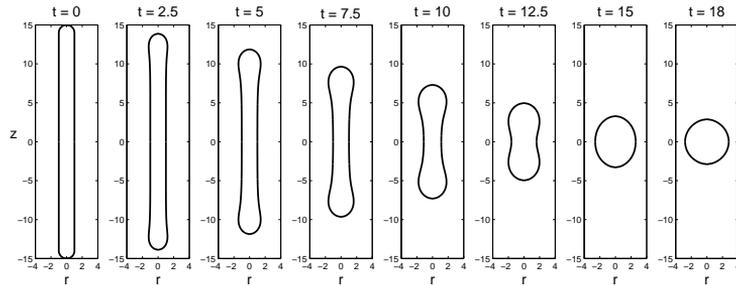


Figura 3.11: Diversi istanti di tempo per $Oh = 1$

Diminuendo la viscosità di un fattore 10 e quindi ponendo $Oh = 0.1$ il sistema rimane stabile, ma la posizione finale si ottiene dopo una serie di oscillazioni intorno al punto di equilibrio:

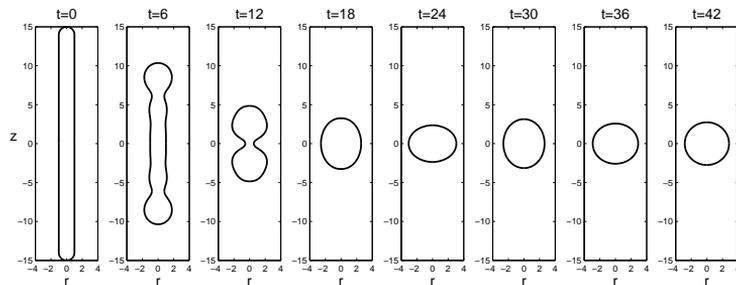


Figura 3.12: Diversi istanti di tempo per $Oh = 0.1$

Scendendo ancora di un fattore 10 e quindi ponendo $Oh = 10^{-2}$ si ha la rottura del filamento:

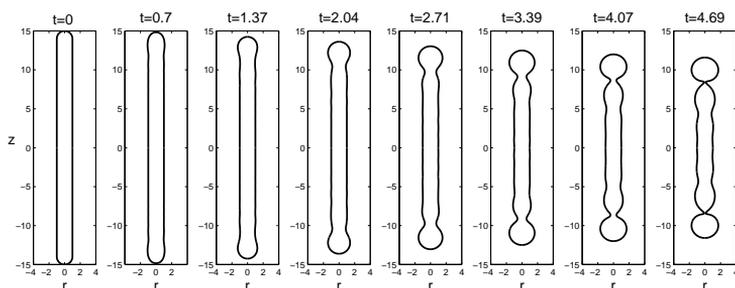


Figura 3.13: Diversi istanti di tempo per $Oh = 10^{-2}$

In realtà tra $10^{-1} < Oh < 10^{-2}$ c'è una zona di transizione, la quale è instabile, ma porta alla rottura della goccia in un secondo momento.

In figura 3.14 se ne riporta un esempio per $Oh = 2.05 \cdot 10^{-2}$.

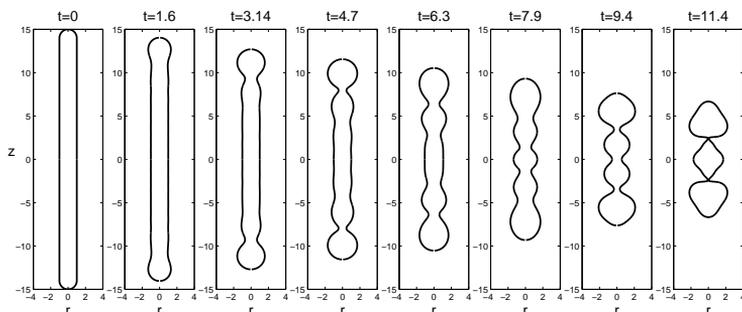


Figura 3.14: Diversi istanti di tempo per $Oh = 2.05 \cdot 10^{-2}$

Come si vede chiaramente dalla figura 3.14 il filamento tende a comportarsi in maniera simile al caso in figura 3.13 fino a $t = 4.7$ dove la goccia sembra ormai prossima alla sua formazione, a questo

punto, però, il filamento si riprende e continua la sua contrazione fino alla rottura che avviene per $t = 11.4$.

Questo fenomeno di “recupero” nel nostro modello può essere spiegato solo dal ruolo giocato dalla pressione p .

Ricordo che con p si intende solo la pressione esercitata all’interfaccia dalla tensione superficiale.

La pressione p è composta da due termini (vedi eq. 2.26) il primo è destabilizzante mentre il secondo ha l’effetto contrario. È questo continuo confronto tra i due termini che porta alla rottura o meno del filamento di liquido.

Questa particolare configurazione la si ottiene anche nel modello 2D proposto da Notz *et al.* [6] ma per un valore di Oh che si differenzia di un fattore 2 con quello della teoria 1D.

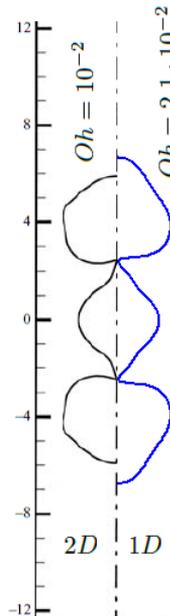


Figura 3.15: In blu il mio risultato ed in nero quello ottenuto da Notz *et al.* nella zona di transizione per due diversi valori di Oh

Si noti che nel caso in cui $Oh = 10^{-2}$ nel modello 1D abbia-

mo l'immediata rottura del getto invece nel modello 2D la rottura avviene in un secondo momento.

Questa discordanza tra i due modelli secondo Notz *et al.* è dovuta alla presenza di vortici nella regione vicina al pinchoff generati dalla curvatura della superficie libera e che vengono poi dissipati in tempi più o meno lunghi sotto l'effetto smorzante della viscosità del fluido in esame.

3.4 Getto libero

Eccoci arrivati al modello centrale di questo lavoro di tesi. Studieremo, come fatto in precedenza da Hoeve *et al* [7], l'evoluzione spazio-temporale di un getto di liquido, generalmente acqua, che uscendo da un condotto dove esso è confinato si ritrova circondato da un gas passivo (aria) ed inizia ad interagire tramite la sua tensione superficiale dando luogo alla formazione di gocce primarie e secondarie, dette satelliti.

Uno degli obiettivi di questo capitolo è mostrare come questa teoria 1D riesca a descrivere in maniera molto soddisfacente i risultati ottenuti per via sperimentale.

La geometria del nostro sistema è schematicamente illustrata in figura 3.16.

La nostra condizione iniziale come mostrato in figura è $h(z, 0) = \sqrt{h_0^2 - z^2}$ dove h_0 è il raggio del condotto nel punto di uscita adimensionalizzato e quindi anche in questo caso uguale a 1.

La velocità iniziale del getto è costante lungo tutta la sezione e pari a $V_0 = \sqrt{We}$.

Nella simulazione numerica viene applicata una modulazione dell'altezza del condotto di uscita per stimolare la formazione

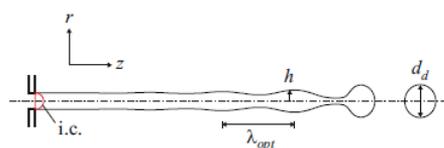


Figura 3.16: La condizione iniziale è indicata con linea continua rossa (figura di proprietà di Hoeve *et. al*)

di gocce primarie e secondarie, dette satelliti.

della goccia simulando le fluttuazioni termiche presenti in un caso reale.

Quindi la perturbazione sarà:

$$h(0, t) = h_0 + \varepsilon \sin(2\pi ft) \quad (3.8)$$

dove f è la frequenza ed ε l'ampiezza della perturbazione.

Per un motivo strettamente fisico si è deciso di perturbare la velocità del getto in ingresso $V(0, t)$ in modo tale da mantenere costante la portata di fluido \dot{m} :

$$V(0, t) = \frac{h_0^2 V_0}{h(0, t)^2} \quad (3.9)$$

3.4.1 Convergenza della soluzione

La soluzione numerica arriva a convergenza all'aumentare dei numeri di punti della griglia, come mostrato in figura 3.17 e 3.18:

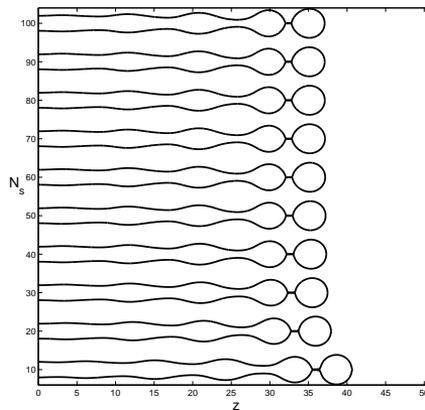


Figura 3.17: Soluzione del getto nel punto di rottura all'aumentare del numero di punti specifico N_s

N_s è il numero specifico di punti, cioè il numero di punti per unità di lunghezza.

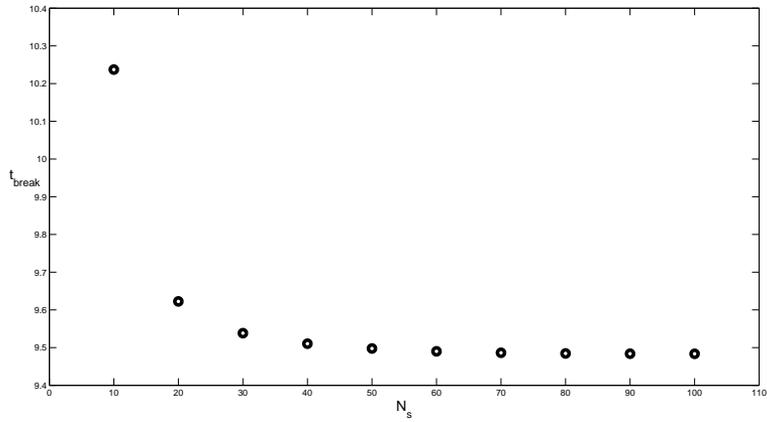


Figura 3.18: Tempo in cui avviene la formazione della prima goccia all'aumentare del numero di punti specifico N_s

Un'altra importante considerazione da fare è che al variare della forma iniziale del getto la soluzione finale rimane unica.

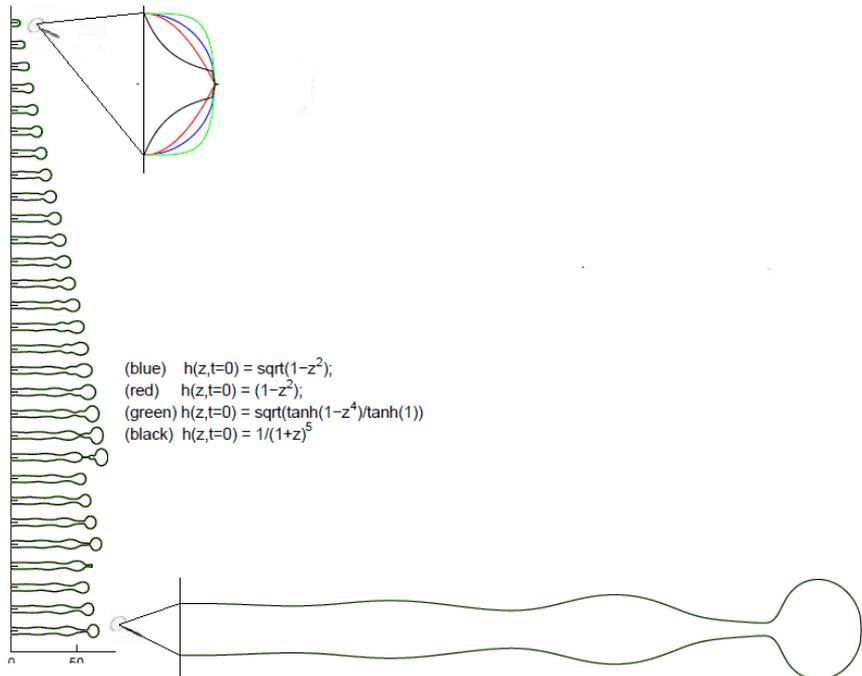


Figura 3.19: Nonostante le differenti condizioni iniziali la soluzione finale è identica per tutte le configurazioni

La soluzione finale è esattamente la stessa per tutte le diverse condizioni iniziali.

3.4.2 Risultati

Prima di iniziare con la trattazione vera e propria ritengo interessante mostrare l'evoluzione del getto se ipoteticamente si studiasse un fluido con tensione superficiale uguale a zero:

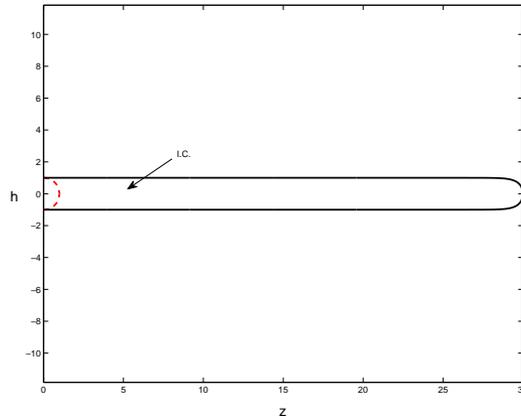


Figura 3.20: In figura è mostrato l'andamento del getto in assenza di tensione superficiale

In figura 3.20 si vede come in assenza della tensione superficiale e di una qualche perturbazione la soluzione è una semplice traslazione della condizione iniziale: il sistema è stabile.

Anche applicando per assurdo una perturbazione con ampiezza pari al 50% di h_0 comunque non si arriva mai a rottura, anzi il sistema recupera la sua condizione imperturbata:

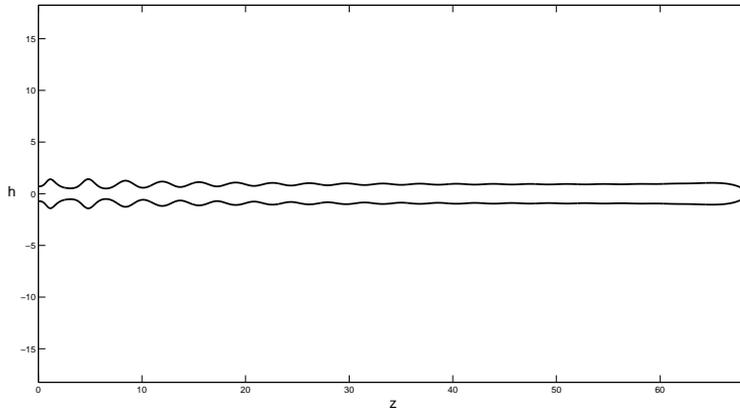


Figura 3.21: In figura è mostrato l'andamento del getto in assenza di tensione superficiale con una perturbazione delle condizioni iniziali pari al 50% di h_0

Risulta chiaro a questo punto il fondamentale ruolo giocato dalla tensione superficiale in questo tipo di instabilità.

In figura 3.22 è mostrato un possibile risultato nell'istante di formazione della goccia in presenza della tensione superficiale (nella fig. 3.22 $\gamma = 0.073 \frac{N}{m}$):

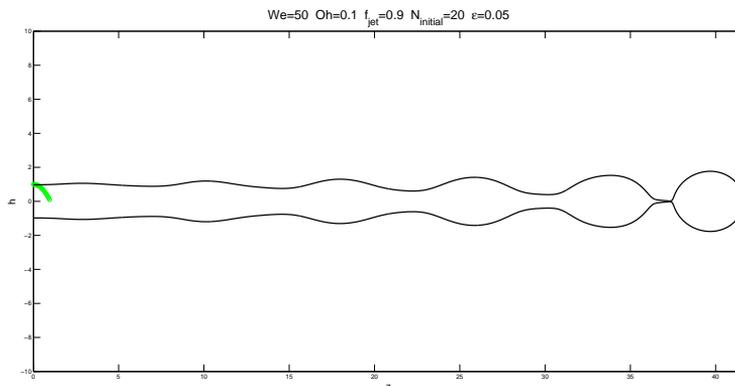


Figura 3.22: Istante in cui avviene la formazione della goccia in presenza della tensione superficiale

3.4.3 Confronto con i dati sperimentali:

Il confronto viene fatto con i dati sperimentali ottenuti da Hoeve *et al* [7] i quali nel loro esperimento hanno utilizzato una soluzione acquosa con le seguenti proprietà fisiche: $\rho = 1098 \frac{kg}{m^3}$, $\mu = 3.65 mPa \cdot s$ e $\gamma = 67.9 \cdot 10^{-3} \frac{N}{m}$.

Il getto d'acqua nel momento della sua fuoriuscita dal “nozzle chip” ha una altezza $h_0^* = 18.5 \mu m$ ed una velocità $V_0^* = 5.4 \frac{m}{s}$ calcolata dalla portata volumetrica Q la quale a livello sperimentale è facilmente imponibile. Adimensionalizzando le equazioni con questi parametri otteniamo $We \approx 8.7$ e $Oh \approx 0.1$.

Nella risoluzione numerica vengono inseriti questi valori adimensionali senza alcun adattamento dei parametri utilizzati.

L'ampiezza della perturbazione ε è piccola, $\varepsilon = 0.005$, la frequenza f è scelta in modo tale da avere la lunghezza d'onda ottimale per il breakup $\rightarrow f = \frac{V_0}{\lambda_{opt}}$

Dove il λ_{opt} è noto dalla teoria di Rayleigh-Plateau, $f = \frac{\sqrt{8.7}}{\frac{2\pi}{0.69}} = 0.33$.

La risoluzione numerica è effettuata solo per il getto di liquido, la goccia una volta che si stacca da esso non viene più studiata.

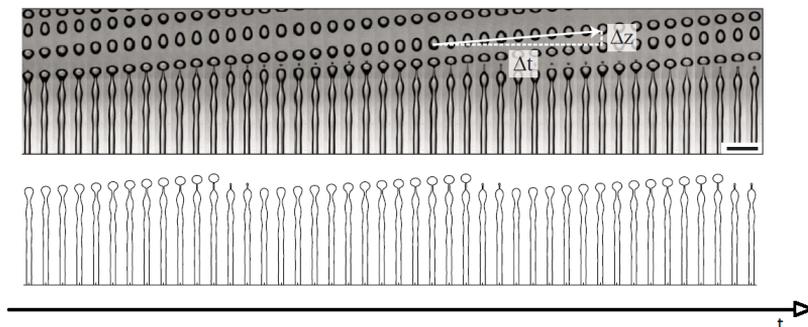


Figura 3.23: Confronto tra i risultati ottenuti da Hoeve *et al.* con la soluzione numerica con i parametri sopra citati. I risultati indicano che la teoria 1D pronostica in maniera soddisfacente la formazione della goccia. La barra presente nel pannello di superiore indica la distanza di $200\mu m$.

In entrambi i pannelli le figure si susseguono ad intervalli di tempo regolari e pari a $\Delta t = 2\mu s$.

Come anticipato si osservano due differenti tipi di gocce una detta primaria con un diametro quasi doppio al diametro del getto ed una molto più piccola detta goccia satellite. La goccia satellite si forma tra la goccia primaria ed il sottile getto d'acqua.

3.4.4 Interazione tra la perturbazione e la punta del getto:

Si riportano nelle figure 3.24, 3.25 e 3.26 il valore del *tempo di breakup*, $t_{breakup}$, cioè il tempo a cui avviene la formazione della prima goccia, in funzione della frequenza della perturbazione per i seguenti valori dell'ampiezza della perturbazione ε : 0.1, 0.05 e 0.01

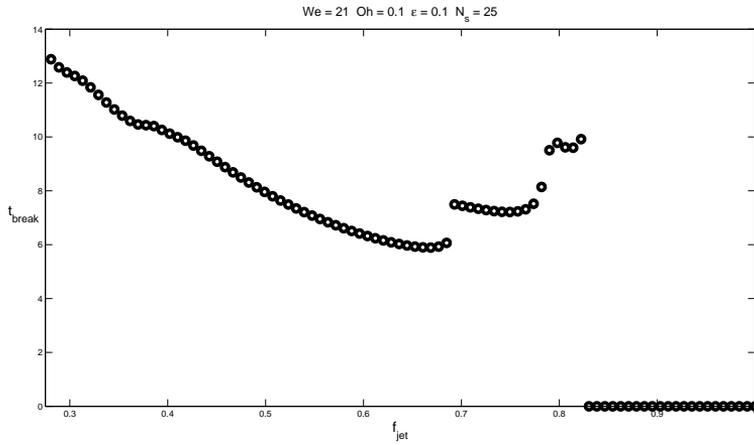


Figura 3.24: Tempo di breakup in funzione della frequenza della perturbazione per $\epsilon = 0.1$

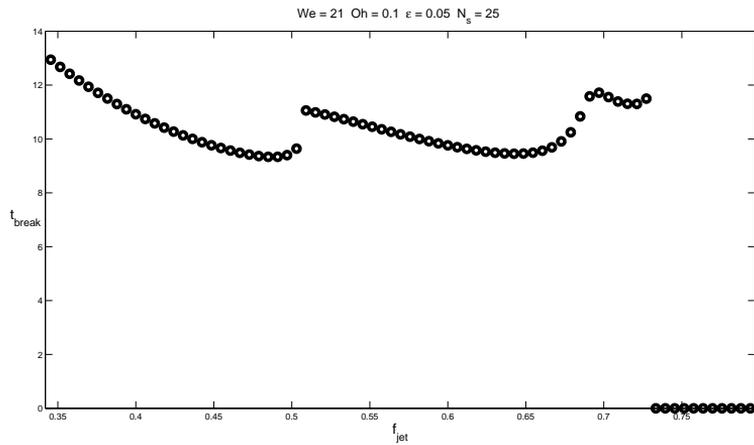


Figura 3.25: Tempo di breakup in funzione della frequenza della perturbazione per $\epsilon = 0.05$

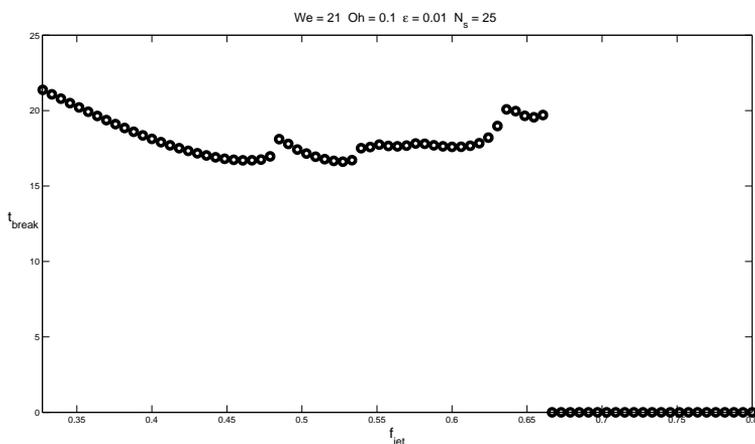


Figura 3.26: Tempo di breakup in funzione della frequenza della perturbazione per $\varepsilon = 0.01$

La soluzione che si ottiene nel caso di getto libero è senz'altro dipendente dalla perturbazione scelta. Anche in questo modello esiste il k di *cut-off* che risulta essere dipendente dall'ampiezza della perturbazione ε .

Si osserva, inoltre, una discontinuità del *tempo di breakup*, $t_{breakup}$, al variare della frequenza della perturbazione f .

Questo fenomeno è dovuto all'interazione tra la perturbazione che viaggia lungo il getto e la punta di quest'ultimo, infatti, come si osserva in fig. 3.27 la lunghezza d'onda tra la perturbazione e l'estremità del getto tende a diminuire al crescere della frequenza e sapendo che esiste un λ tale che la superficie del getto improvvisamente diventa stabile, la perturbazione si “rialza” e la goccia si forma in un secondo momento.

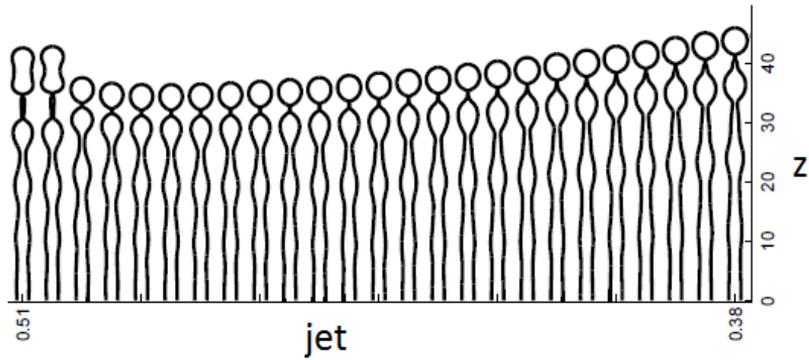


Figura 3.27: La perturbazione e la fine del getto interagiscono tra loro

Si osserva un fenomeno del tutto analogo se si mantiene la frequenza del getto f costante e si modifica l'ampiezza ε :

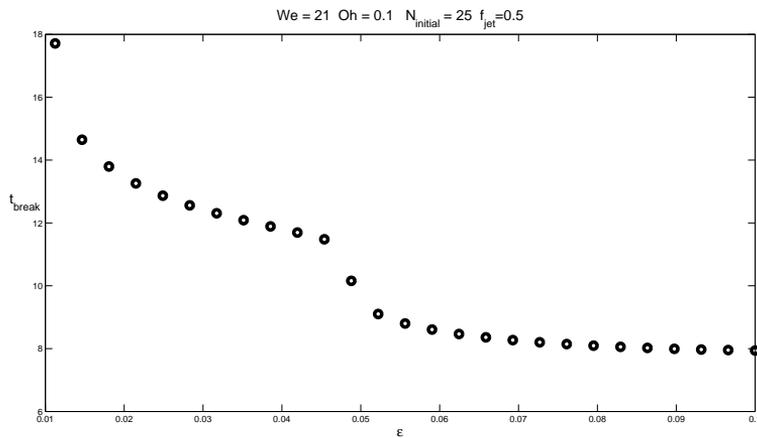


Figura 3.28: Tempo di breakup in funzione dell'ampiezza della perturbazione per $f = 0.5$

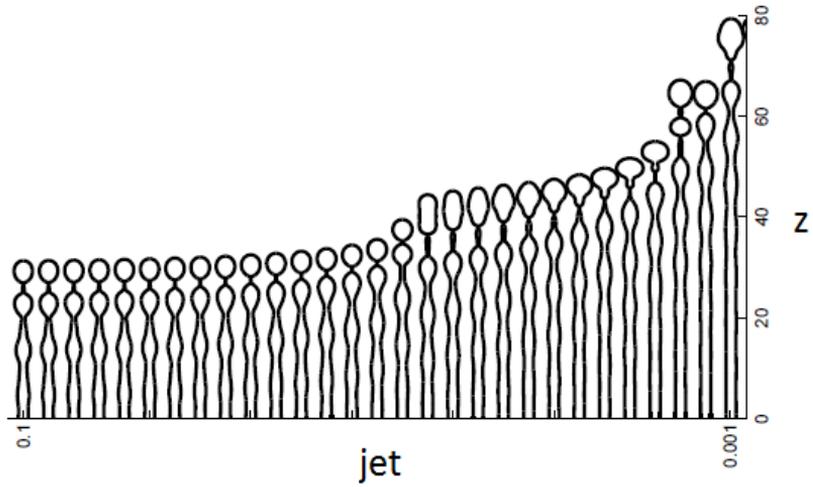


Figura 3.29: La perturbazione e la fine del getto interagiscono tra loro

Anche in questo caso la perturbazione interagisce con la punta del getto creando le discontinuità che sono visibili in figura 3.28.

Capitolo 4

Conclusioni

Abbiamo sviluppato un modello numerico flessibile in grado di studiare l'instabilità fluidodinamica di Rayleigh-Plateau nel caso viscoso per diverse configurazioni e differenti fenomeni fisici e capace di predire in maniera accurata l'evoluzione nel tempo e nello spazio del moto del fluido sotto l'ipotesi di simmetria assiale. Il modello si basa sull'ipotesi che il corpo liquido che si studia è sottile ed è stato risolto usando la tecnica numerica MOL (method of lines). Abbiamo validato il modello sia confrontandolo con altri articoli che hanno precedentemente risolto a livello numerico il nostro problema sia confrontandolo direttamente con i dati sperimentali. Sicuramente una delle più grandi forze del nostro codice è la velocità con la quale esso risolve il moto del getto; il tempo di calcolo è nell'ordine dei secondi o al più dei minuti per ogni simulazione fatta. Risulta quindi particolarmente adatto ad un'analisi parametrica o allo studio per lo sviluppo e l'ottimizzazione di micro-iniettori.

Bibliografia

- [1] Eggers J, Dupont TF, Drop formation in a one-dimensional approximation of Navier-Stokes equation. *Journal of Fluid Mechanics* 1994; **262**:205.
- [2] Carmo, M. P. do 1976 *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall.
- [3] E. P. Furlani and M. S. Hanchak “Nonlinear analysis of the deformation and breakup of viscous microjets using the method of lines.” *Int. J. Numer. Methods Fluids* 2011; 65:563.
- [4] Ashgriz, N. Mashayek, F. Temporal analysis of capillary jet breakup. *Journal of Fluid Mechanics* 1995; 291:163.
- [5] Chandrasekhar, S. 1961 *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Chap. 12. Clarendon.
- [6] P. K. Notz, O. A. Basaran, Dynamics and breakup of contracting liquid filament. *Journal of Fluid Mechanics* 2004; 512:223
- [7] W. v. Hoeve, S. Gekle, J. H. Snoeijer, M. Versluis, M. P. Brenner, D. Lohse “Breakup of diminutive Raileigh jets”. *Physics of Fluids* 2010; 22:122003 ,
- [8] Ashley CT. Emerging applications for inkjet technology. *International Conference on Digital Printing Technologies*, San Diego, CA, vol. 2002; 48(9):1842:1848
- [9] EggersJ, Villermaux E. Physics of liquid jets. *Reports on progress in physics* 2008; 71:036601

- [10] Savart F. Mémoire sur la consitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires an mince paroi. *Annali di chimica* 1833; 53:337-386
- [11] Plateau JAF. Sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur. *Bruxelles Acad. Sci. Memoires* 1849 23:5.
- [12] Rayleigh L. On the capillary phenomena of jets. *Proceedings of the London Mathematical Society* 1879; 10:4-13.