

UNIVERSITÀ' DEGLI STUDI DI GENOVA
SCUOLA POLITECNICA

DIME

Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Energetica, Gestionale
e dei Trasporti



TESI DI LAUREA
IN
INGEGNERIA MECCANICA

**Condizioni effettive per il moto di un fluido
su superficie scabra: applicazione della teoria
dell'omogeneizzazione**

Relatore:

Chiar.^{mo} Prof. Ing. Alessandro Bottaro

Correlatore:

Dott.^{ssa} Sahrish Naqvi

Allievo:

Francesco Acquarone

15 Giugno 2021

*"Ogni cosa che puoi immaginare,
la natura l'ha già creata.,
- Albert Einstein*

Condizioni effettive per il moto di un fluido su superficie scabra: applicazione della teoria dell'omogeneizzazione

Sommario

Lo scopo di questo lavoro è fornire condizioni effettive, corrette fino al secondo ordine, per poter sostituire ad una parete scabra, una parete fittizia liscia attraverso la tecnica dell'omogeneizzazione multi-scala. L'idea è quella di sostituire le strutture rugose tramite le condizioni effettive. L'accuratezza delle condizioni effettive viene valutata per un flusso laminare su superfici scabre con strutture coniche e cilindriche isotrope, allineate secondo disposizioni uniformi e sfalsate. Sono stati considerati due casi macroscopici: il flusso del punto di ristagno di Hiemenz con parete scabra e un canale con gradino con superficie scabra solo dopo il gradino. Rispetto alla classica condizione di scorrimento di Navier, otteniamo un'ottima approssimazione già con le condizioni effettive sviluppate fino al secondo ordine.

Effective Conditions for the Flow Over a Rough Wall: Application of Homogenization Approach

Summary

This work aims to provide an high order effective conditions alternative to the full features by using multiscale homogenization approach. The idea is to replace the structure with effective conditions. The accuracy of the effective conditions is tested for a steady laminar flow over rough surfaces with isotropic conical and cylindrical structures aligned in uniform and staggered patterns. Two macroscopic cases are considered, Hiemenz stagnation point flow with rough wall and backward facing step with rough bottom after the step region. A good comparison of feature resolving case is found with the second order effective conditions as compare to the classical Naiver slip conditions.

Ringraziamenti

Ai miei genitori e ai miei nonni che mi hanno sempre supportato e spronato, in ogni singolo giorno della mia vita, conducendomi a questo incredibile traguardo.

A mia sorella che incredibilmente, dopo tutti questi anni, continua sopportarmi.

Ai miei compagni di corso e di studi, per i momenti indimenticabili che abbiamo condiviso insieme durante questo tortuoso percorso.

Ai miei amici, tutti, per essere sempre stati al mio fianco e per avermi sostenuto.

Indice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduzione | 1 |
| 2 | Analisi degli elementi finiti | 6 |
| 2.1 | Formulazione debole | 6 |
| 2.2 | Mesh | 8 |
| 2.3 | Software CFD | 9 |
| 3 | Formulazione Matematica | 10 |
| 3.1 | Condizioni effettive | 14 |
| 4 | Campo microscopico | 17 |
| 5 | Campo macroscopico | 24 |
| 5.1 | Flusso del punto di ristagno di Hiemenz | 24 |
| 5.2 | Canale con scalino | 27 |
| 6 | Conclusioni e lavori futuri | 29 |

Capitolo 1

Introduzione

Le superfici naturali e ingegnerizzate non sono mai lisce, ma irregolari, rugose a scale diverse, possibilmente porose, permeabili o super-idrofobiche [2]. In natura, tali imperfezioni conferiscono determinate caratteristiche, importanti e uniche. Da esse l'uomo si è sempre ispirato cercando di trarre spunto per la risoluzione di problematiche a cui la natura aveva già risolto.

Queste caratteristiche sono frutto di milioni di anni di evoluzione da parte dei vari organismi. Un'evoluzione costante e molto lenta che ha portato, tramite selezione naturale, allo sviluppo delle varie specie che le hanno rese più adatte all'habitat in cui vivono.

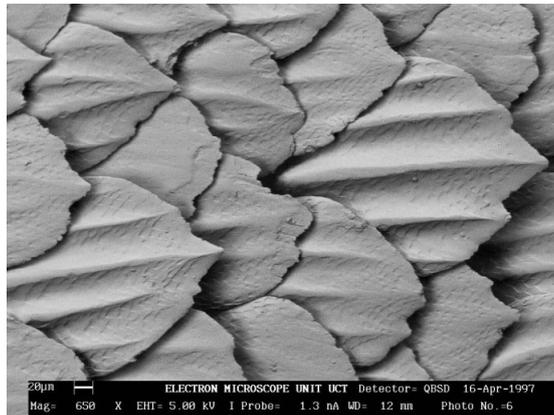


Figura 1.1: Foto al microscopio elettronico, effettuata dall'Università di Città del Capo, delle squame placoidi di uno squalo.

Un esempio che ha sempre suscitato interesse nel campo della fluidodinamica, è quello della pelle di squalo. Gli squali, infatti, sono ricoperti da piccole scaglie (come mostrato in Fig.1.1) simili a denti che

prendono il nome di *squame placoidi* [12] che ricoprono tutta la pelle dello squalo.

Uno studio sul design, la fabbricazione e il test idrodinamico di una membrana sintetica che presentava squame, riprodotte tramite stampa 3D [15], ha mostrato un incremento della velocità del 6.6% e una riduzione del costo energetico del trasporto pari al 5.9% rispetto ad un modello liscio. Eppure siamo portati a pensare che una superficie liscia sia più propensa alla riduzione dell'attrito fluidodinamico [5], in quanto una superficie liscia ostacola di meno l'avanzamento del fluido e non dà origine a perturbazioni di piccola taglia dietro ad elementi di rugosità. L'attrito fluidodinamico, inoltre, dipende dalla tipologia di moto del fluido, con bassi coefficienti di attrito per moti laminari e alti coefficienti per moti turbolenti. La tipologia di parete gioca un ruolo fondamentale nella transizione fra i due regimi di moto, come dimostrato da Fransson et al. [9] in un esperimento condotto in galleria del vento; l'esperimento condotto ha mostrato che certe superfici scabre erano in grado di mantenere il flusso laminare per più tempo rispetto ad una parete liscia, portando dunque vantaggi prestazionali.



Figura 1.2: A sinistra foto di una foglia di loto ([https : //pixabay.com/it/photos/foglia - di - loto - loto - foglia - verde - 842098/](https://pixabay.com/it/photos/foglia-di-loto-loto-foglia-verde-842098/)). A destra foto di una foglia di loto al microscopio ([https : //pugno.dicam.unitn.it/Pubblicazioni;talian/27 - LeScienze - Loto.pdf](https://pugno.dicam.unitn.it/Pubblicazioni;talian/27-LeScienze-Loto.pdf)).

Un altro esempio molto interessante riguarda le foglie della pianta del loto. Esse hanno una finitura superficiale che gli permette di godere di una caratteristica molto particolare. Tali foglie, sono ricoperte da uno strato rugoso composto da strutture cerose simili a bastoncini [15]. Quando le gocce d'acqua vengono a contatto con le foglie di loto, presentano un angolo di contatto di circa 160° [4] rendendo minima la regione di contatto fra la foglia e la goccia che, grazie al suo stesso peso, scivolerà sulla foglia stessa. Esse sono, infatti, super-idrofobiche. Questo conferisce alla foglia di loto

un'azione autopulente, permettendo alla goccia d'acqua di scorrere e di trasportare via lo sporco. Questo fenomeno, noto come effetto loto, ha portato allo sviluppo di diversi materiali autopulenti. Un esempio di impiego è il campo navale, dove opportuni rivestimenti impediscono la formazione di incrostazioni sulla parte immersa dello scafo, le quali porterebbero ad una riduzione delle prestazioni della nave [15].

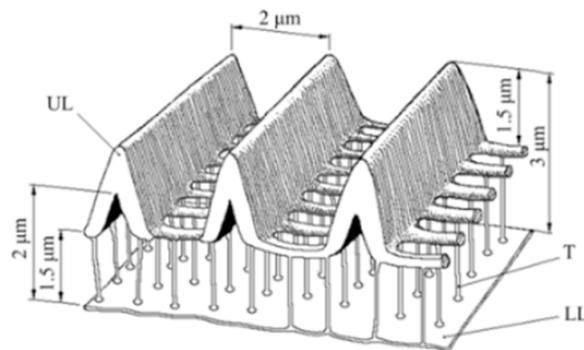


Figura 1.3: Rappresentazione di una squama della *Pyrameis Atalanta*. [7]

Molto più complessa è la struttura delle scaglie sulle ali della farfalla *Pyrameis Atalanta*. Le scaglie, oltre a ridurre le vibrazioni delle ali durante il volo, conferiscono a questa specie di farfalla una maggiore portanza rispetto ad altri esemplari [11]. Questa caratteristica è conferita dalla porosità delle squame e da una zona cava presente all'interno di esse. Infatti la squame sono composte da due lamine, una superiore ed una inferiore, unite da sottili aste (si veda la Fig.(1.3)). La lamina inferiore è piana, a differenza di quella superiore che, più complessa della precedente, ha una forma a V rovesciata, alternata da scanalature che permettono il passaggio dell'aria nella zona cava compresa fra le due lamine. La regione cava ha dunque il compito di intrappolare aria durante il battito d'ali. L'aumento della massa d'aria intrappolata e un più basso coefficiente d'attrito, determinato dalla rugosità della squama, conferiscono dunque un'elevata portanza alle ali. Inoltre, la lamina superiore conferisce una caratteristica di super-idrofobia all'ala, permettendo alle gocce d'acqua, con cui entra in contatto, di scivolare via [16]. Queste superfici rugose si presentano come irregolarità periodiche o quasi-periodiche e possono essere individuate come uno scostamento regolare da una superficie di riferimento.

Come già spiegato in precedenza, l'interazione di tali superfici con un fluido in moto determina particolari caratteristiche. Per tali motivi lo studio dei moti di fluidi su tali superfici risulta di particolare interesse ma anche di notevole complessità. Questo è dovuto proprio alla complessa forma delle irregolarità e alle dimensioni notevolmente ridotte (ordine dei μm). Il metodo utilizzato, nella nostra trattazione, per lo studio dei flussi sopra a superfici scabre è quello dell'omogeneizzazione multi-scala, ovvero un approccio che ci permette di studiare il macro-comportamento di un fluido dalle sue micro-proprietà [1], espresse tramite opportune condizioni al contorno su un'interfaccia piana fittizia [2]. Attraverso la definizione di un dominio microscopico e uno macroscopico, la teoria dell'omogeneizzazione sarà in grado di fornirci formule di *up scaling* per il passaggio da un dominio all'altro.

La tecnica dell'omogeneizzazione si è evoluta nel tempo a partire dall'approssimazione media effettiva fino all'attuale omogeneizzazione multi-scala, passando per i metodi di delimitazione e l'omogeneizzazione asintotica:

- L'approssimazione media effettiva permette di trovare la tensione presente in un solido elastico quando esso subisce un cambiamento delle dimensioni della forma.
- I metodi di delimitazione, ovvero i metodi basati sulla fornitura di limiti inferiori e superiori alla rigidità totale di un sistema, cercano di ottenere espressioni semplici per le effettive proprietà termo-elastiche.
- La teoria dell'omogeneizzazione asintotica ha posto le basi per lo studio di materiali compositi con strutture periodiche utilizzando un approccio multi-scala, dimostrando essere una tecnica molto importante per analizzare disposizioni strutturali con grandezze esistenti sia nel campo microscopico che macroscopico.
- L'omogeneizzazione multi-scala è dunque un'evoluzione di quella asintotica e si basa su metodi diretti micro-macro anche conosciuti come analisi globale-locale. Questi metodi stimano la relazione tensione-deformazione in un punto macroscopico svolgendo calcoli su un'altra scala.

Un altro concetto molto importante è quello della condizione di slittamento. Navier [13] derivò le equazioni per un fluido viscoso, incomprimibile, considerando che le interazioni molecolari del fluido e il loro movimento, in

prossimità di una parete, possa avvenire solo nel piano della parete stessa, con la superficie che esercita una resistenza al moto proporzionale alla velocità di scorrimento. Quest'ultima viene espressa al primo ordine come:

$$\hat{u} = \hat{\lambda} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \quad (1.1)$$

con \hat{y} la normale alla direzione del moto e $\hat{\lambda}$ la costante di Navier che prende anche il nome di *slip length*. Con tale condizione, la velocità del fluido alla parete non sarà nulla ma uguale alla velocità di scorrimento. Fu Taylor [14] a dimostrare tramite esperimenti che il fluido non scivola lungo le pareti, arrivando a definire una condizione di non scivolamento (*no slip*), la quale ottenne un ottimo riscontro fra le formule teoriche e i dati sperimentali. La condizione di Taylor, a differenza di quella di Navier, considera dunque nulla la velocità del fluido alla parete.

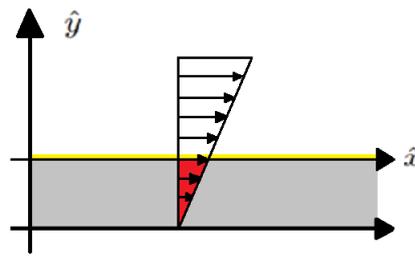


Figura 1.4: Profilo di velocità su superficie scabra (sotto) e liscia (sopra), con l'identificazione di due tipologie differenti di condizione al contorno.

La condizione di *no slip*, però, non è sempre vantaggiosa per risolvere determinati problemi/equazioni. Considerando una superficie rugosa infatti è possibile andarla ad approssimare ad una superficie liscia, parallela alla superficie scabra e predisporla sopra alle irregolarità, introducendo l'ipotesi di slittamento (si veda la Fig. 1.4). Questa condizione al contorno risulta essere di notevole vantaggio, in quanto ci permette di andare ad effettuare uno studio del moto di un fluido su una superficie scabra, impiegando solo condizioni al contorno effettive (*slip*) senza la necessità di creare una geometria di parete scabra, né la necessità di creare una griglia di calcolo adeguata a ciascun elemento di rugosità, portando vantaggi in termini di tempo di simulazioni ma soprattutto di capacità di calcolo (è possibile risolvere lo stesso problema ma con minore potenza di calcolo).

Capitolo 2

Analisi degli elementi finiti

Per poter risolvere le equazioni differenziali alle derivate parziali, sviluppate nei capitoli successivi, si è fatto ricorso all'analisi degli elementi finiti (o FEM).

L'efficacia del metodo degli elementi finiti è basata sulla capacità di interpolazione degli elementi finiti nell'approssimazione di funzioni in valori scalari e vettoriali e la capacità di approssimare un modello matematico espresso in equazioni alle derivate parziali [8].

La maggior parte dei problemi in meccanica sono rappresentati da un insieme di equazioni alle derivate parziali e da condizioni iniziali e/o al contorno. Questo insieme prende il nome di soluzione forte del problema. Tuttavia, l'analisi degli elementi finiti si basa su una forma equivalente che prende il nome di formulazione debole.

In questa documentazione verrà trattata solo la formulazione debole.

2.1 Formulazione debole

Prendiamo in considerazione un intervallo aperto $\Omega = (0, 1)$ in \mathbb{R} e un'equazione differenziale che vogliamo risolvere per la funzione $u = u(x) \in C^2(\bar{\Omega})$:

$$-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) + b \frac{du}{dx} + cu = f \quad (2.1)$$

con $a = a(x) > 0$, $b = b(x) > 0$ e $c = c(x) > 0$ dati "materiali" e $f = f(x)$ termine sorgente.

Supponiamo inoltre che l'equazione (2.1) sia soggetta alle seguenti condizioni al contorno:

$$u = u_d, \quad \text{in } x = 0 \quad \text{e} \quad a \frac{du}{dx} = g, \quad \text{in } x = 1 \quad (2.2)$$

con $u_d \in \mathbb{R}$ e $g \in \mathbb{R}$ dati limite. Prendiamo in considerazione una nuova funzione $v = v(x)$ in $C^\infty(\bar{\Omega})$ e integriamo il prodotto di v e della (2.1) in Ω :

$$\int_{\Omega} \left[-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) + b \frac{du}{dx} + cu \right] v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad (2.3)$$

Utilizzando l'integrazione per parti, $(uv)' = u'v + uv'$, il primo termine di sinistra può essere riscritto come:

$$\int_{\Omega} -\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) v dx = - \left[a \frac{du}{dx} v \right]_0^1 + \int_{\Omega} a \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx \quad (2.4)$$

Sostituendo il termine appena ricavato nella (2.3), ricaviamo:

$$\int_{\Omega} \left[a \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + b \frac{du}{dx} v + cuv \right] dx - a(1) \frac{du}{dx}(1)v(1) + a(0) \frac{du}{dx}(0)v(0) = \int_{\Omega} f v dx \quad (2.5)$$

Applicando le condizioni al contorno precedentemente elencate (2.2):

$$\int_{\Omega} \left[a \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + b \frac{du}{dx} v + cuv \right] dx + a(0) \frac{du}{dx}(0)v(0) = \int_{\Omega} f v dx + gv(1) \quad (2.6)$$

Essendo v una funzione di test, nulla ci vieta di impostare la condizione al contorno $v(0) = 0$. Questo ha effettivamente senso solo se siamo a conoscenza del valore della funzione u in $x = 0$, non necessitando dunque di essere testato dalla funzione di test v . Risulta quindi importante far rispettare la condizione cinematica $u(0) = u_d$ e, proprio per questo, quest'ultima prende il nome di condizione al contorno essenziale. Di conseguenza otteniamo :

$$\int_{\Omega} \left[a \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + b \frac{du}{dx} v + cuv \right] dx = \int_{\Omega} f v dx + gv(1) \quad (2.7)$$

Come possiamo notare i termini relativi alle derivate seconde sono scomparsi rendendo più semplice l'espressione dell'equazione differenziale. Ovviamente la soluzione di u che ricaveremo dalla (2.7) sarà una soluzione approssimata. Il grado di approssimazione dipenderà dalla scelta della funzione di test, la quale avrà anche l'importante compito di guidarci verso la soluzione.

La formulazione debole del problema (2.1)(2.2) viene definita come:

Date f e g , ricaviamo $u \in U$, tale che:

$$\int_{\Omega} \left[a \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + b \frac{du}{dx} v + cuv \right] dx = \int_{\Omega} f v dx + gv(1), \quad \forall v \in V \quad (2.8)$$

Vediamo ora come costruire funzioni di prova come funzioni continue a tratti per poter arrivare ad avere una soluzione approssimata del problema.

2.2 Mesh

Prendendo sempre in considerazione il dominio $\Omega = (0, 1)$, è possibile suddividere tale dominio in intervalli più piccoli, chiamati elementi, identificati da punti, che prendono il nome di vertici, appartenenti al dominio Ω . Quindi considerando N , un numero intero positivo, allora è possibile definire i vertici come $x_i = 0, 1, \dots, N$, tali che $0 < x_0 < \dots < x_i < \dots < x_N < 1$, mentre gli elementi vengono definiti come $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ tali che $\bar{\Omega} = \bigcup_{1 \leq i \leq N} I_i$. L'unione continua di questi elementi costituisce la Mesh ovvero la maglia e viene dunque utilizzata per poter calcolare la soluzione approssimata del problema.

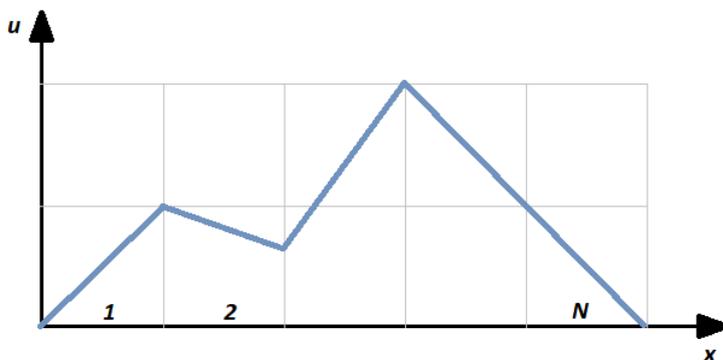


Figura 2.1: Esempio di funzione continua a tratti composta da $N = 5$ elementi.

Definendo come V_h^3 lo spazio vettoriale contenente tutte le funzioni continue a tratti u_h definite in $\bar{\Omega}$ tale che $u_h(0) = 0$, possiamo definire tali funzioni come combinazione lineare di funzioni base $\phi_i \in V_h$:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i(x) \quad (2.9)$$

mentre le funzioni basi possono essere scritte come:

$$\phi_i(x) \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_i & \text{per } x \in I_i \\ (x_{i+1} - x)/h_{i+1} & \text{per } x \in I_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.10)$$

Considerando l'andamento di una funzione di prova, presa in esempio in figura 2.1, possiamo esprimerla secondo la (2.9) come:

$$u_h = \phi_1 + 0,7\phi_2 + 2\phi_3 + \phi_4 (+0\phi_5) \quad (2.11)$$

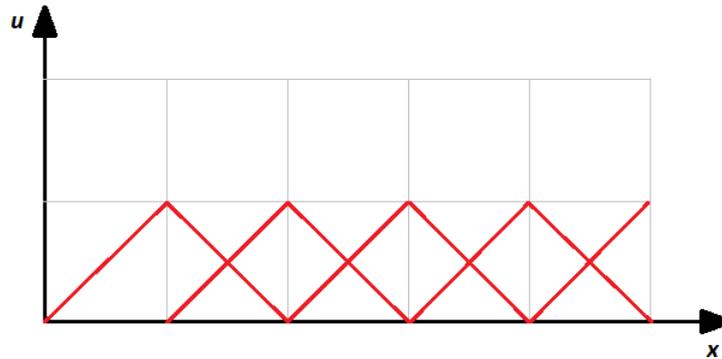


Figura 2.2: Rappresentazione grafica delle funzioni base

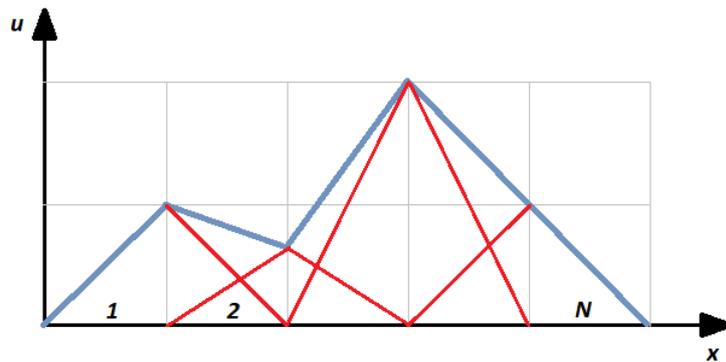


Figura 2.3: Funzione di prova espressa in funzione delle funzioni base.

2.3 Software CFD

Il software da noi utilizzato è COMSOL Multiphysics[®] v5.5 [6]. Esso viene usato per impostare e risolvere modelli e per studiare sistemi contenenti campi di moto. Possono essere studiati una vasta gamma di flussi, in questa trattazione verrà studiato un flusso incomprimibile, laminare e monofase. La geometria, le proprietà del fluido e la tipologia di flusso, vengono utilizzati come parametri per la soluzione di modelli e la produzione di soluzioni accurate. COMSOL Multiphysics[®] v5.5 è stato utilizzato per risolvere sia le equazioni per il campo microscopico che per il campo macroscopico. Nello stesso software è stato possibile costruire le mash per le varie simulazioni, usando in appoggio Gmsh [10] per maglie più accurate e sofisticate.

Capitolo 3

Formulazione Matematica

Come già indicato, faremo riferimento a due campi di studio: il campo microscopico ed il campo macroscopico. Sarà dunque necessario essere in possesso di equazioni per passare dal mondo delle microstrutture l a quello delle macrostrutture L [2]. Tramite *upscaling* andremo a definire delle equazioni per il passaggio da un campo all'altro. Viene dunque introdotto il coefficiente ϵ , definito come il rapporto fra le scale di lunghezza del campo microscopico e macroscopico ed, essendo $l \ll L$, ϵ assumerà un valore molto piccolo :

$$\epsilon = \frac{l}{L} \ll 1 \quad (3.1)$$

Le variabili del nostro sistema verranno dunque espresse come serie di potenze di tale piccolo parametro:

$$f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots + \epsilon^n f^{(n)} \quad (3.2)$$

Ci sarà quindi distinzione fra grandezze macroscopiche e microscopiche e, per evidenziare tale diversità, indicheremo le prime con caratteri maiuscoli mentre quelle microscopiche con caratteri minuscoli.

Ogni grandezza è stata opportunamente normalizzata. La normalizzazione viene fatta per poter inserire i valori di ciascuna grandezza all'interno delle equazioni senza doverci preoccupare delle loro unità di misura. Le grandezze dimensionali sono espresse con il simbolo " ^ " sopra alla relativa dicitura. Quelle relative al campo macroscopico vengo scritte come:

$$X_i = \frac{\hat{x}_i}{L} \quad (3.3)$$

$$U_i = \frac{\hat{u}_i}{\mathcal{U}} \quad (3.4)$$

$$T = \frac{\mathcal{U}}{L} \hat{t} \quad (3.5)$$

$$P = \frac{\hat{p} - \hat{p}_\infty}{\rho \mathcal{U}^2} \quad (3.6)$$

con \mathcal{U} scala di velocità macroscopica. Tali scale vengono espresse in funzione di ϵ e delle rispettive scale microscopiche, permettendoci di ricavare le espressioni per le grandezze microscopiche espresse sempre in funzione delle scale macroscopiche:

$$x_i = \frac{\hat{x}_i}{\epsilon L} \quad (3.7)$$

$$u_i = \frac{\hat{u}_i}{\epsilon \mathcal{U}} \quad (3.8)$$

$$t = \frac{\mathcal{U}}{L} \hat{t} \quad (3.9)$$

$$p = \frac{\hat{p} - \hat{p}_\infty}{\mu \mathcal{U}} L \quad (3.10)$$

La rugosità della nostra superficie è stata rappresentata dalla ripetizione sistematica, uniforme e sfalsata, di due forme geometriche, cono e cilindro, andando a definire la nostra regione macroscopica (Fig.3.1). Lo studio del campo microscopico, invece, si è riferito alla singola forma geometrica. Questo ci ha permesso di individuare delle celle unitarie (1x1) ad altezza variabile (y_∞) in uno spazio cartesiano (x, y, z) (Fig. 3.2). Sul piano (x, z) è stata imposta la condizione di *no slip*, mentre sui piani ad esso perpendicolari, piani (x, y), è stata imposta la condizione di periodicità. I due campi di studio sono governati da equazioni molto importanti, ovvero l'equazione di continuità della massa e le equazioni della conservazione della quantità di moto che vanno a costituire le equazioni di Navier-Stokes. L'equazione di continuità esprime in forma indefinita, in quanto valida in qualunque spazio del dominio del moto, la legge della conservazione della massa [3]. Essa per il campo microscopico assume la seguente forma normalizzata:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.11)$$

Considerando la densità del fluido costante, l'equazione di continuità viene semplificata:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.12)$$

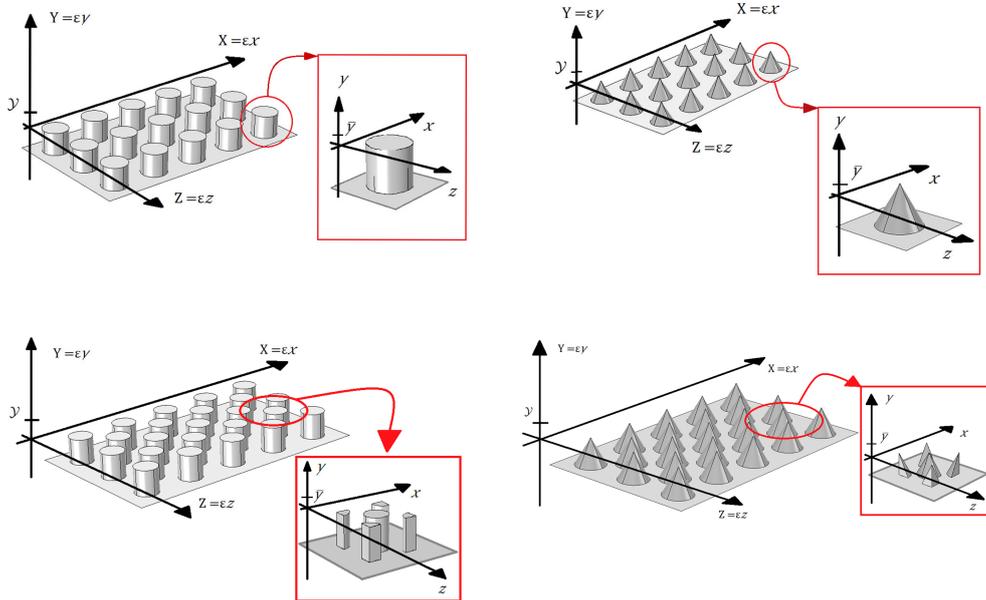


Figura 3.1: Disposizione uniforme (sopra) e sfalsata (sotto), per entrambe geometrie, con le rispettive celle unitarie.

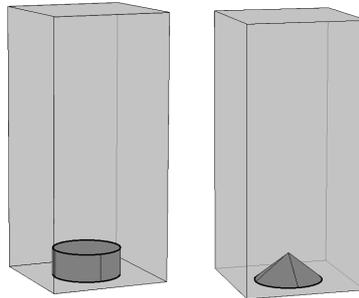


Figura 3.2: Dominio di studio delle celle unitarie per disposizione di cono e cilindro.

L'equazione della conservazione della quantità di moto, altrimenti nota come equazione di Cauchy, viene ricavata dalla seconda legge di Newton nella seguente forma:

$$\rho \frac{\mathcal{D}\vec{u}}{\mathcal{D}t} = \nabla \cdot \vec{\sigma} + \vec{F} \quad (3.13)$$

con \vec{F} la forzante e $\mathcal{D}/\mathcal{D}t$ la derivata totale. Andando a riscrivere

quest'ultima otteniamo:

$$\hat{\rho} \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{t}} + \sum_{j=1}^3 \hat{u}_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} \right) = \nabla \cdot \vec{\hat{\sigma}} + \vec{\hat{F}} \quad (3.14)$$

Con $\vec{\hat{\sigma}}$ indichiamo lo *stress tensor* o ancora conosciuto come tensore di tensione di Cauchy. Indicato anche come $\hat{\mathbf{S}}$, le cui componenti sono:

$$\vec{\hat{\sigma}} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{xx} & \hat{\tau}_{xy} & \hat{\tau}_{xz} \\ \hat{\tau}_{yx} & \hat{\sigma}_{yy} & \hat{\tau}_{yz} \\ \hat{\tau}_{zx} & \hat{\tau}_{zy} & \hat{\sigma}_{zz} \end{pmatrix} = \hat{S} = \begin{pmatrix} S^{Nx} & S^{Tx_y} & S^{Tx_z} \\ S^{Ty_x} & S^{Ny} & S^{Ty_z} \\ S^{Tz_x} & S^{Tz_y} & S^{Nz} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Esso può essere espresso come somma fra il deviatore di tensione $\hat{\tau}$ e la componente idrostatica, che, nel nostro caso, è data dalla pressione del fluido:

$$\hat{S} = -\hat{p}\mathcal{I} + \hat{\tau} \quad (3.16)$$

La pressione viene indicata come negativa in quando è una componente entrante del nostro sistema, a differenza delle componenti di tensione che, indicate come positive, sono uscenti dal nostro sistema. Possiamo dunque esprimere il deviatore di tensione τ come:

$$\hat{\tau} = \mu [\nabla \cdot \vec{\hat{u}} + (\nabla \cdot \vec{\hat{u}})^t] \quad (3.17)$$

$$\hat{\tau} = \mu \begin{pmatrix} 2\hat{u}_x & \hat{u}_y + \hat{v}_x & \hat{u}_z + \hat{w}_x \\ \hat{v}_x + \hat{u}_y & 2\hat{v}_y & \hat{v}_z + \hat{w}_y \\ \hat{w}_x + \hat{u}_z & \hat{w}_y + \hat{v}_z & 2\hat{w}_z \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Moltiplicando scalarmente per ∇ entrambi i termini della (3.17) e ricordando la (3.12), giungiamo alla seguente scrittura del deviatore di tensione:

$$\frac{\partial \hat{\tau}_{ij}}{\partial \hat{x}_j} = \mu \nabla^2 \hat{u}_i \quad (3.19)$$

Applicando nuovamente l'operatore ∇ alla (3.16) e integrando la precedente otteniamo:

$$\nabla \cdot \hat{S} = -\nabla \cdot (\hat{p}\mathcal{I}) + \mu \nabla^2 \vec{\hat{u}} \quad (3.20)$$

Riportando tale equazione nella (3.14) ricaviamo le equazioni di Navier-Stokes per la conservazione della quantità di moto:

$$\rho \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{t}} + \sum_{j=1}^3 \hat{u}_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} \right) = -\nabla \cdot (\hat{p}\mathcal{I}) + \mu \nabla^2 \vec{\hat{u}} + \vec{\hat{F}} \quad (3.21)$$

che, normalizzate, si presentano come:

$$\mathcal{R} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \vec{\mathcal{F}} \quad (3.22)$$

con $\mathcal{R} = \epsilon^2 \mathcal{U} l / \nu$ numero di Reynolds nel campo microscopico. Mentre per il campo macroscopico le equazioni saranno:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial U_j}{\partial X_j} = 0 \quad (3.23)$$

$$\left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 U_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j^2} + \vec{\mathcal{F}} \quad (3.24)$$

con $Re = \mathcal{U} L / \nu$ numero di Reynolds per il campo macroscopico.

3.1 Condizioni effettive

Come già spiegato, bisognerà trovare le condizioni effettive da applicare alla superficie fittizia in modo tale da sostituirla alla superficie scabra. Queste condizioni devono essere valide sia per il campo microscopico che per il campo macroscopico, infatti le due regioni tenderanno nello stesso punto in $Y = 0$, per il campo macroscopico, e in $y \rightarrow +\infty$ (y_∞) per il campo microscopico. Essendo le grandezze di velocità legate dalla relazione $U = \epsilon u$, allora all'interfaccia deve essere verificata la seguente condizione:

$$\lim_{Y \rightarrow 0} \vec{U} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \epsilon \vec{u} \quad (3.25)$$

Tale condizione può essere espressa anche ad un generico piano posizionato in $\mathcal{Y} = \epsilon \bar{y}$ tale che :

$$\vec{U}|_{Y=\mathcal{Y}} = \epsilon \vec{u}|_{y=\bar{y}} \quad (3.26)$$

purché la distanza sia sempre prossima agli elementi di rugosità.

Ricordando la (3.2) e considerando le scale temporali macroscopiche e microscopiche coincidenti, possiamo sviluppare la (3.25):

$$U(X, 0, t) = \epsilon \left[\int_0^1 (u^{(0)} + \epsilon u^{(1)})|_{y=0} dx \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (3.27)$$

$$V(X, 0, t) = \epsilon \left[\int_0^1 (v^{(0)} + \epsilon v^{(1)})|_{y=0} dx \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (3.28)$$

$$W(X, 0, t) = \epsilon \left[\int_0^1 (w^{(0)} + \epsilon w^{(1)})|_{y=0} dx \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (3.29)$$

le componenti di velocità all'ordine zero e al primo ordine vengo trovate risolvendo le equazioni per il campo microscopico. Risolvendo quella all'ordine zero, si ricava:

$$\int_0^1 u^{(0)}(x, 0, t) dx = \lambda^x S^{T_{xy}} \quad (3.30)$$

$$\int_0^1 v^{(0)}(x, 0, t) dx = 0 \quad (3.31)$$

$$\int_0^1 w^{(0)}(x, 0, t) dx = \lambda^z S^{T_{zy}} \quad (3.32)$$

Una volta risolto il problema microscopico, possiamo usare le soluzioni ricavate per creare una condizione al contorno effettiva nel piano $Y=0$. Questa condizione sarà una condizione di Navier modificata, ovvero una condizione di *slip*. Le componenti della velocità su tale piano vengono individuate dalle seguenti relazioni:

$$U(X, 0, t) = \epsilon \lambda^x S^{T_{xy}} + \epsilon^2 m_{xy} \frac{\partial S^{N_y}}{\partial X} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (3.33)$$

$$V(X, 0, t) = \epsilon^2 \left[m_{yx} \frac{\partial S^{T_{xy}}}{\partial X} + m_{yz} \frac{\partial S^{T_{zy}}}{\partial Z} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (3.34)$$

$$W(X, 0, t) = \epsilon \lambda^z S^{T_{zy}} + \epsilon^2 m_{zy} \frac{\partial S^{N_y}}{\partial Z} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (3.35)$$

con m_{ij} la permeabilità. Considerando il materiale, che compone i nostri elementi di rugosità, come materiale isotropo allora possiamo considerare $\lambda^x = \lambda^z = \lambda$ e $m_{xy} = m_{yx} = m_{yz} = m_{zy}$.

$$U(X, 0, t) = \epsilon \lambda \frac{\partial U}{\partial Y} + \epsilon^2 m_{xy} Re \frac{\partial P}{\partial X} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (3.36)$$

$$V(X, 0, t) = \epsilon^2 m_{xy} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (3.37)$$

$$W(X, 0, t) = \epsilon \lambda \frac{\partial W}{\partial Z} + \epsilon^2 m_{xy} Re \frac{\partial P}{\partial Z} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (3.38)$$

Considerando l'equazione di continuità e approssimando al secondo ordine:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial Z} = -\frac{\partial V}{\partial Y} = \epsilon \lambda \left[\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z \partial Y} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.39)$$

e ancora:

$$-\frac{\partial V}{\partial Y} = -\epsilon\lambda\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.40)$$

Sulla base della condizione al contorno (3.37) sul piano fittizio si ha:

$$V = \epsilon^2\frac{m_{xy}}{\epsilon\lambda}\frac{\partial V}{\partial Y} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \epsilon\lambda^y\frac{\partial V}{\partial Y} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.41)$$

con $\lambda^y = \frac{m_{xy}}{\lambda}$ la distanza di penetrazione della velocità verticale V . Le altre due componenti di velocità vengono espresse come:

$$U = \epsilon\lambda\frac{\partial U}{\partial X} + \epsilon^2 m_{xy} Re \frac{\partial P}{\partial X} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (3.42)$$

$$W = \epsilon\lambda\frac{\partial W}{\partial Y} + \epsilon^2 m_{xy} Re \frac{\partial P}{\partial Z} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (3.43)$$

Capitolo 4

Campo microscopico

In questa sezione verranno sviluppate le equazioni per il campo microscopico. Per semplificarne la scrittura, le derivate parziali sono state indicate come pedici delle varie grandezze da derivare. Per esempio, l'equazione di continuità (3.12) viene riscritta come:

$$u_x + v_y + w_z = 0 \quad (4.1)$$

Come già visto, le equazioni di Navier-Stokes risultano essere dipendenti dal numero di Reynolds, per il campo microscopico, \mathcal{R} :

$$\mathcal{R} = \epsilon^2 Re \ll 1 \quad (4.2)$$

Essendo ϵ un valore molto piccolo (< 1) allora \mathcal{R} sarà molto minore di uno e considerando il nostro sistema come stazionario, andiamo a trascurare i termini di sinistra relativi alle equazioni di Navier-Stokes (3.22):

$$\begin{aligned} 0 &= -p_x + \nabla^2 u \\ 0 &= -p_y + \nabla^2 v \\ 0 &= -p_z + \nabla^2 w \end{aligned} \quad (4.3)$$

Ulteriori semplificazioni possono essere fatte sulle componenti del tensore di tensione \mathbf{S} adimensionalizzato ($S = \frac{L\hat{S}}{\mu U}$). Andando ad unire la (3.18) alla (3.16) possiamo esplicitare le componenti del tensore delle tensioni:

$$\begin{aligned} S^{T_{xy}} &= v_x + u_y \\ S^{N_y} &= -p + 2v_y \quad a \quad y \rightarrow \infty \\ S^{T_{zy}} &= w_y + v_z \end{aligned} \quad (4.4)$$

Questo sistema rappresenta le condizioni al contorno applicate nel piano corrispondente a y_∞ e rappresentano gli effetti del campo macroscopico sul

campo microscopico. Tale azione viene però considerata, come approssimazione, solo lungo l'asse y , permettendo di ridurre a tre le componenti del tensore delle tensioni.

Ricordando lo sviluppo delle grandezze (3.2) e scomponendo la derivata parziale e ∇ in:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial}{\partial X} \right) ; (\nabla + \epsilon \nabla') \quad (4.5)$$

possiamo sviluppare l'equazione della continuità (4.1), le equazioni della conservazione della quantità di moto (4.3) e le condizioni al contorno a y_∞ (4.4) fino al secondo ordine:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial}{\partial X} \right) (u^{(0)} + \epsilon u^{(1)} + \epsilon^2 u^{(2)}) + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial}{\partial X} \right) (v^{(0)} + \epsilon v^{(1)} + \epsilon^2 v^{(2)}) = 0 \quad (4.6)$$

$$0 = - \left(\frac{\partial}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial}{\partial X} \right) (p^{(0)} + \epsilon p^{(1)} + \epsilon^2 p^{(2)}) + (\nabla^2 + 2\epsilon \nabla \nabla' + \epsilon^2 \nabla'^2) (u_i^{(0)} + \epsilon u_i^{(1)} + \epsilon^2 u_i^{(2)}) \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} S^{N_y} &= -p^{(0)} - \epsilon p^{(1)} - \epsilon^2 p^{(2)} + 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial}{\partial Y} \right) (v^{(0)} + \epsilon v^{(1)} + \epsilon^2 v^{(2)}) \\ S^{T_{xy}} &= \left(\frac{\partial}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial}{\partial Y} \right) (u^{(0)} + \epsilon u^{(1)} + \epsilon^2 u^{(2)}) + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial}{\partial X} \right) (v^{(0)} + \epsilon v^{(1)} + \epsilon^2 v^{(2)}) \\ S^{T_{zy}} &= \left(\frac{\partial}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial}{\partial Y} \right) (w^{(0)} + \epsilon w^{(1)} + \epsilon^2 w^{(2)}) + \left(\frac{\partial}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial}{\partial Z} \right) (v^{(0)} + \epsilon v^{(1)} + \epsilon^2 v^{(2)}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Le equazioni all'ordine zero $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ si presenteranno come :

$$u_x^{(0)} + v_y^{(0)} + w_z^{(0)} = 0 \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -p_x^{(0)} + u_{xx}^{(0)} + u_{yy}^{(0)} + u_{zz}^{(0)} \\ 0 &= -p_y^{(0)} + v_{xx}^{(0)} + v_{yy}^{(0)} + v_{zz}^{(0)} \\ 0 &= -p_z^{(0)} + w_{xx}^{(0)} + w_{yy}^{(0)} + w_{zz}^{(0)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} S^{N_y} &= -p^{(0)} + 2v_y^{(0)} \\ S^{T_{xy}} &= u_y^{(0)} + v_x^{(0)} \\ S^{T_{zy}} &= w_y^{(0)} + v_z^{(0)} \end{aligned} \quad (4.11)$$

essendo sistemi lineari possiamo impostare la soluzione come:

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= u^\dagger S^{T_{xy}} + u^\ddagger S^{T_{zy}} \\ v^{(0)} &= v^\dagger S^{T_{xy}} + v^\ddagger S^{T_{zy}} \\ w^{(0)} &= w^\dagger S^{T_{xy}} + w^\ddagger S^{T_{zy}} \\ p^{(0)} &= p^\dagger S^{T_{xy}} + p^\ddagger S^{T_{zy}} - S^{N_y} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Quindi raccogliendo per $S^{T_{xy}}$ ottengo:

1) Continuità:

$$\frac{\partial u_i^\dagger}{\partial x_i} = 0 \quad (4.13)$$

2) Conservazione del quantità di moto:

$$-\frac{\partial p^\dagger}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i^\dagger}{\partial^2 x_j} = 0 \quad (4.14)$$

3) Condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^\dagger}{\partial x} + \frac{\partial u^\dagger}{\partial y} &= 1 \\ p^\dagger &= 2 \frac{\partial v^\dagger}{\partial y} \\ \frac{\partial w^\dagger}{\partial y} + \frac{\partial v^\dagger}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Raccogliendo invece per $S^{T_{zy}}$:

1) Continuità:

$$\frac{\partial u_i^\ddagger}{\partial x_i} = 0 \quad (4.16)$$

2) Conservazione del quantità di moto:

$$-\frac{\partial p^\ddagger}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i^\ddagger}{\partial^2 x_j} = 0 \quad (4.17)$$

3) Condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^\ddagger}{\partial x} + \frac{\partial u^\ddagger}{\partial y} &= 0 \\ p^\ddagger &= 2 \frac{\partial v^\ddagger}{\partial y} \\ \frac{\partial w^\ddagger}{\partial y} + \frac{\partial v^\ddagger}{\partial z} &= 1 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Raccogliendo per S^{N_y} non ricaviamo invece alcuna equazione utile.

Le equazioni al primo ordine $\mathcal{O}(\epsilon^1)$ ricavate sempre dalla (4.6), (4.7) e dalla (4.8) si presentano come:

$$u_x^{(1)} + v_y^{(1)} + w_z^{(1)} = -u_X^{(0)} - v_Y^{(0)} - w_Z^{(0)} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -p_x^{(1)} + p_X^{(0)} + u_{xx}^{(1)} + u_{yy}^{(1)} + u_{zz}^{(1)} + 2u_{Xx}^{(0)} + 2u_{Yy}^{(0)} + 2u_{Zz}^{(0)} \\ 0 &= -p_y^{(1)} + p_Y^{(0)} + v_{xx}^{(1)} + v_{yy}^{(1)} + v_{zz}^{(1)} + 2v_{Xx}^{(0)} + 2v_{Yy}^{(0)} + 2v_{Zz}^{(0)} \\ 0 &= -p_z^{(1)} + p_Z^{(0)} + w_{xx}^{(1)} + w_{yy}^{(1)} + w_{zz}^{(1)} + 2w_{Xx}^{(0)} + 2w_{Yy}^{(0)} + 2w_{Zz}^{(0)} \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -p^{(1)} + 2v_y^{(1)} + 2v_Y^{(0)} \\ 0 &= u_y^{(1)} + v_x^{(1)} + u_Y^{(0)} + v_X^{(0)} \\ 0 &= w_y^{(1)} + v_z^{(1)} + w_Y^{(0)} + v_Z^{(0)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

In questo caso oltre alle soluzioni all'ordine zero (4.12) dobbiamo, allo stesso modo, imporre la soluzione al primo ordine:

$$u_i^{(1)} = \hat{u}_{ij} \frac{\partial S^{T_{xy}}}{\partial X_j} + \tilde{u}_{ij} \frac{\partial S^{N_{zy}}}{\partial X_i} + \check{u}_{ij} \frac{\partial S^{N_y}}{\partial X_i} \quad (4.22)$$

$$p^{(1)} = \hat{p}_j \frac{\partial S^{T_{xy}}}{\partial X_j} + \tilde{p}_j \frac{\partial S^{N_{zy}}}{\partial X_i} + \check{p}_j \frac{\partial S^{N_y}}{\partial X_i} \quad (4.23)$$

Raccolgo per $S^{T_{xy}}$

1) Continuità:

$$\frac{\partial \hat{u}_{ij}}{\partial x_i} = -u_j^\dagger \quad (4.24)$$

2) Conservazione della quantità di moto:

$$-\frac{\partial \hat{p}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{ij}}{\partial^2 x_k} = p^\dagger \delta_{ij} - 2 \frac{\partial u_j^\dagger}{\partial x_j} \quad (4.25)$$

3) Condizioni al contorno:

$$-\hat{p}_j \delta_{i2} + \frac{\partial \hat{u}_{2j}}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{u}_{ij}}{\partial y} = -v^\dagger \delta_{ij} \quad (4.26)$$

Raccolgo invece per $S^{T_{zy}}$:

1) Continuità:

$$\frac{\partial \tilde{u}_{ij}}{\partial x_i} = -u_j^\ddagger \quad (4.27)$$

2) Conservazione della quantità di moto:

$$-\frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{ij}}{\partial^2 x_k} = p^\ddagger \delta_{ij} - 2 \frac{\partial u_j^\ddagger}{\partial x_j} \quad (4.28)$$

3) Condizioni al contorno:

$$-\tilde{p}_j \delta_{i2} + \frac{\partial \tilde{u}_{2j}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{u}_{ij}}{\partial y} = -v^\ddagger \delta_{ij} \quad (4.29)$$

Raccogliendo per S^{N_y} in questo caso ricaviamo:

1) Continuità:

$$\frac{\partial \check{u}_{ij}}{\partial x_i} = 0 \quad (4.30)$$

2) Conservazione del quantità di moto:

$$-\frac{\partial \check{p}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \check{u}_{ij}}{\partial^2 x_k} = -\delta_{ij} \quad (4.31)$$

3) Condizioni al contorno:

$$-\check{p}_j \delta_{i2} + \frac{\partial \check{u}_{2j}}{\partial x_i} + \frac{\partial \check{u}_{ij}}{\partial y} = 0 \quad (4.32)$$

Le soluzioni per il campo microscopico si ottengono risolvendo le equazioni dalla (4.24) alla (4.32). Alcune soluzioni sono mostrate nella figura 4.1, mentre i valori numerici sono riportati nelle tabelle 4.1 e 4.3. I valori del coefficiente λ , relativo all'equazione di Navier (1.1) e alle condizioni effettive al primo ordine, sono sempre mostrati nelle tabelle 4.1 e 4.3. Nelle tabelle 4.2 e 4.4, invece, sono mostrate le soluzioni per la permeabilità.

Tabella 4.1: Risultati numerici per cono in disposizione uniforme e sfalsata per diverse altezze della cella unitaria e diversi rapporti di forma del cono.

| Uniforme | | | | |
|----------|------------|--------------------------|---|-----------|
| H/D | y_∞ | $u^\dagger = w^\ddagger$ | $-\hat{u}_{21} = \check{u}_{11} = -\tilde{u}_{23} = \check{u}_{33}$ | λ |
| 0.1 | 2 | 2.05059 | 2.10253 | 0.05059 |
| 0.1 | 3 | 3.05058 | 4.65312 | 0.05058 |
| 0.1 | 4 | 4.05059 | 8.20370 | 0.05059 |
| 0.2 | 2 | 2.09691 | 2.19910 | 0.09691 |
| 0.2 | 3 | 3.09693 | 4.79580 | 0.09693 |
| 0.2 | 4 | 4.09694 | 8.39287 | 0.09694 |
| 0.4 | 2 | 2.17366 | 2.36474 | 0.17366 |
| 0.4 | 3 | 3.17362 | 5.03858 | 0.17362 |
| 0.4 | 4 | 4.17369 | 8.71211 | 0.17369 |
| Sfalsata | | | | |
| 0.1 | 2 | 2.03879 | 2.07840 | 0.03879 |
| 0.1 | 3 | 3.03877 | 4.61713 | 0.03877 |
| 0.1 | 4 | 4.03882 | 8.15610 | 0.03882 |
| 0.2 | 2 | 2.07361 | 2.15023 | 0.07361 |
| 0.2 | 3 | 3.07356 | 4.72368 | 0.07356 |
| 0.2 | 4 | 4.07355 | 8.29722 | 0.07355 |
| 0.4 | 2 | 2.12890 | 2.26768 | 0.12890 |
| 0.4 | 3 | 3.12891 | 4.89659 | 0.12891 |
| 0.4 | 4 | 4.12880 | 8.52505 | 0.12880 |

Tabella 4.2: Valori della permeabilità per le condizioni effettive al secondo ordine per il cono.

| H/D | <i>Uniforme</i> | | | <i>Sfalsata</i> | | |
|----------|-----------------|---------|---------|-----------------|---------|---------|
| | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.1 | 0.2 | 0.4 |
| m_{12} | 0.00115 | 0.00426 | 0.01400 | 0.00056 | 0.00184 | 0.00675 |

Tabella 4.3: Risultati numerici per cilindro in disposizione uniforme e sfalsata per diverse altezze della cella unitaria e diversi rapporti di forma del cilindro.

| Uniforme | | | | |
|----------|------------|-------------------------|---|-----------|
| H/D | y_∞ | $u^\dagger = w^\dagger$ | $-\hat{u}_{21} = \check{u}_{11} = -\tilde{u}_{23} = \check{u}_{33}$ | λ |
| 0.1 | 2 | 2.03105 | 2.06277 | 0.03105 |
| 0.1 | 3 | 3.03106 | 4.59404 | 0.03106 |
| 0.1 | 4 | 4.03107 | 8.12511 | 0.03107 |
| 0.2 | 2 | 2.04767 | 2.09759 | 0.04767 |
| 0.2 | 3 | 3.04759 | 4.64519 | 0.04759 |
| 0.2 | 4 | 4.04758 | 8.19263 | 0.04758 |
| 0.4 | 2 | 2.06089 | 2.12676 | 0.06089 |
| 0.4 | 3 | 3.06092 | 4.68801 | 0.06092 |
| 0.4 | 4 | 4.06089 | 8.24890 | 0.06089 |
| Sfalsata | | | | |
| 0.1 | 2 | 2.02009 | 2.04061 | 0.02009 |
| 0.1 | 3 | 3.02012 | 4.56079 | 0.02012 |
| 0.1 | 4 | 4.02010 | 8.08082 | 0.02010 |
| 0.2 | 2 | 2.02862 | 2.05837 | 0.02862 |
| 0.2 | 3 | 3.02861 | 4.58697 | 0.02861 |
| 0.2 | 4 | 4.02857 | 8.11541 | 0.02857 |
| 0.4 | 2 | 2.03392 | 2.06999 | 0.03392 |
| 0.4 | 3 | 3.03388 | 4.60380 | 0.03388 |
| 0.4 | 4 | 4.03389 | 8.18111 | 0.03389 |

Tabella 4.4: Valori della permeabilità per le condizioni effettive al secondo ordine per il cilindro.

| H/D | <i>Uniforme</i> | | | <i>Sfalsata</i> | | |
|----------|-----------------|---------|---------|-----------------|---------|---------|
| | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.1 | 0.2 | 0.4 |
| m_{12} | 0.00446 | 0.00637 | 0.00713 | 0.00506 | 0.00556 | 0.00700 |

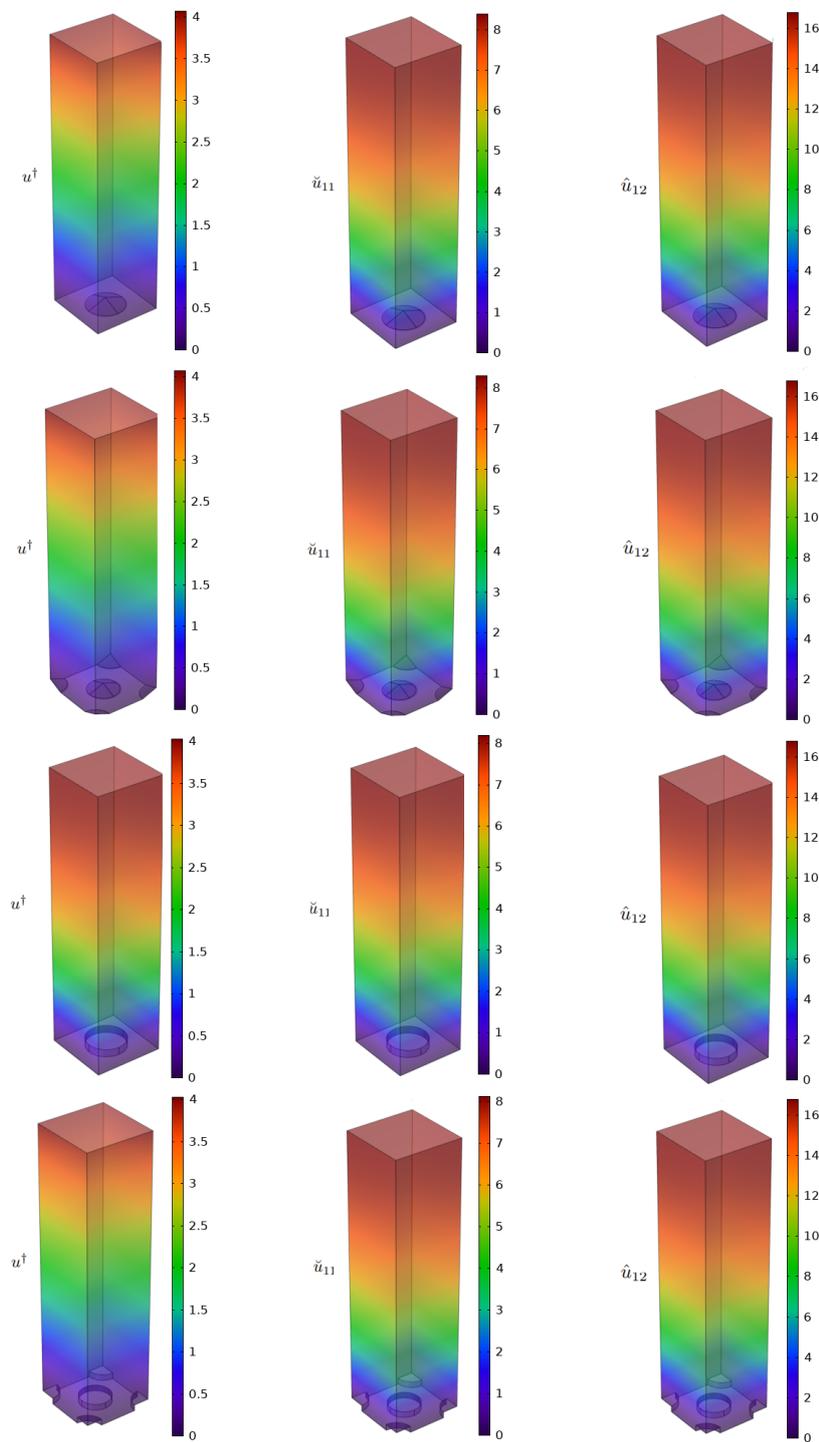


Figura 4.1: Soluzioni grafiche delle componenti di velocità del campo microscopico per cono e cilindro nelle disposizioni uniforme e sfalsato.

Capitolo 5

Campo macroscopico

Nel seguente capitolo vengono applicate le condizioni al contorno effettive, relative ad una superficie scabra con micro irregolarità, ad una superficie fittizia.

5.1 Flusso del punto di ristagno di Hiemenz

Questa configurazione è stata studiata per poter valutare la precisione delle condizioni effettive. Viene studiato un flusso laminare che cade sopra ad una parete scabra, composta da una fila di elementi rugosi, sulla quale vengono valutate le condizioni effettive e, successivamente, su una parete liscia, sulla quale vengono invece applicate le condizioni effettive (*slip*) precedentemente ricavate (Fig. 5.1).

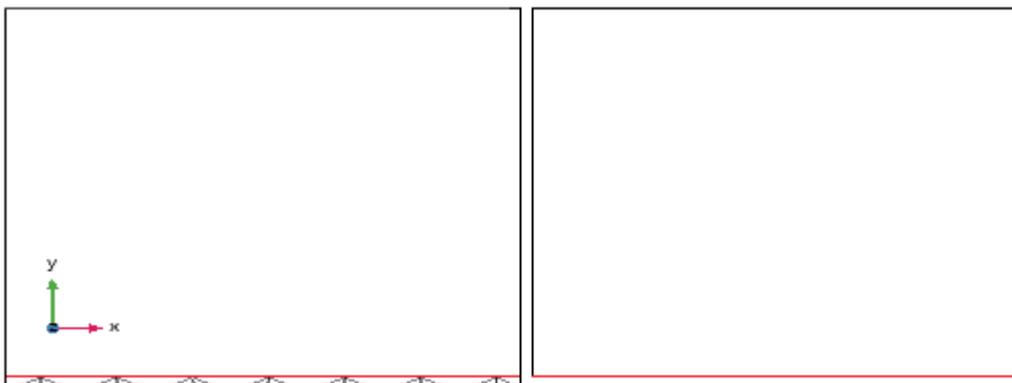


Figura 5.1: Piani xy che mostrano a sinistra la superficie scabra, con elementi rugosi di forma conica, mentre a destra la superficie liscia.

Come mostrato in figura 5.2, la geometria studiata consiste in una regione parallelepipedica dove sul piano inferiore xz sono stati predisposti le due superfici di studio. Su quello superiore, invece, vi è la regione di ingresso del fluido, mentre sulle pareti xy viene imposta la condizione di periodicità e sulle pareti zy vengono imposte la condizione di simmetria, in fronte, e l'uscita del flusso sul retro.

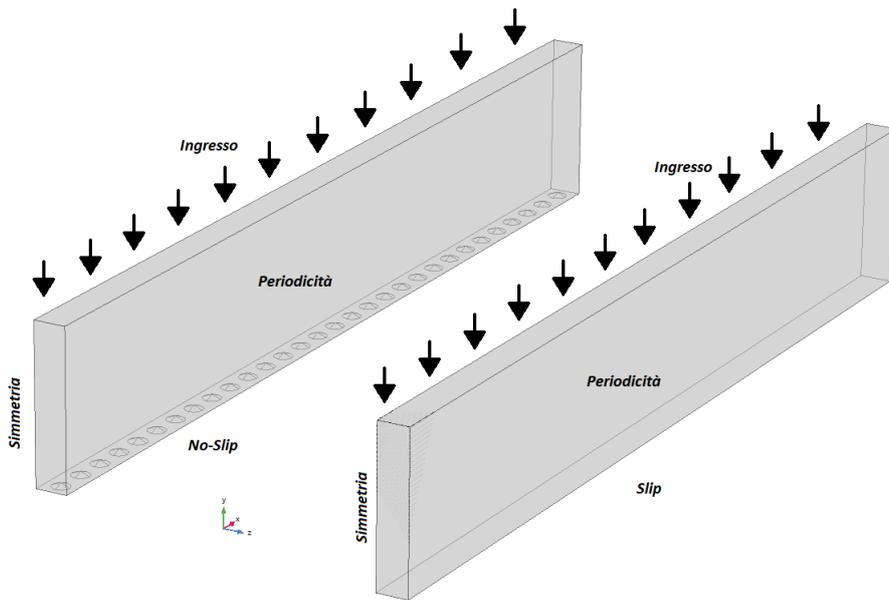


Figura 5.2: Illustrazione delle geometrie e delle rispettive condizioni al contorno applicate.

Le condizioni applicate sui piani yz vengono imposte per semplificare lo studio del problema completo del flusso di Hiemenz, il quale prevede un piano xz infinito verso il retro, che simuliamo con la condizione di outlet a pressione nulla, e una simmetria lungo il piano in fronte che viene appunto risolta applicando la condizione di simmetria (Fig 5.3).

Un'ulteriore semplificazione viene fatta sulle componenti di velocità del flusso, considerando lo sviluppo del fluido solo lungo le componenti x e y e presenterà un andamento iperbolico con punto di ristagno nell'origine degli assi (Fig. 5.3). Per quanto riguarda la geometria si è scelta una forma conica con rapporto $H/D = 0.1$, con conseguenti valori di $\lambda = 0.05058$ e $m_{12} = 0.0011$ con un valore di ϵ pari a 0.2 e $Re = 25$.

Per poter confrontare l'accuratezza delle soluzioni sono stati risolti tre casi di Hiemenz: superficie scabra, parete fittizia con condizioni effettive al primo ordine e parete fittizia con condizioni effettive al secondo ordine.

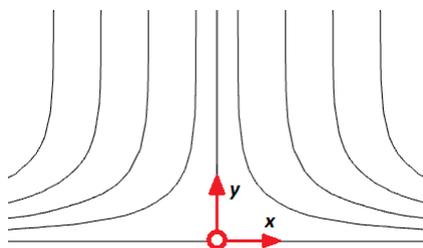


Figura 5.3: Flusso di Hiemenz completo con indicato punto di ristagno nell'origine degli assi.

Come parametro, è stata valutata la velocità media lungo una linea, $z = 0$, nel piano xz corrispondente a $Y = 0$, ovvero dove sono state implementate le condizioni effettive.

Come si può notare dai grafici della figura 5.4, considerando solo gli andamenti espressi in nero, i risultati ottenuti sono molto accurati, con una precisione maggiore per le condizioni espresse al secondo ordine che quasi coincidono con la soluzione per parete scabra.

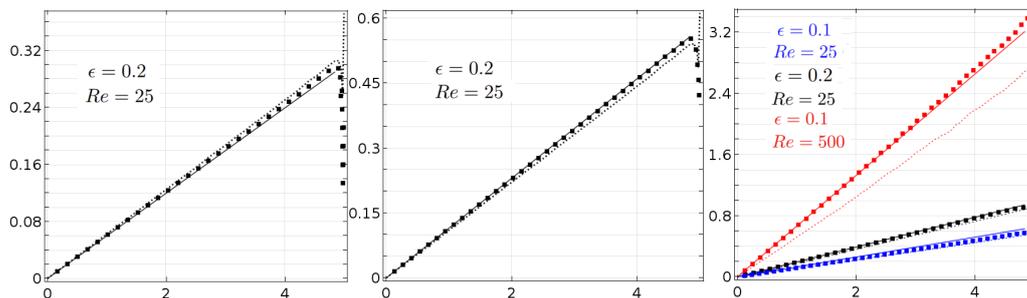


Figura 5.4: Da sinistra a destra, soluzioni per H/D uguale a 0,1 0,2 e 0,4. Con linea continua vengono individuate le soluzioni relative alla superficie scabra, linea tratteggiata per quelle relative alla parete fittizia con condizioni effettive al primo ordine e a punti per quelle del secondo ordine.

L'accuratezza delle soluzioni può essere valutata variando ϵ e il numero di Reynolds macroscopico. Infatti, le equazioni relative alla quantità di moto sono state semplificate considerando il numero di Reynolds microscopico come un numero molto piccolo (4.3), che risulta essere proprio espresso in funzione di questi due valori. Come è possibile notare nella figura 5.3 a destra, se abbassassimo ϵ (andamento espresso in blu) otterremmo un aumento della precisione ad entrambi gli ordini e viceversa se aumentassimo ϵ . Se invece aumentassimo il numero di Reynolds (andamento espresso in rosso), al primo ordine otterremmo delle soluzioni molto distanti da quelle

relative alla superficie scabra, ma un netto miglioramento si ha imponendo invece le condizioni al secondo ordine, seppur di minor precisione rispetto a valori di Reynolds più bassi.

Dalla figura 5.4 si può però notare che in prossimità dell'uscita, le soluzioni sono di pessima qualità. Questo fenomeno è dovuto in parte alla bassa qualità delle mesh, ma , prevalentemente dalle condizioni al contorno applicate alla parete di uscita che, insieme alla lunghezza stessa del canale, non rispecchiamo la lunghezza infinita della parete xz che il problema richiede.

5.2 Canale con scalino

In questo caso studiamo un canale con gradino, dove gli elementi di rugosità, sempre conica, sono disposti su più file lungo la parete inferiore successiva al gradino.

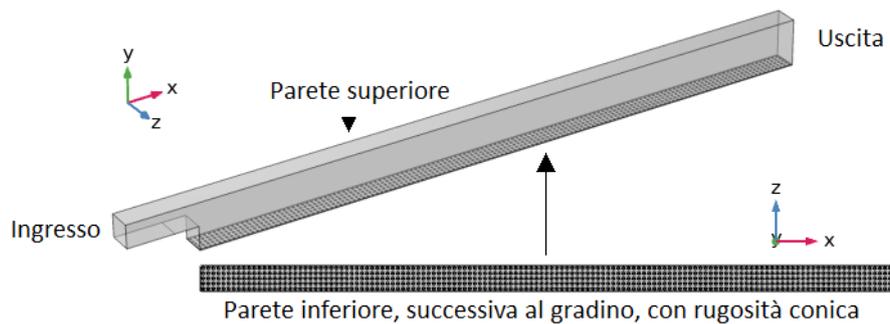


Figura 5.5: Rappresentazione del dominio e della geometria studiata.

La superficie rugosa si sviluppa nella regione compresa fra $3 < X < 25$ e $0 < Z < 1$. Il flusso entra nella superficie yz , che precede il gradino, con campo di moto imposto secondo le componenti:

$$\begin{aligned} U &= 4(Y - 1)(2 - Y) \\ V &= 0 \\ W &= 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

per poi defluire nella parete opposta.

Per quanto riguarda la superficie superiore, ad essa viene applicata la condizione di *no-slip* e stessa condizione per le superfici inferiori.

Ovviamente, la parete con scabrezza verrà sostituita dalla parete fittizia, sulla quale verranno imposte le condizioni effettive.

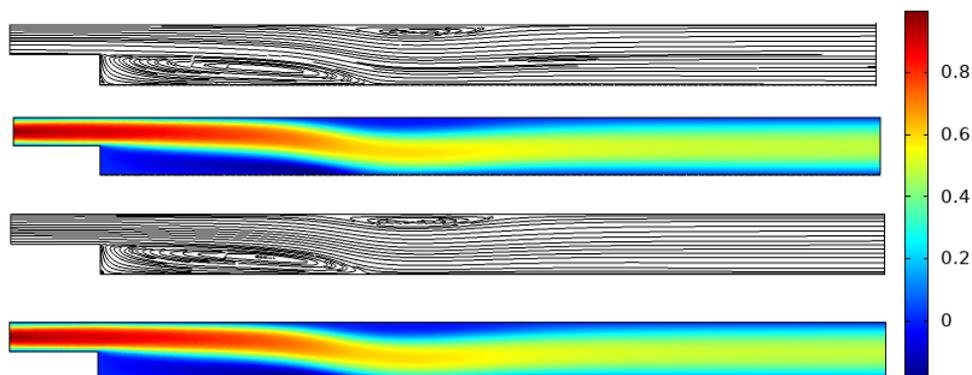


Figura 5.6: Confronto delle soluzioni per parete scabra (le prime due dall'alto) e per parete fittizia.

Nella figura 5.7, viene considerato il caso per $\epsilon = 0.2$ e $Re = 500$ dove le condizioni effettive applicate sono quelle relative al secondo ordine. Com'è possibile notare dalla figura 5.6, i campi di velocità, del gradino con parete scabra e parete fittizia, sono estremamente simili. A conferma della nostra ipotesi si può notare in figura 5.7, che la velocità media del flusso, valutata a $Y=0$ hanno un andamento pressoché sovrapponibile, a conferma dell'ottima approssimazione delle condizioni effettive al secondo ordine.

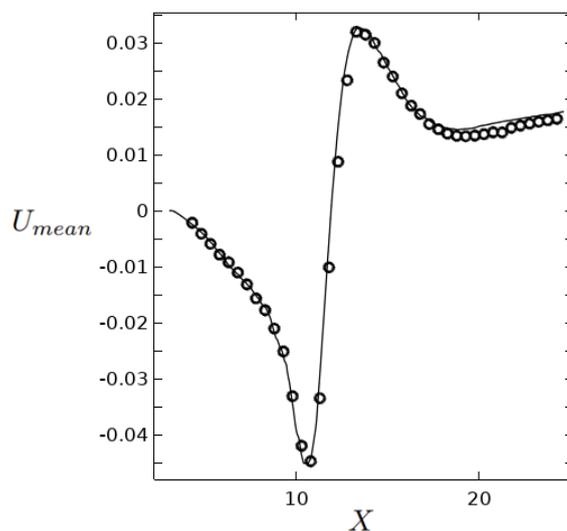


Figura 5.7: Confronto velocità media del flusso, valutata sul piano a $Y=0$, fra caso con parete fittizia (linea continua) e con parete scabra (cerchi).

Capitolo 6

Conclusioni e lavori futuri

La presente tesi di laurea ha dunque dimostrato un'ottima accuratezza delle condizioni al contorno effettive, fino al secondo ordine, da applicare ad una parete liscia in sostituzione ad una parete scabra, grazie all'utilizzo della teoria dell'omogeneizzazione.

In futuro vorremmo verificare l'accuratezza delle condizioni effettive per flussi complessi, come flussi instabili per numeri di Reynolds medi e alti. Sono già state effettuate alcune simulazioni per un flusso turbolento su un canale con superficie scabra e sono stati trovati risultati soddisfacenti per condizioni effettive applicate ad un canale con superficie scabra. In questo caso, è stato scelto un numero di Reynolds relativamente basso, ovvero 193, basato sulla velocità d'attrito calcolata sulla parete e 227 sulla parete fittizia. Alcuni risultati delle componenti di velocità istantanea di fluttuazione sono forniti nella figura 6.1. Questi risultati dimostrano che le fluttuazioni della turbolenza modificheranno il flusso del fluido sovrastante. Il nostro obiettivo è ridurre la resistenza all'attrito, di una superficie, in caso di flusso turbolento.

Sarebbe interessante verificare l'effetto di vari numeri di Reynolds sulla lunghezza di ricircolo della bolla che compare dopo il gradino all'interno del canale con scalino (visibile in Fig. 5.6 nella prima e terza immagine).

Durante questa trattazione ho appreso importanti nozioni per la fluidodinamica computazionale (CFD) attraverso l'uso di programmi come COMSOL Multiphysics[®] v5.5 [6] e Gmsh [10], oltre ad altri software, come Salome e OPENfoam, che non hanno però contribuito a questo lavoro. Per la stesura della tesi è stato anche necessario l'apprendimento del linguaggio di markup LaTeX.

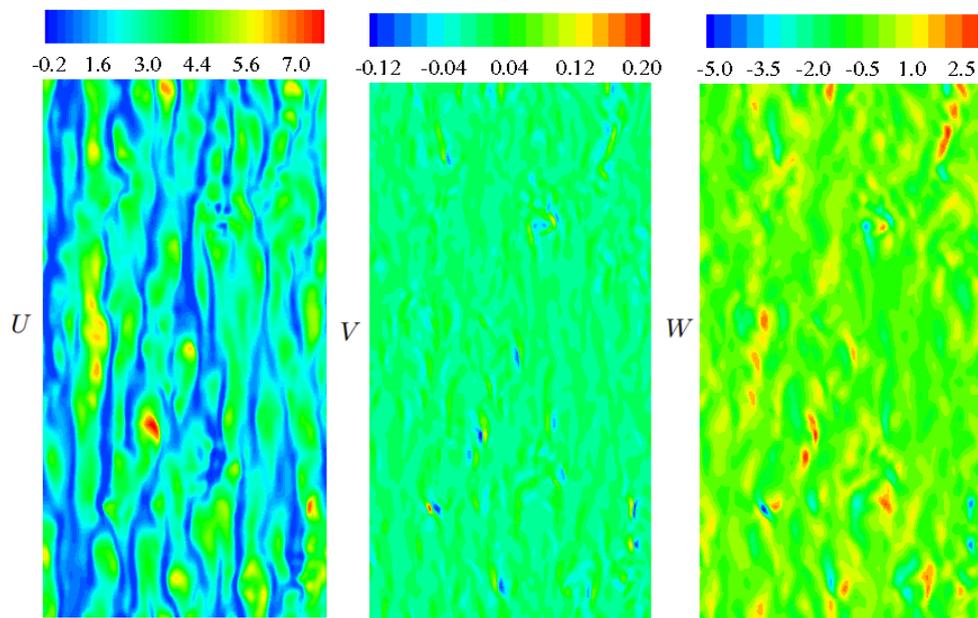


Figura 6.1: Grafici di superficie delle componenti di velocità lungo l'asse x (a sinistra), normale alla parete (al centro) e lungo l'asse z (a destra) calcolate sulla parete fittizia nel caso del canale.

Bibliografia

- [1] I. Babuška. Homogenization and its application. mathematical and computational problems. In *Numerical solution of partial differential equations–III*, pages 89–116. Elsevier, 1976.
- [2] A. Bottaro. Flow over natural or engineered surfaces: an adjoint homogenization perspective. *Journal of Fluid Mechanics*, 877, 2019.
- [3] Y.A. Çengel, J.M. Cimbala, G. Cozzo, and C. Santoro. *Meccanica dei fluidi*. Collana di istruzione scientifica. McGraw-Hill Education, 2015.
- [4] Y.-T. Cheng and D.E. Rodak. Is the lotus leaf superhydrophobic? *Applied Physics Letters*, 86(14):144101, 2005.
- [5] K.-S. Choi. The rough with the smooth. *Nature*, 440(7085):754–754, 2006.
- [6] Sweden COMSOL AB, Stockholm. *COMSOL Multiphysics® v. 5.5*. COMSOL AB, 2019.
- [7] K. Dettner and W. Peters. *Lehrbuch der Entomologie*. Springer-Verlag, 2011.
- [8] A. Ern and J.-L. Guermond. *Theory and practice of finite elements*, volume 159. Springer Science & Business Media, 2013.
- [9] J.H.M. Fransson, A. Talamelli, L. Brandt, and C. Cossu. Delaying transition to turbulence by a passive mechanism. *Physical review letters*, 96(6):064501, 2006.
- [10] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. *Gmsh*. GNU General Public, 1997-2021.
- [11] I. Kovalev. The functional role of the hollow region of the butterfly pyrameis atalanta (l.) scale. *Journal of Bionic Engineering*, 5(3):224–230, 2008.

- [12] K.F. Liem, W.E. Bemis, W.F. Walker, and L. Grande. *Functional anatomy of the vertebrates: an evolutionary perspective*. Harcourt College, 2001.
- [13] C.L.M.H. Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, 6(1823):389–440, 1823.
- [14] G.I. Taylor. Viii. stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, 223(605-615):289–343, 1923.
- [15] L. Wen, J.C. Weaver, and G.V. Lauder. Biomimetic shark skin: design, fabrication and hydrodynamic function. *Journal of Experimental Biology*, 217(10):1656–1666, 2014.
- [16] Y. Zheng, X. Gao, and L. Jiang. Directional adhesion of superhydrophobic butterfly wings. *Soft Matter*, 3(2):178–182, 2007.

Simbologia

Simboli

| | |
|----------------------------|---|
| λ | Costante di Navier o <i>slip length</i> |
| x, y, z | Coordinate microscopiche |
| X, Y, Z | Coordinate macroscopiche |
| u, z, w | Componenti di velocità microscopiche |
| U, Z, W | Componenti di velocità macroscopiche |
| Ω | Dominio funzione formulazione debole |
| a, b, c | Dati materiali |
| $f = f(x)$ | Termine sorgente |
| u_d, g | Dati limite |
| I_i | Elementi |
| V_h^3 | Spazio vettoriale |
| u_h | Funzioni continue a tratti |
| ϕ_i | Funzioni base |
| ϵ | Fattore di scala |
| l | Scala di lunghezza microscopica |
| L | Scala di lunghezza macroscopica |
| \mathcal{U} | Scala di velocità macroscopica |
| ρ | Densità |
| p | Pressione microscopica |
| P | Pressione macroscopica |
| p_∞, P_∞ | Pressione di riferimento |
| μ | Viscosità dinamica |

| | |
|----------------------------|---|
| σ, \mathbf{S} | Tensore di tensione di Cauchy o <i>stress tensor</i> |
| τ | Deviatore di tensione |
| ν | Viscosità cinematica |
| \mathcal{R} | Numero di Reynolds microscopico |
| Re | Numero di Reynolds macroscopico |
| \mathcal{F} | Forzante |
| m | Permeabilità |
| λ^y | Distanza di penetrazione della velocità verticale V |

Apici e pendici

| | |
|--------------|---------------------------------|
| i, j | Componenti di velocità e spazio |
|--------------|---------------------------------|

Abbreviazioni e acronimi

| | |
|-----------|------------------------------|
| FEM | Finite Element Method |
| CFD | Computational Fluid Dynamics |