

Tecniche multiscala per lo studio di flussi attorno a mezzi porosi

Gaetano Macrì

Relatore: Prof. Ing. Alessandro Bottaro

Correlatore: Dott. Giuseppe A. Zampogna

Università degli Studi di Genova
Scuola Politecnica

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica - Energia e Aeronautica
Anno Accademico 2014-2015

31 Marzo 2016



Indice

- 1 Introduzione
- 2 Teoria dell'omogeneizzazione
- 3 Risultati microscopici
- 4 Risultati macroscopici
- 5 Conclusioni

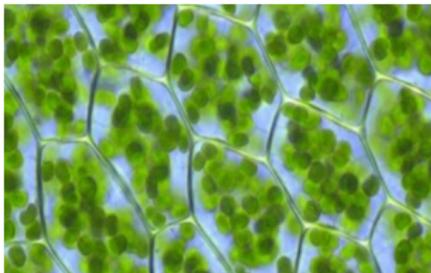
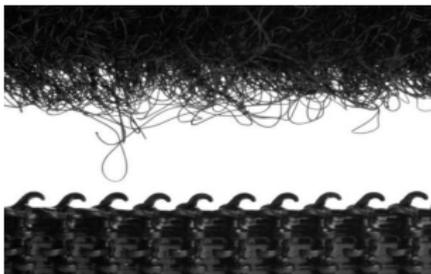


Indice

- 1 **Introduzione**
- 2 Teoria dell'omogeneizzazione
- 3 Risultati microscopici
- 4 Risultati macroscopici
- 5 Conclusioni



Biomimetica: imparare dalla natura



Indice

- 1 Introduzione
- 2 Teoria dell'omogeneizzazione**
- 3 Risultati microscopici
- 4 Risultati macroscopici
- 5 Conclusioni



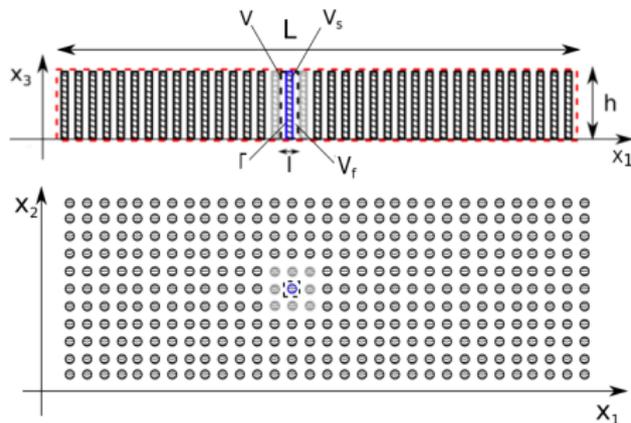
Teoria dell'omogeneizzazione

I campi di velocità e pressione sono governati dalle equazioni di Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_i} = 0$$

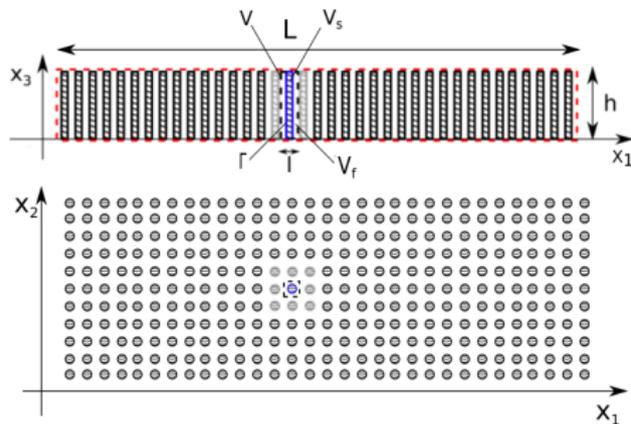
$$\rho \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{t}} + \rho \hat{u}_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} = - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_i} + \mu \hat{\nabla}^2 \hat{u}_i$$

su V_f , con $\hat{u}_i = 0$ su Γ .



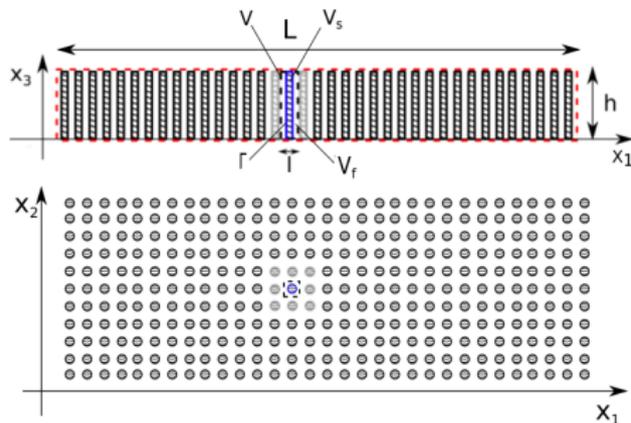
Teoria dell'omogeneizzazione

- $\frac{l}{h} = \epsilon \quad \frac{h}{L} = \epsilon \Rightarrow \frac{l}{L} = \epsilon^2$



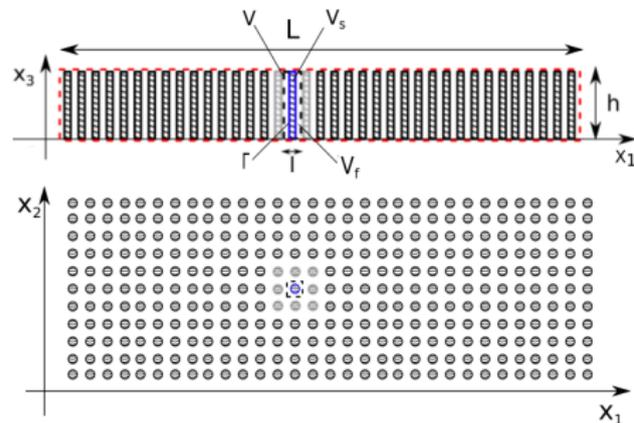
Teoria dell'omogeneizzazione

- $\frac{l}{h} = \epsilon \quad \frac{h}{L} = \epsilon \Rightarrow \frac{l}{L} = \epsilon^2$
- x_1, x_2



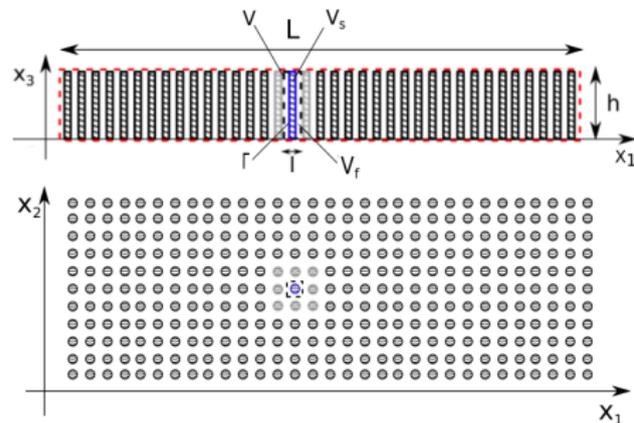
Teoria dell'omogeneizzazione

- $\frac{l}{h} = \epsilon \quad \frac{h}{L} = \epsilon \Rightarrow \frac{l}{L} = \epsilon^2$
- x_1, x_2
- $x_3' = \epsilon x_3$



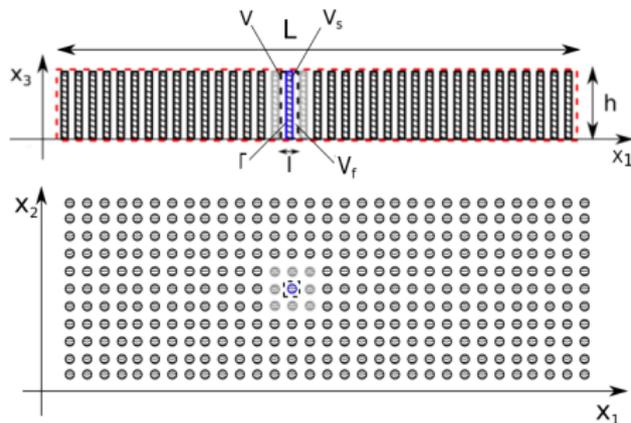
Teoria dell'omogeneizzazione

- $\frac{l}{h} = \epsilon \quad \frac{h}{L} = \epsilon \Rightarrow \frac{l}{L} = \epsilon^2$
- x_1, x_2
- $x_3' = \epsilon x_3$
- $(x_1'', x_2'') = \epsilon^2(x_1, x_2)$



Teoria dell'omogeneizzazione

- $\frac{l}{h} = \epsilon \quad \frac{h}{L} = \epsilon \Rightarrow \frac{l}{L} = \epsilon^2$
- x_1, x_2
- $x_3' = \epsilon x_3$
- $(x_1'', x_2'') = \epsilon^2 (x_1, x_2)$
- $u = u^{(0)} + \epsilon u^{(1)} + \dots$
- $p = p^{(0)} + \epsilon p^{(1)} + \dots$



Teoria dell'omogeneizzazione

Ordine principale in ϵ :

- $u_i^{(0)} = 0$ su Γ , $i = 1, 2, 3$



Teoria dell'omogeneizzazione

Ordine principale in ϵ :

- $u_i^{(0)} = 0$ su Γ , $i = 1, 2, 3$
- $\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, 2$



Teoria dell'omogeneizzazione

Ordine principale in ϵ :

- $u_i^{(0)} = 0$ su Γ , $i = 1, 2, 3$
- $\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, 2$
- $\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, 2$



Teoria dell'omogeneizzazione

Ordine principale in ϵ :

- $u_i^{(0)} = 0$ su Γ , $i = 1, 2, 3$
- $\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, 2$
- $\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, 2$

Ordine ϵ :

- $0 = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$



Teoria dell'omogeneizzazione

Ordine principale in ϵ :

- $u_i^{(0)} = 0$ su Γ , $i = 1, 2, 3$
- $\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, 2$
- $\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, 2$

Ordine ϵ :

- $0 = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$
- $0 = -\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_3}$



Teoria dell'omogeneizzazione

Ordine ϵ^2 :

- $0 = \frac{\partial^2 u_j^{(0)}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i''} - \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2$



Teoria dell'omogeneizzazione

Ordine ϵ^2 :

- $0 = \frac{\partial^2 u_j^{(0)}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i''} - \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2$
- $0 = \frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_3'}$



Teoria dell'omogeneizzazione

Ordine ϵ^2 :

- $0 = \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i''} - \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2$
- $0 = \frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_3'}$

$$u_i^{(0)} = -K_{ij} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j''}$$

$$p^{(2)} = -A_j \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j''} + p_0^{(2)}, \quad j = 1, 2$$

$$u_3^{(0)} = -K_{33} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_3'}$$



Teoria dell'omogeneizzazione

Problema microscopico per K_{ij}

$$\begin{cases} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 K_{ij}}{\partial x_k^2} = \delta_{ij}, & i, j, k = 1, 2 \\ \frac{\partial K_{ij}}{\partial x_j} = 0, & i, j = 1, 2 \\ K_{ij} = 0 & \text{su } \Gamma, \quad i, j = 1, 2 \\ K_{ij}(x_1, x_2) & \text{periodica su } V. \end{cases}$$

Media integrale

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_f} f dx_1 dx_2 dx_3'$$

Problema microscopico per K_{33}

$$\begin{cases} \frac{\partial K_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial K_{33}}{\partial x_2^2} = -1 \\ K_{33} = 0 & \text{su } \Gamma \\ K_{33}(x_1, x_2) & \text{periodica su } V. \end{cases}$$

$$\langle u_i^{(0)} \rangle = -\langle K_{ij} \rangle \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j''}$$

$$\langle u_3^{(0)} \rangle = -\langle K_{33} \rangle \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_3'}$$



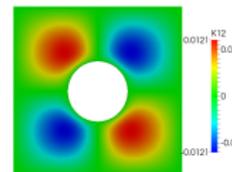
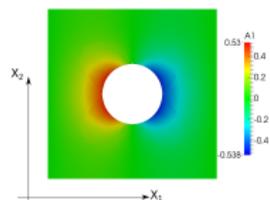
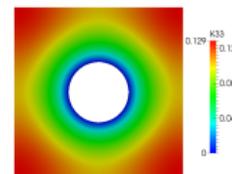
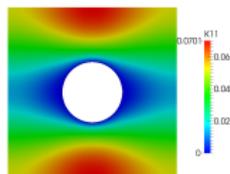
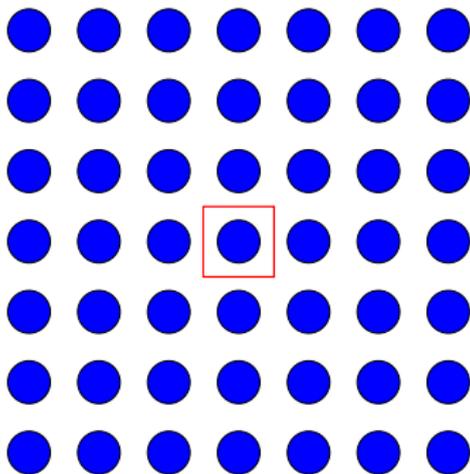
Indice

- 1 Introduzione
- 2 Teoria dell'omogeneizzazione
- 3 Risultati microscopici**
- 4 Risultati macroscopici
- 5 Conclusioni

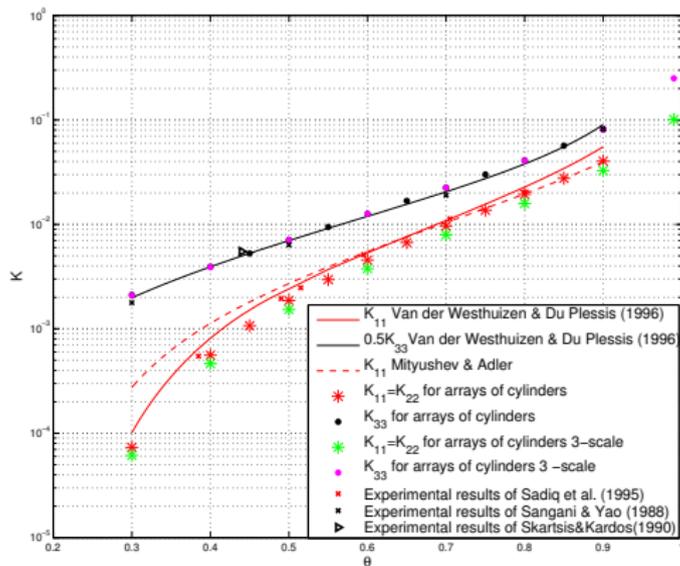


Fibre cilindriche allineate

- K_{ij} , A_j per $\vartheta = [0.3, 0.99]$:

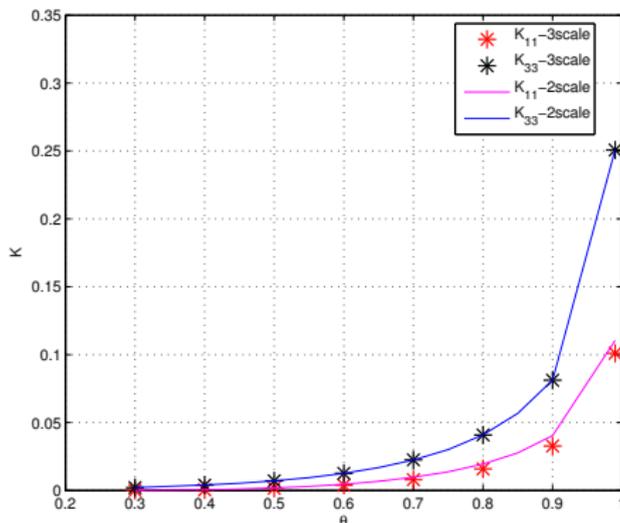


Fibre cilindriche allineate



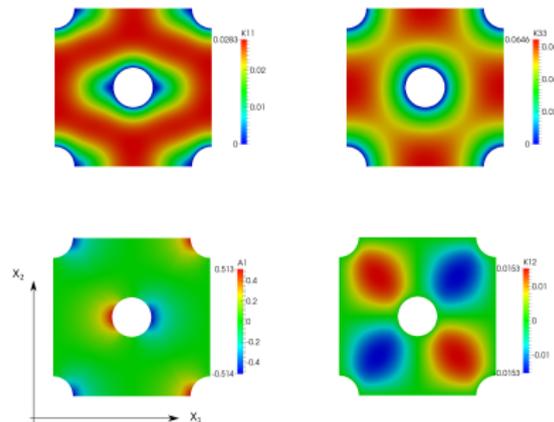
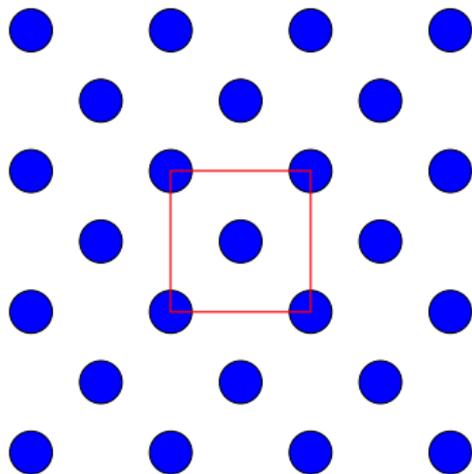
Fibre cilindriche allineate

- Confronto con teoria a due scale di Zampogna & Bottaro (2016)



Fibre cilindriche alternate

- K_{ij} , A_j per $\vartheta = 0.9$:



- Si ritrovano i valori di K_{ij} e A_j ottenuti per il caso allineato.



Indice

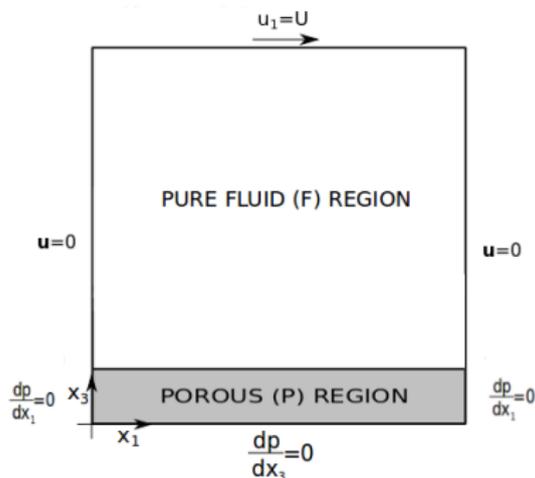
- 1 Introduzione
- 2 Teoria dell'omogeneizzazione
- 3 Risultati microscopici
- 4 Risultati macroscopici**
- 5 Conclusioni



Condizioni di interfaccia

- Per la velocità orizzontale si deduce la condizione di slip

$$u_1|_I = -\langle K_{11} \rangle \frac{\partial p}{\partial x_1} |_I$$



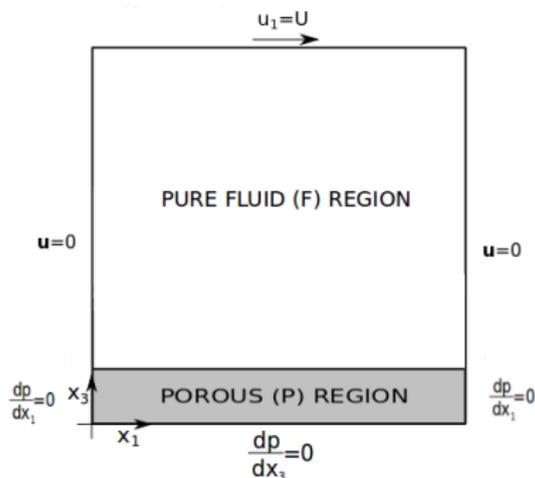
Condizioni di interfaccia

- Per la velocità orizzontale si deduce la condizione di slip

$$u_1|_I = -\langle K_{11} \rangle \frac{\partial p}{\partial x_1} |_I$$

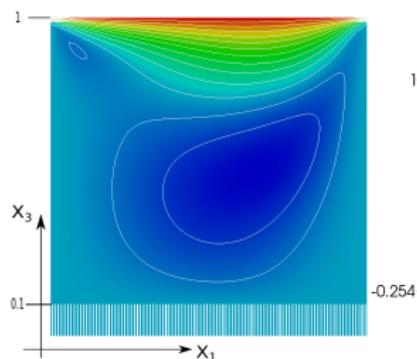
- per quella verticale utilizziamo una condizione derivata da Gopinath & Mahadevan (2011)

$$u_3|_I = -\epsilon^4 Re_L \frac{k_f}{d_f} P|_I + c$$



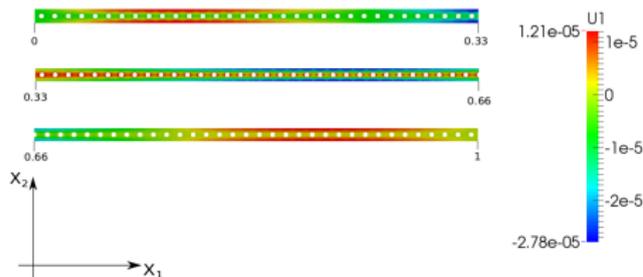
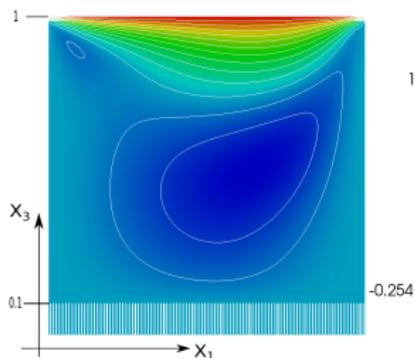
Direct Numerical Simulations (DNS)

- $u_1(x_3 = 1) = 1$



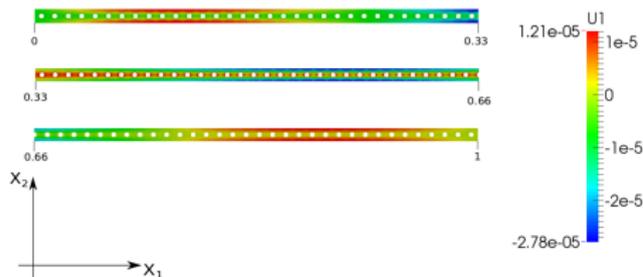
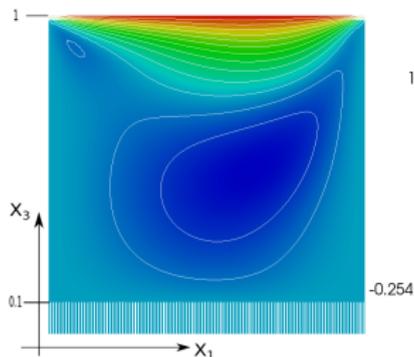
Direct Numerical Simulations (DNS)

- $u_1(x_3 = 1) = 1$
- $\mathbf{u}(x_1 = -0.5) = 0$, $\mathbf{u}(x_1 = 0.5) = 0$, $\mathbf{u}(x_3 = 0) = 0$



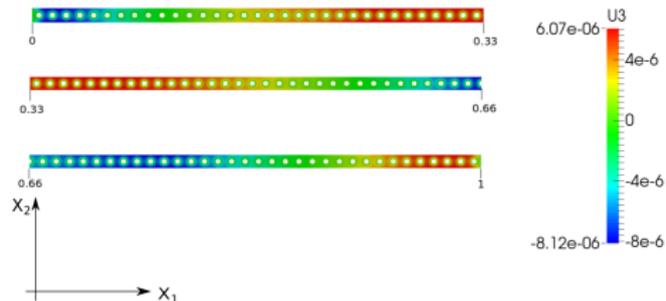
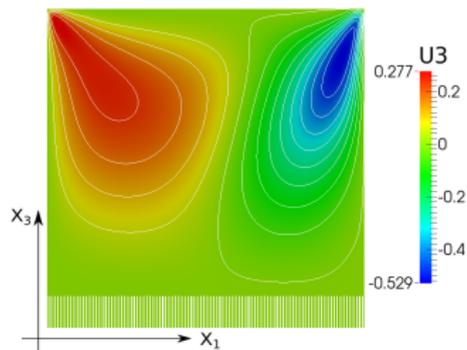
Direct Numerical Simulations (DNS)

- $u_1(x_3 = 1) = 1$
- $\mathbf{u}(x_1 = -0.5) = 0$, $\mathbf{u}(x_1 = 0.5) = 0$, $\mathbf{u}(x_3 = 0) = 0$
- $\vartheta = 0.9$, $Re_L = 100$, fibre cilindriche allineate e alternate



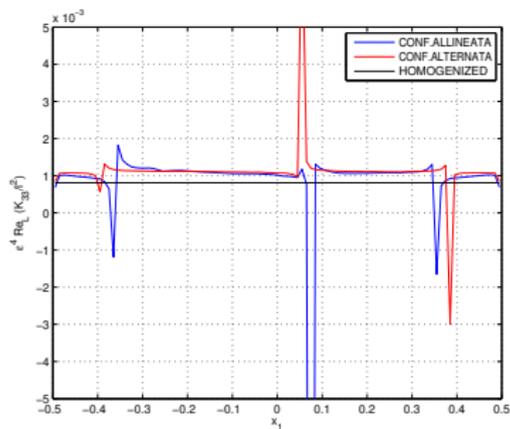
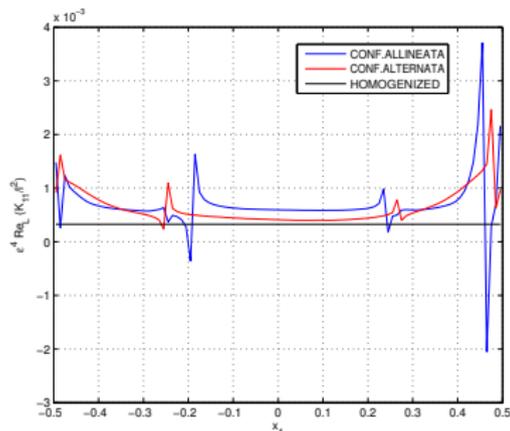
Direct Numerical Simulations (DNS)

- $u_1(x_3 = 1) = 1$
- $\mathbf{u}(x_1 = -0.5) = 0$, $\mathbf{u}(x_1 = 0.5) = 0$, $\mathbf{u}(x_3 = 0) = 0$
- $\vartheta = 0.9$, $Re_L = 100$, fibre cilindriche allineate e alternate

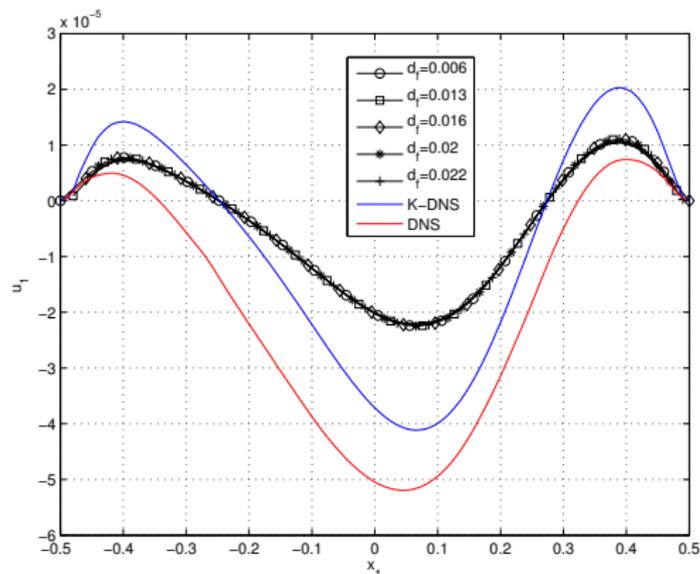


Validazione microscopica modello omogeneo

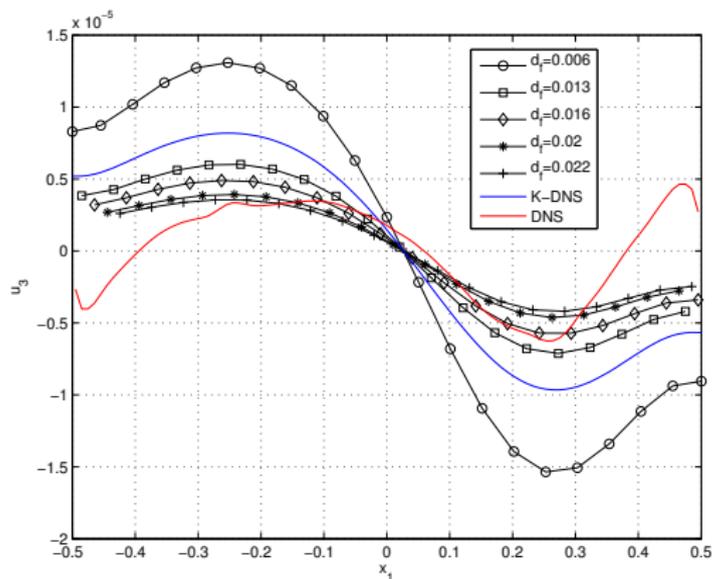
- DNS con fibre cilindriche allineate e alternate, $\langle K_{ij} \rangle$ per $\vartheta = 0.9$:



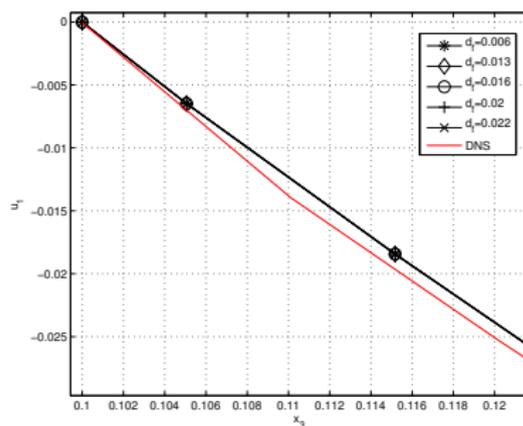
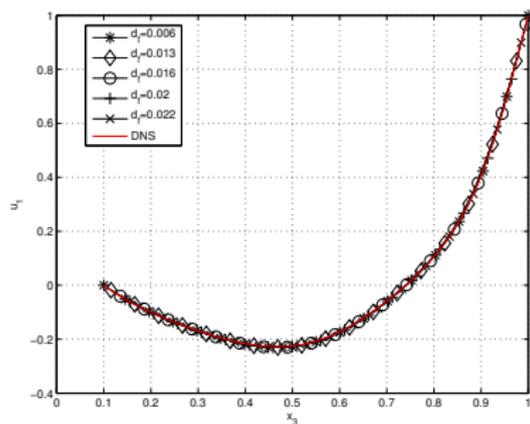
Validazione macroscopica del modello omogeneo



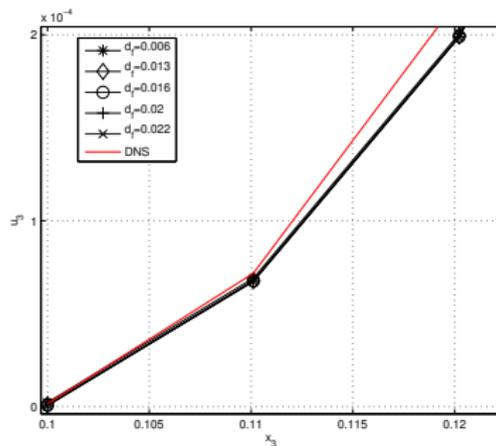
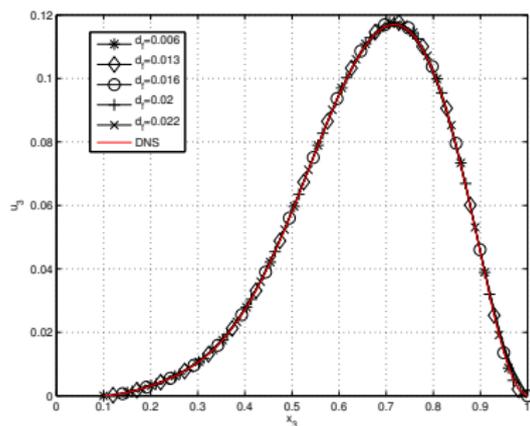
Validazione macroscopica del modello omogeneo



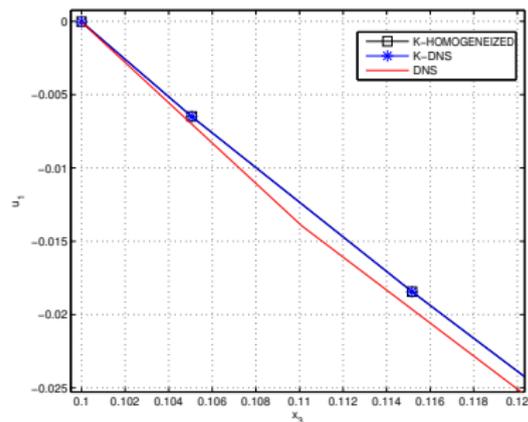
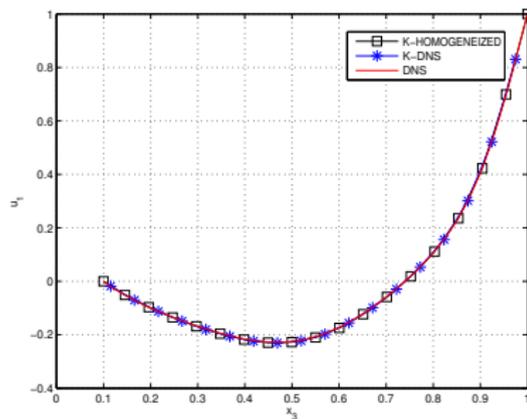
Validazione macroscopica del modello omogeneo



Validazione macroscopica del modello omogeneo



Validazione macroscopica del modello omogeneo



Indice

- 1 Introduzione
- 2 Teoria dell'omogeneizzazione
- 3 Risultati microscopici
- 4 Risultati macroscopici
- 5 Conclusioni



Conclusioni

- L'approccio a tre scale consente di considerare problemi microscopici definiti su domini bidimensionali nel caso di strutture cilindriche



Conclusioni

- L'approccio a tre scale consente di considerare problemi microscopici definiti su domini bidimensionali nel caso di strutture cilindriche
- l'errore sul tensore di permeabilità é di ordine ϵ^2



Conclusioni

- L'approccio a tre scale consente di considerare problemi microscopici definiti su domini bidimensionali nel caso di strutture cilindriche
- l'errore sul tensore di permeabilità é di ordine ϵ^2
- le condizioni di interfaccia fanno ottenere risultati qualitativamente analoghi alla DNS



Conclusioni

- L'approccio a tre scale consente di considerare problemi microscopici definiti su domini bidimensionali nel caso di strutture cilindriche
- l'errore sul tensore di permeabilità é di ordine ϵ^2
- le condizioni di interfaccia fanno ottenere risultati qualitativamente analoghi alla DNS

Sviluppi futuri:

- approccio a tre scale per mezzi poroelastici
- testare nuove condizioni di interfaccia



THREE-SCALE THEORY FOR FLOWS OVER A THIN BED OF SLENDER FIBRES

G. A. Zampogna,^{1,*} G. Macrì,¹ & A. Bottaro¹

¹Department of Civil and Environmental Engineering, University of Genova, Via Montallegro 1, 16145, Genova, Italia

*Address all correspondence to G. A. Zampogna E-mail: giuseppe.zampogna@edu.unige.it

KEY WORDS: anisotropic permeability, homogenization theory, porous-fluid interface conditions

1. THREE-SCALE THEORY

- 2 We propose a non canonical three-scale approach, developed *ad hoc* for a particular porous medium made by slender rigid fibres represented in Fig. 1 such that, if l_1, l_2 and
- 3 l_3 are the micro-, meso- and macroscale, respectively, the

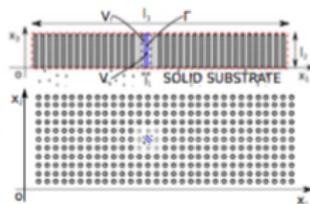


FIG. 1: Ideal sketch of a porous medium to whom a three-scale decomposition can be applied. V , the elemen-

