

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA

SCUOLA POLITECNICA

DIME

Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Energetica,
Gestionale e dei Trasporti



TESI DI LAUREA MAGISTRALE
IN
INGEGNERIA MECCANICA

**Analisi numerica e sperimentale del flusso di
Taylor-Couette**

Relatore:

Chiar.^{mo} Prof. Ing. Alessandro Bottaro

Correlatore:

Dott. Ing. Giulia Innocenti

Allievo:

Alessio Carpi

Marzo 2024

Alla mia famiglia, a R., S., W..
A.C.

Prefazione

Il flusso di Taylor-Couette è una forma di instabilità idrodinamica che si verifica in un fluido confinato tra due piastre parallele vicine tra loro oppure tra due cilindri coassiali. L'instabilità nasce nel momento in cui le piastre o i cilindri raggiungono un regime di velocità critica, rispettivamente di traslazione e di rotazione. Nel 1923 il fisico inglese G. I. Taylor fu il primo ad analizzare matematicamente questa instabilità ed a verificarla sperimentalmente tramite l'utilizzo di due cilindri coassiali posti in rotazione. Tutt'oggi questa instabilità è oggetto di studi approfonditi. Il flusso di Taylor-Couette trova applicazione in svariati campi della scienza, quali ad esempio il settore industriale e l'astrofisica.

L'obiettivo di questa trattazione è di validare sperimentalmente e numericamente i dati forniti dalla letteratura tramite l'ausilio di strumenti e software di simulazione.

Abstract

Taylor-Couette flow is a form of hydrodynamic instability that occurs in a fluid confined between two parallel plates close together or between two coaxial cylinders. Instability arises when the plates or cylinders reach a critical speed regime, respectively translation and rotation. In 1923 the English physicist G. I. Taylor was the first to analyze this instability mathematically and to verify it experimentally through the use of two coaxial cylinders placed in rotation. This instability is still the subject of in-depth studies today. The Taylor-Couette flow finds application in various fields of science, such as the industrial sector and astrophysics.

The objective of this discussion is to experimentally and numerically validate the data provided by the literature with the aid of simulation software and applications.

Ringraziamenti

Sembrava impossibile ma ce l'ho fatta. Un percorso lungo, difficile, estenuante; ma ce l'ho fatta. Questo grazie alla mia perseveranza ma non solo. Fondamentali sono stati anche i miei genitori che mi hanno supportato in ogni senso, dalla burocrazia all'emotività. "Non solo io ottengo la laurea oggi, ma anche i miei genitori!". Ringraziarli è il minimo se non riduttivo.

Non dimentico mio fratello Alex che domandava a nostra mamma se io stessi bene...mi vedeva sempre studiare...Ingegneria significa questo! In un modo o nell'altro era sinonimo di vicinanza. Allo stesso modo Fiorella.

Negli anni mi sono stati d'aiuto alcuni compagni di corso, d'altronde siamo anche umani quindi è accettabile non apprendere alla prima, anzi sarebbe strano l'opposto. L'Ingegneria è un mondo fatto di ragionamenti complessi.

Lungo il percorso universitario ho avuto modo di conoscere brave persone con cui si è condiviso momenti, opinioni e idee.

Giunto al splendido momento in cui sul libretto informatico tutte le materie comparivano di colore verde, ho potuto intraprendere la strada della tesi. Qui ho conosciuto Giulia, dottoranda presso il DICCA, che mi ha seguito dall'inizio alla fine. In laboratorio del DICCA il Prof. Alberto Lagazzo il quale è stato fondamentale per apprendere il funzionamento del reometro, per risolvere problemi e per scambio di opinioni. Infine imprescindibile è stato l'aiuto del Prof. Alessandro Bottaro che nel suo poco tempo a disposizione ci ha aiutato a risolvere problemi alquanto ostici.

Grazie davvero a tutti.

Alessio Carpi

Indice

1	Introduzione	1
2	Flusso di Couette	4
2.1	Piastre parallele infinite	4
2.2	Cilindri coassiali	6
2.3	Cilindri coassiali soluzione generale	8
3	Flusso di Taylor-Couette	9
3.1	Diagramma di stabilità	9
4	Formulazione matematica	12
4.1	Coordinate cilindriche	12
4.2	Coordinate cartesiane	15
5	Simulazione numerica	18
5.1	COMSOL Multiphysics [®]	18
5.2	Set-up numerico	19
5.2.1	Adimensionalizzazione del problema numerico	21
5.2.2	Parameters	22
5.2.3	Geometry	23
5.2.4	Laminar Flow	24
5.2.5	Mesh	26
5.2.6	Study	27
5.2.7	Results	27
5.3	Risultati delle simulazioni	29
5.3.1	Ta=600, Re=85.6	29
5.3.2	Ta=1100, Re=115.9	30
5.3.3	Ta=1600, Re=139.8	30
5.3.4	Ta=1650, Re=142	31
5.3.5	Ta=1700, Re=144.1	31
5.3.6	Ta=1750, Re=146.2	32
5.3.7	Ta=1800, Re=148.3	32
5.3.8	Ta=1850, Re=150.4	33
5.3.9	Ta=1900, Re=152.4	33
5.4	Confronto tra i contour	34
5.5	$M = f(Ta)$ numerica	38
6	Laboratorio	39
6.1	Reometro	39
6.2	Set-up sperimentale	40
6.3	Acquisizione dati	41
6.4	Risultati dei test	42
6.5	$M = f(Ta)$ sperimentale	47

7	Confronto tra analisi numerica e sperimentale	48
8	Conclusioni	49
	Simbologia	50

1 Introduzione

Il flusso di Couette è un campo di moto semplice risolvibile in modo esatto dalle equazioni di Navier-Stokes:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -\nabla P + \rho g + \mu \nabla^2 U, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot U = 0. \quad (1.2)$$

Questo flusso è possibile ottenerlo ad esempio tra due piastre parallele, vicine tra loro, di cui una in movimento, oppure tra due cilindri coassiali posti in rotazione (Fig. 1.1).

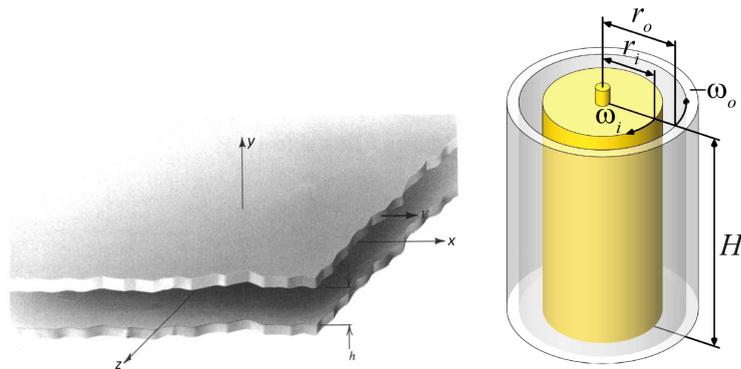


Fig. 1.1: Esempi per ottenere flusso di Couette

Il flusso di Couette è di tipo laminare, tuttavia raggiunta una determinata velocità critica il flusso diventa instabile e caratterizzato da strutture vorticosi. Tale fenomeno è stato analizzato nello specifico dal fisico inglese Geoffrey Ingram Taylor e da molti altri fisici nell'arco di trecento anni [1]. L'analisi di questa forma di instabilità idrodinamica, chiamata flusso di Taylor-Couette, ha permesso una migliore comprensione di una moltitudine di argomenti che spaziano dall'ingegneria industriale all'astrofisica. Con il flusso di Couette ad esempio è possibile caratterizzare sperimentalmente i fluidi in termini di viscosità tramite l'uso dello strumento chiamato reometro (Fig. 1.2).



Fig. 1.2: Reometri della Hanton Paar

In figura 1.3 vengono mostrate differenti configurazioni del reometro per la misurazione della viscosità del fluido.

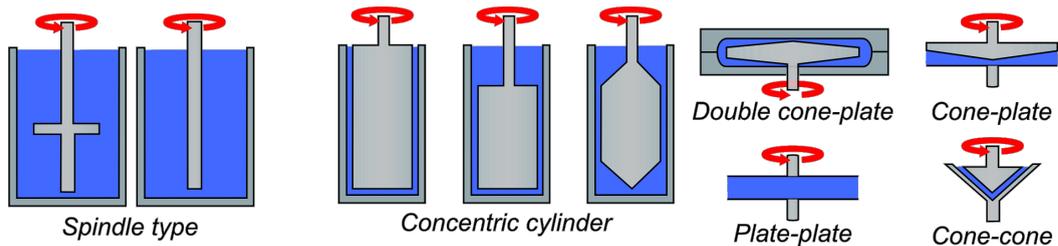


Fig. 1.3: Configurazioni del reometro per la misurazione della viscosità del fluido (in blu). L'albero rotante viene collegato al reometro e posto in rotazione

Nel settore farmaceutico il flusso di Taylor-Couette è utilizzabile in uno specifico reattore per la sintesi di nanoparticelle silicee su larga scala [2] in modo da aumentarne la produzione mantenendo elevata l'efficienza quindi con riduzione dei costi e degli sprechi di materiale (Fig. 1.4).

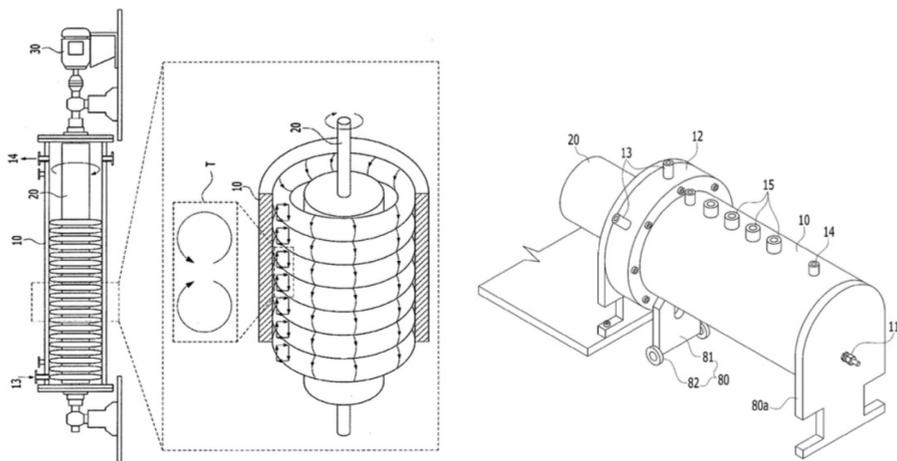


Fig. 1.4: Reattore a flusso Taylor-Couette

Questa instabilità idrodinamica viene anche utilizzata nell'osmosi inversa (RO) per il trattamento e recupero dell'acqua. Questo metodo viene utilizzato anche in condizioni di microgravità, ad esempio in orbita terrestre nella stazione spaziale ISS [3, 4, 5] (Fig. 1.5).

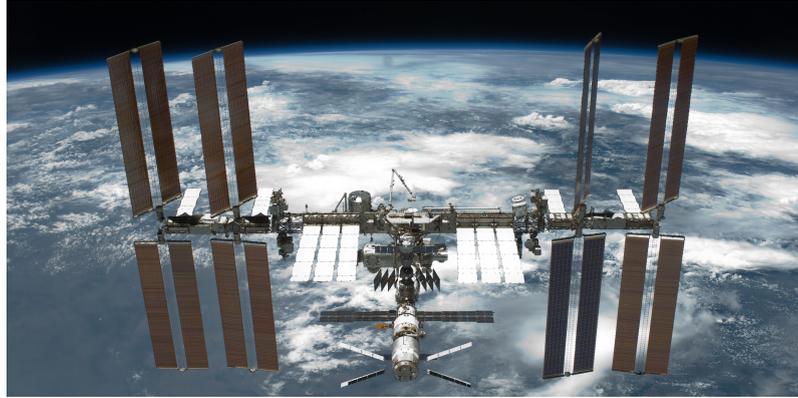


Fig. 1.5: International Space Station - ISS. Foto catturata dallo Space Shuttle Endeavour nella missione STS-134

Lo studio del flusso di Taylor-Couette ha permesso la comprensione di sistemi astrofisici in rotazione [6] quali ad esempio i dischi di accrescimento dei buchi neri (Fig. 1.6).

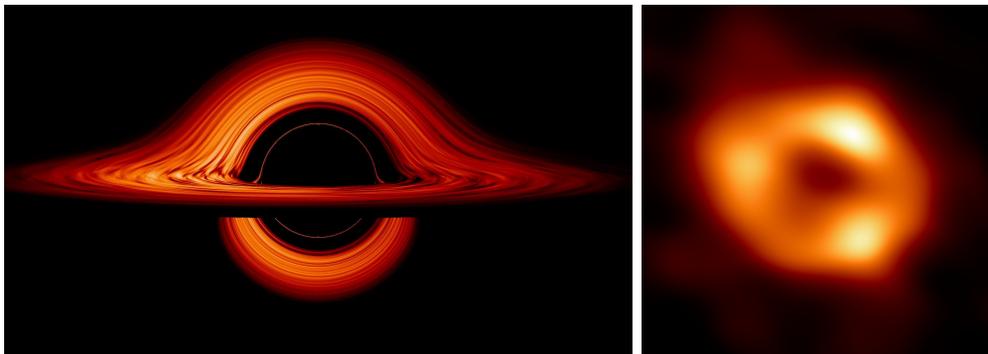


Fig. 1.6: Buco nero. Un rendering (a sinistra). La "foto" dell'ombra del buco nero Sagittarius A al centro della Via Lattea effettuata dall'Event Horizon Telescope EHT e pubblicata nel 2022 (a destra). Il disco di accrescimento viene rappresentato con sfumature giallo-arancio*

2 Flusso di Couette

2.1 Piastre parallele infinite

Si considerino due piastre parallele infinite poste a distanza h . La piastra superiore è in moto con velocità V , la piastra inferiore è fissa. Tra le due piastre è presente un fluido (Fig. 2.1).

Vengono assunte le seguenti ipotesi:

- stazionario
- incomprimibile
- flusso laminare in direzione x
- componente di velocità in direzione y nulla
- fluido Newtoniano con proprietà costanti
- gravità in direzione z
- nessun gradiente di pressione applicato eccetto quello generato dalla gravità
- campo di velocità bidimensionale ($w = 0$ e $\partial/\partial z = 0$)

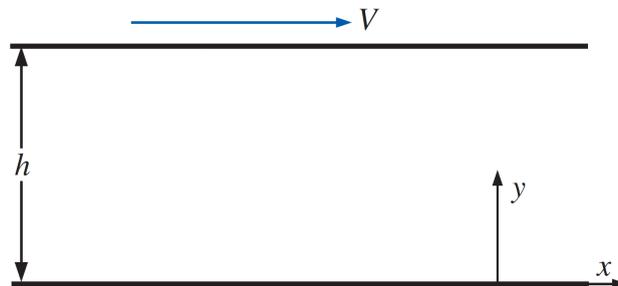


Fig. 2.1: Piastre parallele

Si impongono le seguenti condizioni al contorno:

- In $y = 0$ si ha $u = v = w = 0$
- In $y = h$ si ha $u = V$ e $v = w = 0$

Dall'equazione di continuità in coordinate cartesiane per flusso incomprimibile:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.1)$$

si ottiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.2)$$

ovvero flusso completamente sviluppato ($u = u(y)$).

Di seguito si ottengono le soluzioni delle equazioni di Navier-Stokes in coordinate cartesiane.

In direzione x :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (2.3)$$

si ottiene:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 0. \quad (2.4)$$

In direzione y :

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (2.5)$$

si ottiene:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (2.6)$$

ovvero $P = P(z)$.

In direzione z :

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (2.7)$$

si ottiene:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g_z. \quad (2.8)$$

Integrando la 2.4 e applicando le condizioni al contorno si ottiene:

$$u = V \frac{y}{h}, \quad (2.9)$$

ossia una distribuzione lineare di velocità (Fig. 2.2).

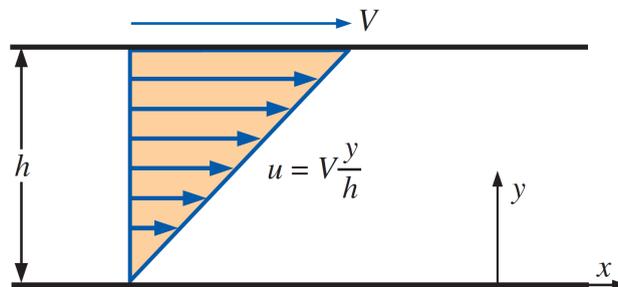


Fig. 2.2: Distribuzione di velocità tra piastre parallele

Integrando la 2.8 si ottiene una distribuzione idrostatica di pressione lungo z . Dal tensore dello sforzo viscoso è possibile ricavare la tensione tangenziale agente nella piastra inferiore e opposta all'asse x :

$$\tau_{yx} = \mu \frac{V}{h}. \quad (2.10)$$

2.2 Cilindri coassiali

La soluzione del flusso di Couette è applicabile anche al caso di due cilindri coassiali rotanti (Fig. 2.3) dove nell'intercapedine d vi è un fluido. Il valore di d deve essere molto piccolo ossia $(r_o - r_i) \ll r_o$.

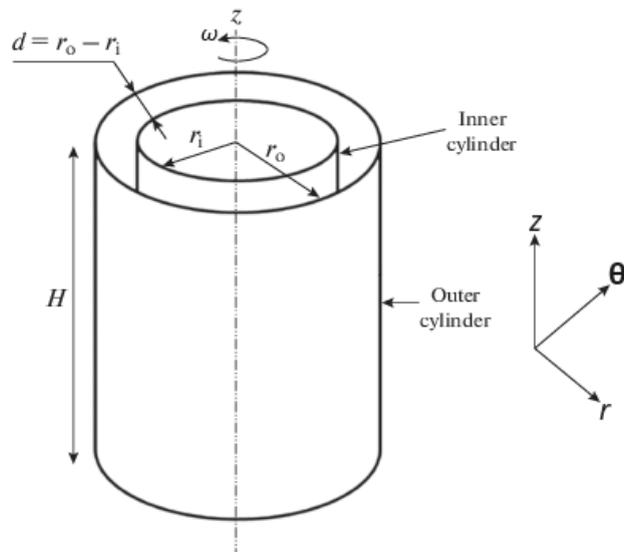


Fig. 2.3: Cilindri coassiali

Si assumono le seguenti ipotesi:

- stazionario
- lunghezza cilindri infinita ($H \rightarrow \infty$)
- direzione del flusso solo in direzione θ
- velocità v_θ e pressione variano esclusivamente lungo r , quindi indipendenti da θ e z
- gravità in direzione z
- proprietà del fluido nell'intercapedine d costanti.

Dall'equazione di continuità in coordinate cilindriche:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

si ottiene:

$$\frac{1}{r} \frac{d(rv_r)}{dr} = 0.$$

Dall'equazione di Navier-Stokes nella direzione θ espressa in coordinate cilindriche:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = \\ = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

si ottiene:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_\theta}{dr} \right) = \frac{v_\theta}{r^2},$$

ossia una ODE lineare del secondo ordine la cui soluzione è:

$$v_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r}, \quad (2.11)$$

con $r_i \leq r \leq r_o$. Le costanti A e B valgono rispettivamente:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\omega_o r_o^2 - \omega_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2}, \\ B &= \frac{(\omega_o - \omega_i) r_i^2 r_o^2}{r_o^2 - r_i^2}. \end{aligned}$$

Dall'equazione di Navier-Stokes in coordinate cilindriche in direzione r si ottiene:

$$-\rho \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{dp}{dr}; \quad (2.12)$$

sostituendo la 2.11 e risolvendo si ricava la distribuzione di pressione:

$$p(r) = \rho \left[\frac{A^2 r^2}{2} - \frac{B^2}{2r^2} + 2AB \ln(r) \right]. \quad (2.13)$$

Sul cilindro interno agisce lo sforzo viscoso $[(-\tau_{r\theta})]_{r=r_i}$ per unità di area nella direzione θ su un piano perpendicolare alla direzione r . Quindi per ottenere il momento torcente per unità di lunghezza agente sul cilindro interno basta moltiplicare lo sforzo viscoso per il perimetro e il raggio del cilindro interno:

$$M_i = [(-\tau_{r\theta})]_{r=r_i} \cdot 2\pi r_i \cdot r_i = \left[\mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right]_{r=r_i} \cdot 2\pi r_i^2 = \left[\frac{2\mu r_i^2 r_o^2 (\omega_o - \omega_i)}{r^2 (r_o^2 - r_i^2)} \right]_{r=r_i} \cdot 2\pi r_i^2,$$

ossia:

$$M_i = 4\pi\mu r_i^2 r_o^2 \frac{\omega_o - \omega_i}{r_o^2 - r_i^2}. \quad (2.14)$$

Mentre per il cilindro esterno:

$$M_o = -M_i. \quad (2.15)$$

Il problema dei cilindri coassiali venne originariamente risolto da Stokes nel 1845 [7] ma approfondito da Taylor nel 1923 dove ne studio la stabilità [8].

2.3 Cilindri coassiali soluzione generale

La soluzione per il flusso di Couette tra cilindri coassiali visto nel capitolo precedente è valida per cilindri aventi rapporto $\phi = H/d$ molto alto o tendente all'infinito. Nel momento in cui questo rapporto diventa piccolo la soluzione si discosta e bisogna ricercare un'altra soluzione. Nel 1999 il matematico e ingegnere Michael Christopher Wendl pubblicò la soluzione $v_\theta(r, z)$ che permette di tenere conto della lunghezza dei cilindri [9]. Di seguito viene mostrato il grafico ottenuto da Wendl che permette di conoscere l'errore RMS* (o RMSE - route mean square error) tra la soluzione monodimensionale $v_\theta(r)$ e bidimensionale $v_\theta(r, z)$ (Fig. 2.4).

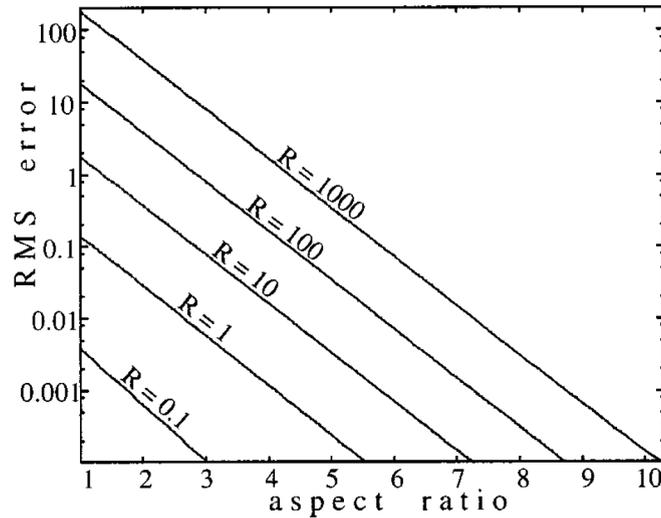


Fig. 2.4: Errore RMS vs aspect ratio $\phi = H/d$ con diversi valori del parametro $R = r_i/d$

La figura 2.4 mostra come l'errore è approssimativamente una funzione logaritmica del rapporto ϕ per un'ampia gamma di rapporti R .

* $RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(\tilde{y}_i - y_i)^2}{n}}$, \tilde{y}_i sono valori teorici, y_i sono valori osservati, n sono il numero di osservazioni.

3 Flusso di Taylor-Couette

La condizione di flusso di Couette viene rispettata finché la velocità del flusso è sufficientemente bassa, non appena si raggiunge una determinata velocità critica il flusso diventa instabile generando strutture vorticosi. Prima di Taylor molti ricercatori hanno provato, senza successo, a definire matematicamente la nascita di questa instabilità. Tutti i tentativi non hanno portato all'individuazione di un valore di velocità alla quale il flusso diventa instabile. Lo stesso Orr [10] affermò che sembrerebbe impossibile trovare matematicamente un criterio che spieghi la stabilità dei fluidi. Taylor decise a sua volta di provare a risolvere questo dilemma incentrandosi nello studio della stabilità in un problema caratterizzato da un fluido racchiuso tra due cilindri concentrici rotanti. Questa geometria permette di verificare sperimentalmente in modo più semplice i risultati ottenuti dalla teoria rispetto alle piastre parallele nelle quali è difficile rispettare le condizioni al contorno.

Secondo lo studio sulla stabilità dei fluidi inviscidi in strati concentrici di Lord Rayleigh [11] il flusso risulta instabile nel caso in cui i due cilindri ruotano in senso opposto, mentre nel caso di rotazione nello stesso senso il flusso è stabile o instabile se $\omega_o r_o^2$ è più grande o più piccolo di $\omega_i r_i^2$.

Couette [12] nel 1890 osserva sperimentalmente che il momento resistente esercitato dal fluido sul cilindro interno fisso è proporzionale alla velocità del cilindro esterno solo se la velocità è al di sotto di un certo valore. Nel momento in cui si supera questo valore la resistenza aumenta con un ritmo maggiore rispetto alla velocità. Questa variazione è data dal passaggio da condizione stabile a instabile.

Mallock [13] nel 1896 ripete l'esperimento di Couette ma con il cilindro esterno fisso e cilindro interno in rotazione. In questo caso osserva instabilità per qualsiasi velocità di rotazione del cilindro interno. Questo risultato è in accordo con la teoria inviscida di Rayleigh. Però lo stesso Rayleigh [14] nel 1913 dimostra che tutti i moti stazionari a velocità molto basse di fluidi viscosi devono essere stabili.

Taylor costruisce un apparato sperimentale in cui i due cilindri possono roteare indipendentemente l'uno dall'altro. Dimostra che il criterio di stabilità di Rayleigh per fluidi inviscidi è solo in parte rispettato nel caso di fluidi viscosi tranne nel caso in cui i due cilindri rotano in senso opposto. Dimostra anche che il disturbo che porta all'instabilità è di tipo simmetrico.

3.1 Diagramma di stabilità

Taylor dimostra matematicamente e sperimentalmente quando il flusso tra i cilindri risulta stabile o instabile al variare del regime di rotazione di entrambi i cilindri. Per meglio evidenziare il campo di stabilità e instabilità Taylor propone un diagramma avente sugli assi le velocità di rotazione dei cilindri rapportate alla viscosità cinematica. Inoltre inserisce la linea asintotica ω_i/ω_o che rappresenta la teoria inviscida di Rayleigh dimostrando come tale teoria è applicabile ai fluidi viscosi ma solo nel caso in cui i cilindri ruotano nello stesso senso (Fig. 3.1).

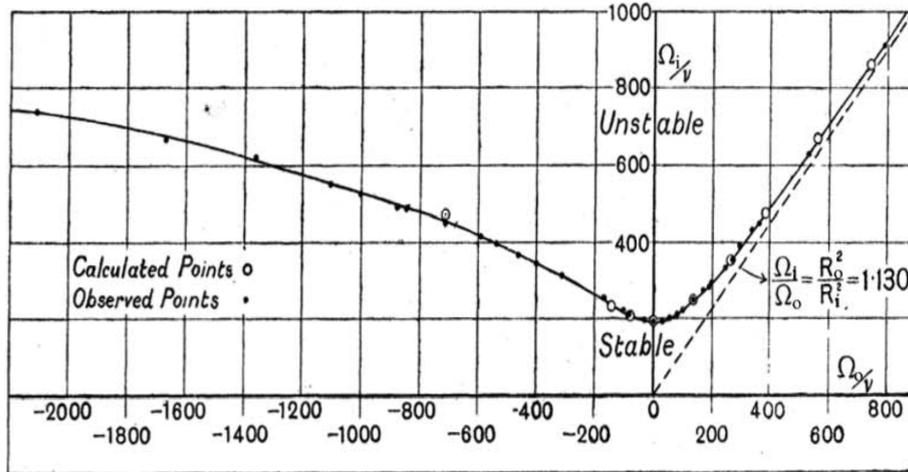


Fig. 3.1: Limite di stabilità per cilindri aventi raggio $r_i = 3.80 \text{ cm}$, $r_o = 4.035 \text{ cm}$ e altezza $H = 90 \text{ cm}$

Successivamente nel 1986 ad Austin, in Texas, riuscirono ad identificare più zone nella parte instabile, ognuna con strutture vorticoshe differenti [15] (Fig. 3.2).

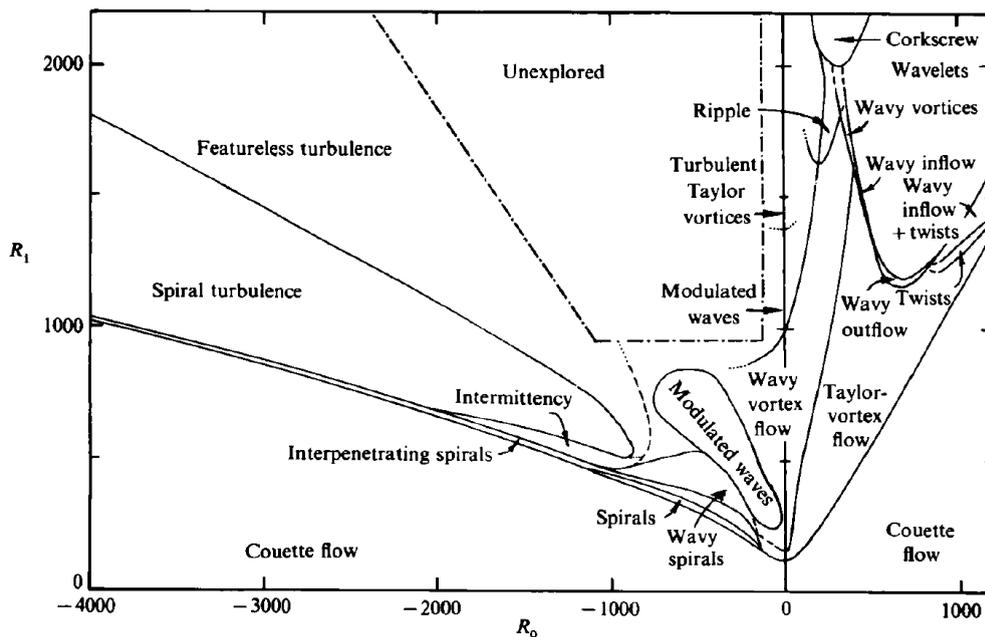


Fig. 3.2: Tipologie di strutture vorticoshe per cilindri aventi rapporto $r_i/r_o = 0.883$. I termini R_o e R_i rappresentano i numeri di Reynolds Re rispettivamente del cilindro esterno e cilindro interno. Le linee tratteggiate rappresentano confini che sono difficili da individuare dalla sola osservazione visiva in quanto non vi è nessun cambiamento improvviso nell'aspetto del flusso. Le linee punteggiate rappresentano la continuazione dei confini ma non ancora osservati

Più precisamente la comparsa di queste strutture dipendono da due parametri fondamentali ossia il rapporto tra le velocità di rotazione dei cilindri ω_o/ω_i e il rapporto tra i raggi dei cilindri r_i/r_o , combinati insieme nel numero di Taylor [15]:

$$Ta = \frac{2\omega_i^2 d^4 \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2 - \frac{\omega_o}{\omega_i}}{\nu^2 \left(1 - \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2\right)}, \quad (3.1)$$

che esprime il rapporto tra le forze inerziali (centrifughe) e le forze viscosi. Dalla 3.1 è possibile ricavare il numero di Taylor per il caso oggetto di studio di questa tesi, quindi imponendo nulla la rotazione del cilindro esterno ($\omega_o = 0 \text{ rad/s}$) si ottiene:

$$Ta = \frac{\omega_i^2 r_i^2 d^2}{\nu^2} \frac{d}{\frac{r_o + r_i}{2}}, \quad (3.2)$$

ovvero, esplicitando il numero di Reynolds del cilindro interno:

$$Ta = Re_i^2 \frac{2d}{r_o + r_i}. \quad (3.3)$$

Il passaggio dalla condizione di flusso stabile a flusso instabile nel caso in cui $\omega_o = 0 \text{ rad/s}$, avviene quando il numero di Taylor raggiunge il valore critico di 1695 [16]. Osservando la figura 3.2 e ponendosi a $Re_o = 0$, all'aumentare del regime di rotazione del cilindro interno (quindi all'aumentare di Re_i) il flusso risulta stabile ossia nelle condizioni di flusso di Couette (*CF - Couette flow*). Nel momento in cui si ha il raggiungimento del numero di Taylor critico la prima instabilità che viene a instaurarsi è caratterizzata dai vortici di Taylor (*TVF - Taylor-vortex flow*) ossia vortici toroidali contro-rotanti ripetuti lungo tutto l'asse dei cilindri. Fisicamente la nascita di questi vortici è dovuto al fatto che le forze di pressione radiali non sono più in grado di bilanciare le forze centrifughe. Aumentando ulteriormente il regime di rotazione del cilindro interno la struttura vorticoso cambia passando dai vortici di Taylor ai vortici ondulati (*WVF - wavy vortex flow*) ossia simili ai vortici di Taylor ma ondulati lungo la circonferenza (Fig. 3.3).

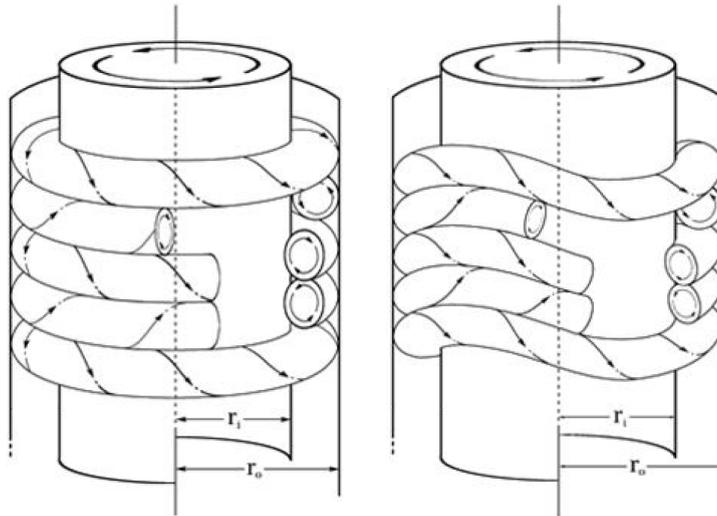


Fig. 3.3: Vortici di Taylor (a sinistra); vortici ondulati (a destra)

4 Formulazione matematica

In questo capitolo viene eseguita un'analisi macroscopica del dominio di fluido racchiuso tra le pareti dei cilindri (Fig. 4.1).

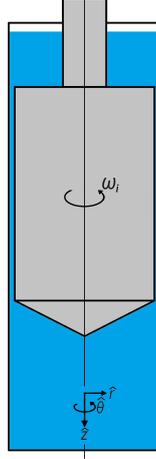


Fig. 4.1: Sistema di cilindri

4.1 Coordinate cilindriche

Di seguito vengono riportate le equazioni di continuità e di Navier-Stokes per flusso incomprimibile in coordinate cilindriche:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = \\ = - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right], \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = \\ = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right], \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \\ = - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Assumendo le seguenti ipotesi:

- assialsimmetria $\partial/\partial\theta = 0$
- stazionario $\partial/\partial t = 0$
- azioni esterne trascurabili

si ottiene:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (4.5)$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right], \quad (4.6)$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right], \quad (4.7)$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]. \quad (4.8)$$

Le equazioni 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8 vengono applicate al sistema di figura 4.1 secondo le seguenti condizioni:

- rappresentare i termini dimensionali col segno " ^ "
- rappresentare i termini di velocità e pressione tramite il metodo delle piccole perturbazioni ossia si considerano piccole variazioni di velocità e pressione rispetto ai riferimenti medi, le grandezze quindi vengono definite come la somma di una componente media e di una fluttuante. Per quanto riguarda il riferimento medio nelle componenti delle velocità compare solo nel termine di velocità lungo la coordinata θ . Questo perché il moto del fluido nello spazio tra i due cilindri è prevalentemente lungo θ di conseguenza le altre componenti medie della velocità sono assunte nulle. I termini che presentano il segno " - " rappresentano le componenti medie mentre l'apice " ' " le componenti fluttuanti.

$$v_\theta = \hat{U}_\theta = \hat{U}_\theta + \hat{U}'_\theta,$$

$$v_r = \hat{U}'_r,$$

$$v_z = \hat{U}'_z,$$

$$p = \hat{P} = \hat{P} + \hat{P}'.$$

Sostituendo si ottiene:

$$\frac{\partial \hat{U}'_r}{\partial \hat{r}} + \frac{\hat{U}'_r}{\hat{r}} + \frac{\partial \hat{U}'_z}{\partial \hat{z}} = 0, \quad (4.9)$$

$$\rho \left(\hat{U}'_r \frac{\partial \hat{U}'_r}{\partial \hat{r}} - \frac{\hat{U}'_\theta^2}{\hat{r}} + \hat{U}'_z \frac{\partial \hat{U}'_r}{\partial \hat{z}} \right) = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{r}} + \mu \left[\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\hat{r} \frac{\partial \hat{U}'_r}{\partial \hat{r}} \right) - \frac{\hat{U}'_r}{\hat{r}^2} + \frac{\partial^2 \hat{U}'_r}{\partial \hat{z}^2} \right], \quad (4.10)$$

$$\rho \left(\hat{U}'_r \frac{\partial \hat{U}'_\theta}{\partial \hat{r}} + \frac{\hat{U}'_r \hat{U}'_\theta}{\hat{r}} + \hat{U}'_z \frac{\partial \hat{U}'_\theta}{\partial \hat{z}} \right) = \mu \left[\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\hat{r} \frac{\partial \hat{U}'_\theta}{\partial \hat{r}} \right) - \frac{\hat{U}'_\theta}{\hat{r}^2} + \frac{\partial^2 \hat{U}'_\theta}{\partial \hat{z}^2} \right], \quad (4.11)$$

$$\rho \left(\hat{U}'_r \frac{\partial \hat{U}'_z}{\partial \hat{r}} + \hat{U}'_z \frac{\partial \hat{U}'_z}{\partial \hat{z}} \right) = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{z}} + \mu \left[\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\hat{r} \frac{\partial \hat{U}'_z}{\partial \hat{r}} \right) + \frac{\partial^2 \hat{U}'_z}{\partial \hat{z}^2} \right]. \quad (4.12)$$

I termini di velocità e pressione vengono adimensionalizzati rispettivamente con la velocità del cilindro interno e la pressione dinamica:

$$U_\theta = \hat{U}_\theta / (\omega_i \hat{r}_i),$$

$$U'_r = \hat{U}'_r / (\omega_i \hat{r}_i),$$

$$U'_z = \hat{U}'_z / (\omega_i \hat{r}_i),$$

$$P = \hat{P} / [\rho (\omega_i \hat{r}_i)^2].$$

Sostituendo quindi i termini dimensionali con quelli adimensionali nelle 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12 si ottiene:

$$\omega_i \hat{r}_i \frac{\partial U'_r}{\partial \hat{r}} + \omega_i \hat{r}_i \frac{U'_r}{\hat{r}} + \omega_i \hat{r}_i \frac{\partial U'_z}{\partial \hat{z}} = 0, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \rho (\omega_i \hat{r}_i)^2 \left(U'_r \frac{\partial U'_r}{\partial \hat{r}} - \frac{U_\theta^2}{\hat{r}} + U'_z \frac{\partial U'_r}{\partial \hat{z}} \right) &= \\ &= -\rho (\omega_i \hat{r}_i)^2 \frac{\partial P}{\partial \hat{r}} + \mu \omega_i \hat{r}_i \left[\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\hat{r} \frac{\partial U'_r}{\partial \hat{r}} \right) - \frac{U'_r}{\hat{r}^2} + \frac{\partial^2 U'_r}{\partial \hat{z}^2} \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \rho (\omega_i \hat{r}_i)^2 \left(U'_r \frac{\partial U_\theta}{\partial \hat{r}} + \frac{U'_r U_\theta}{\hat{r}} + U'_z \frac{\partial U_\theta}{\partial \hat{z}} \right) &= \\ &= \mu \omega_i \hat{r}_i \left[\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\hat{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \hat{r}} \right) - \frac{U_\theta}{\hat{r}^2} + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial \hat{z}^2} \right], \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \rho (\omega_i \hat{r}_i)^2 \left(U'_r \frac{\partial U'_z}{\partial \hat{r}} + U'_z \frac{\partial U'_z}{\partial \hat{z}} \right) &= \\ &= -\rho (\omega_i \hat{r}_i)^2 \frac{\partial P}{\partial \hat{z}} + \mu \omega_i \hat{r}_i \left[\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\hat{r} \frac{\partial U'_z}{\partial \hat{r}} \right) + \frac{\partial^2 U'_z}{\partial \hat{z}^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.2 Coordinate cartesiane

A questo punto si passa dalle coordinate cilindriche $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z})$ alle coordinate cartesiane (x, y, z) come mostrato in figura 4.2.

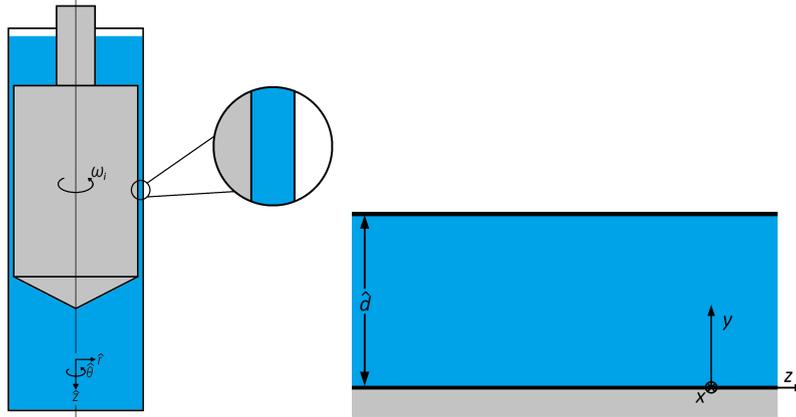


Fig. 4.2: Passaggio da coordinate cilindriche a coordinate cartesiane

In questo caso se viene rispettata la seguente condizione:

$$\hat{d} \ll \hat{r}_i, \quad (4.17)$$

è possibile applicare l'ipotesi di *narrow gap approximation*. Questa ipotesi permette di passare dalle coordinate cilindriche alle coordinate cartesiane semplificando di conseguenza l'analisi del problema. La 4.17 viene riscritta nel seguente modo:

$$d = \frac{\hat{d}}{\hat{r}_i} \ll 1, \quad (4.18)$$

dove d è la distanza adimensionale tra le pareti. Si può quindi dire che $0 \leq y \leq d$. Per poter passare dalle coordinate cilindriche alle coordinate cartesiane bisogna seguire il seguente compendio:

Coordinate cilindriche	Coordinate cartesiane
$\hat{\theta}$	$x = \hat{\theta}$
\hat{r}	$y = (\hat{r} - \hat{r}_i) / \hat{r}_i$
\hat{z}	$z = \hat{z} / \hat{r}_i$

e per quanto riguarda le derivate parziali:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{r}} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \hat{r}} = \frac{1}{\hat{r}_i} \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \hat{\theta}} = \frac{1}{\hat{r}_i} \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{z}} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \hat{z}} = \frac{1}{\hat{r}_i} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Di seguito vengono riscritte le equazioni 4.13, 4.14, 4.15 e 4.16 in coordinate cartesiane:

$$\frac{\omega_i \hat{r}_i}{\hat{r}_i} \frac{\partial U'_y}{\partial y} + \frac{\omega_i \hat{r}_i}{(1+y) \hat{r}_i} U'_y + \frac{\omega_i \hat{r}_i}{\hat{r}_i} \frac{\partial U'_z}{\partial z} = 0, \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{(\omega_i \hat{r}_i)^2}{\hat{r}_i} \left(U'_y \frac{\partial U'_y}{\partial y} - \frac{(\bar{U}_x + U'_x)^2}{(1+y)} + U'_z \frac{\partial U'_y}{\partial z} \right) &= -\frac{\rho (\omega_i \hat{r}_i)^2}{\hat{r}_i} \frac{\partial (\bar{P} + P')}{\partial y} + \\ &+ \mu \left[\frac{\omega_i \hat{r}_i}{\hat{r}_i^2} \frac{\partial^2 U'_y}{\partial y^2} + \frac{\omega_i \hat{r}_i}{\hat{r}_i^2 (1+y)} \frac{\partial U'_y}{\partial y} + \frac{\omega_i \hat{r}_i}{\hat{r}_i^2} \frac{\partial^2 U'_y}{\partial z^2} - \frac{\omega_i \hat{r}_i}{\hat{r}_i^2 (1+y)^2} U'_y \right], \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{(\omega_i \hat{r}_i)^2}{\hat{r}_i} \left(U'_y \frac{\partial U'_x}{\partial y} + \frac{U'_y (\bar{U}_x + U'_x)}{(1+y)} + U'_z \frac{\partial U'_x}{\partial z} \right) &= \\ = \mu \left[\frac{\omega_i \hat{r}_i}{\hat{r}_i^2 (1+y)} \frac{\partial U'_x}{\partial y} - \frac{\omega_i \hat{r}_i}{\hat{r}_i^2 (1+y)^2} (\bar{U}_x + U'_x) + \frac{\omega_i \hat{r}_i}{\hat{r}_i^2} \frac{\partial^2 U'_x}{\partial y^2} + \frac{\omega_i \hat{r}_i}{\hat{r}_i^2} \frac{\partial^2 U'_x}{\partial z^2} \right], \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{(\omega_i \hat{r}_i)^2}{\hat{r}_i} \left(U'_y \frac{\partial U'_z}{\partial y} + U'_z \frac{\partial U'_z}{\partial z} \right) &= \\ = -\rho \frac{(\omega_i \hat{r}_i)^2}{\hat{r}_i} \frac{\partial P'}{\partial z} + \mu \left[\frac{\omega_i \hat{r}_i}{\hat{r}_i^2 (1+y)} \frac{\partial U'_z}{\partial y} + \frac{\omega_i \hat{r}_i}{\hat{r}_i^2} \frac{\partial^2 U'_z}{\partial y^2} + \frac{\omega_i \hat{r}_i}{\hat{r}_i^2} \frac{\partial^2 U'_z}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Semplificando e raccogliendo, dalle 4.19, 4.20, 4.21 e 4.22 si ottiene:

$$\frac{\partial U'_y}{\partial y} + \frac{U'_y}{(1+y)} + \frac{\partial U'_z}{\partial z} = 0, \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \rho \omega_i^2 \hat{r}_i \left(U'_y \frac{\partial U'_y}{\partial y} - \frac{(\bar{U}_x + U'_x)^2}{(1+y)} + U'_z \frac{\partial U'_y}{\partial z} \right) &= -\rho \omega_i^2 \hat{r}_i \frac{\partial (\bar{P} + P')}{\partial y} + \\ &+ \mu \frac{\omega_i}{\hat{r}_i} \left[\frac{\partial^2 U'_y}{\partial y^2} + \frac{1}{(1+y)} \frac{\partial U'_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 U'_y}{\partial z^2} - \frac{1}{(1+y)^2} U'_y \right], \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \rho \omega_i^2 \hat{r}_i \left(U'_y \frac{\partial U'_x}{\partial y} + \frac{U'_y (\bar{U}_x + U'_x)}{1+y} + U'_z \frac{\partial U'_x}{\partial z} \right) &= \\ = \mu \frac{\omega_i}{\hat{r}_i} \left[\frac{1}{(1+y)} \frac{\partial U'_x}{\partial y} - \frac{1}{(1+y)^2} (\bar{U}_x + U'_x) + \frac{\partial^2 U'_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U'_x}{\partial z^2} \right], \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \rho\omega_i^2\hat{r}_i\left(U'_y\frac{\partial U'_z}{\partial y} + U'_z\frac{\partial U'_z}{\partial z}\right) = \\ = -\rho\omega_i^2\hat{r}_i\frac{\partial P'}{\partial z} + \mu\frac{\omega_i}{\hat{r}_i}\left[\frac{1}{(1+y)}\frac{\partial U'_z}{\partial y} + \frac{\partial^2 U'_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U'_z}{\partial z^2}\right]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Il termine $(1+y)^{-1}$ può essere sostituito col suo sviluppo di Taylor:

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + \dots \quad (4.27)$$

Considerando che $0 \leq y \leq d \ll 1$ allora la 4.27 diventa:

$$\frac{1}{1+y} \cong 1. \quad (4.28)$$

A questo punto, tenendo in considerazione la 4.28, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, facendo le dovute semplificazioni e infine considerando che:

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{r}} = \rho\frac{\hat{U}_x^2}{\hat{r}}, \quad (4.29)$$

ossia

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} = \bar{U}_x^2, \quad (4.30)$$

le 4.23, 4.24, 4.25 e 4.26 diventano:

$$\frac{\partial U'_y}{\partial y} + U'_y + \frac{\partial U'_z}{\partial z} = 0, \quad (4.31)$$

$$U'_y\frac{\partial U'_y}{\partial y} - 2\bar{U}_x U'_x + U'_z\frac{\partial U'_y}{\partial z} = -\frac{\partial P'}{\partial y} + \frac{1}{Re_i}\left[\frac{\partial^2 U'_y}{\partial y^2} + \frac{\partial U'_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 U'_y}{\partial z^2} - U'_y\right], \quad (4.32)$$

$$U'_y\frac{\partial U'_x}{\partial y} + U'_y\bar{U}_x + U'_z\frac{\partial U'_x}{\partial z} = \frac{1}{Re_i}\left[\frac{\partial U'_x}{\partial y} - (\bar{U}_x + U'_x) + \frac{\partial^2 U'_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U'_x}{\partial z^2}\right], \quad (4.33)$$

$$U'_y\frac{\partial U'_z}{\partial y} + U'_z\frac{\partial U'_z}{\partial z} = -\frac{\partial P'}{\partial z} + \frac{1}{Re_i}\left[\frac{\partial U'_z}{\partial y} + \frac{\partial^2 U'_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U'_z}{\partial z^2}\right], \quad (4.34)$$

dove

$$Re_i = \frac{\rho(\omega_i\hat{r}_i)\hat{r}_i}{\mu}, \quad (4.35)$$

rappresenta il numero di Reynolds del cilindro interno.

5 Simulazione numerica

5.1 COMSOL Multiphysics[®]

La simulazione numerica è stata eseguita tramite il software COMSOL Multiphysics[®] della compagnia privata COMSOL [17], fondata nel 1986 a Stoccolma, in Svezia. Questo programma permette di risolvere problemi di fisica e ingegneria, in particolare problemi multifisici, tramite il metodo agli elementi finiti (FEM). Il software ha quindi il compito di facilitare la risoluzione di set di equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE). All'interno di COMSOL Multiphysics[®] è inoltre presente l'Application Builder, ossia un ambiente di sviluppo integrato (IDE) che permette all'utente di implementare funzioni complesse. Inoltre il programma può essere interfacciato con una moltitudine di programmi tramite la funzione LiveLink[™], quali ad esempio Matlab[®], Simulink[®], Excel[®], SOLIDWORKS[®], AutoCAD[®], permettendo così di aumentare le potenzialità del programma. Tutto questo senza intaccare l'intuitività del programma o il flusso di lavoro. COMSOL Multiphysics[®] può essere utilizzato per problemi di:

- Elettromagnetismo
- Meccanica strutturale
- Acustica
- Meccanica dei fluidi
- Termodinamica
- Trasporto di massa
- Chimica
- Ottimizzazione

5.2 Set-up numerico

Inizialmente il programma COMSOL Multiphysics[®] permette di scegliere due metodi per poter costruire l'ambiente di lavoro (Fig. 5.1).

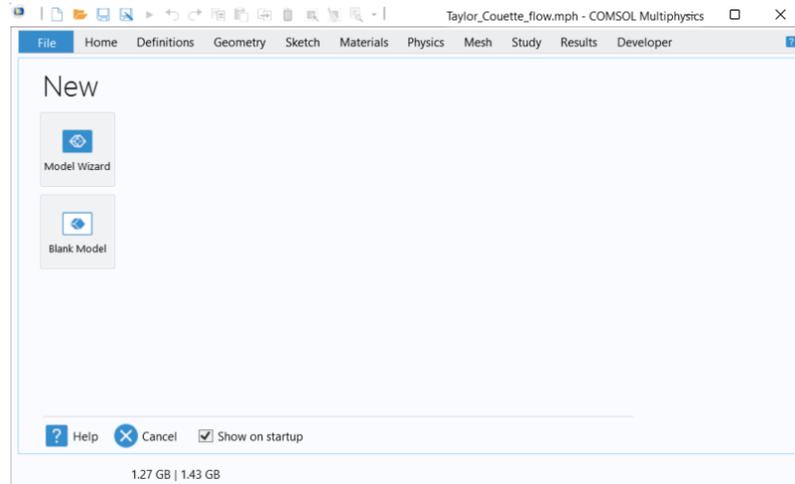


Fig. 5.1: Metodi

Il primo metodo chiamato *Model Wizard* è un metodo semplice in quanto permette all'utente di essere guidato nella costruzione dell'ambiente di lavoro, mentre nel metodo *Blank Model* l'utente è tenuto a richiamare autonomamente tutte le impostazioni necessarie allo studio del fenomeno. Nel caso di questa tesi è stato scelto il metodo *Model Wizard*.

Successivamente alla scelta del primo metodo all'utente viene chiesto quale sia la dimensione dello spazio del fenomeno da analizzare come mostrato in figura 5.2.

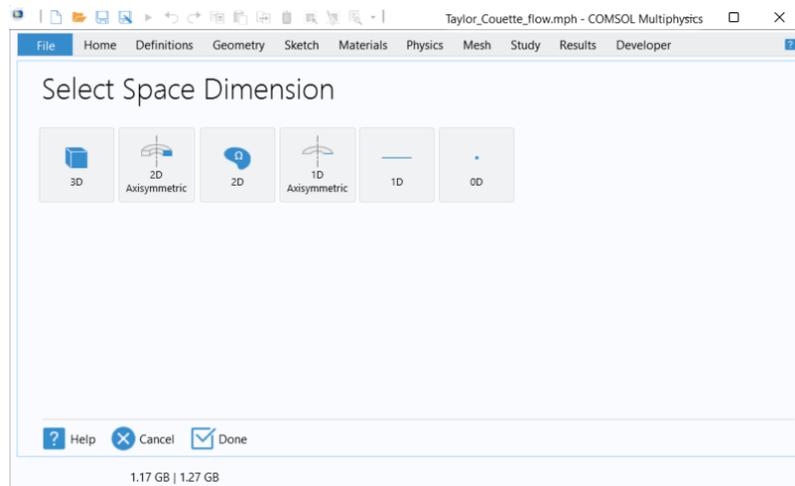


Fig. 5.2: Dimensioni dello spazio

Per l'analisi del flusso di Taylor-Couette è stato scelto lo spazio *2D Axisymmetric*. Dopo averlo selezionato il programma chiede di scegliere la fisica del fenomeno, in questo caso è stato scelto *Laminar Flow* per un fluido a singola fase (Fig. 5.3).

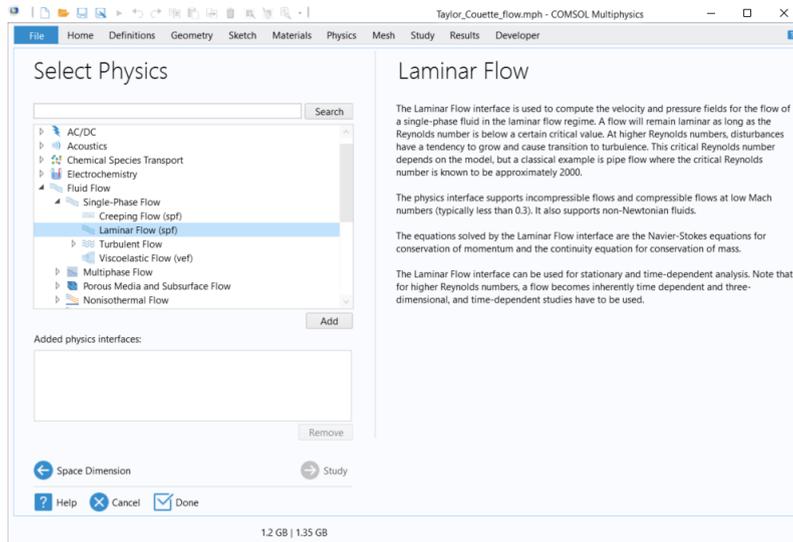


Fig. 5.3: Scelta della fisica del fenomeno

Successivamente viene chiesto la natura del fenomeno, se stazionario o tempo dipendente. Per questo caso è stato scelto uno studio di tipo stazionario (Fig. 5.4).

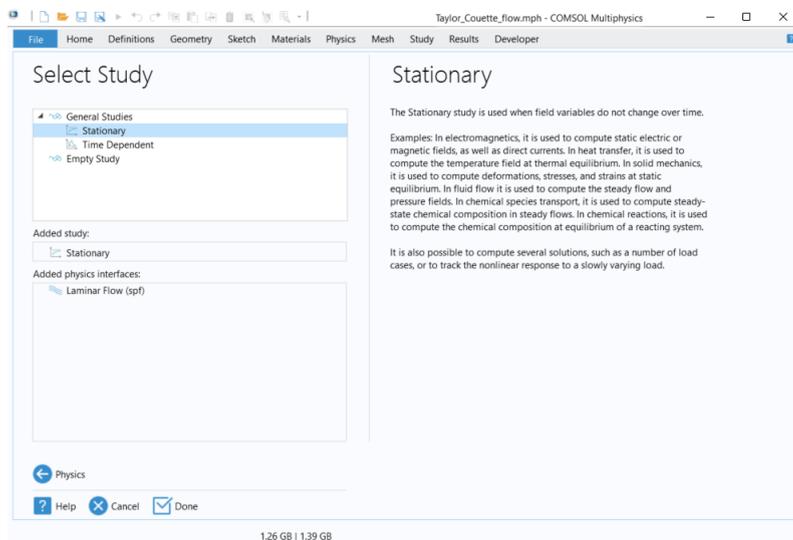


Fig. 5.4: Scelta della natura del fenomeno

Effettuata la scelta si preme il tasto *Done* e il programma automaticamente apre l'ambiente di lavoro caratterizzato da una sezione fondamentale chiamata *Model Builder* che permette di impostare ad esempio la geometria, le condizioni al contorno, le proprietà del fluido, la mesh ed infine poter avviare la simulazione (Fig. 5.5).

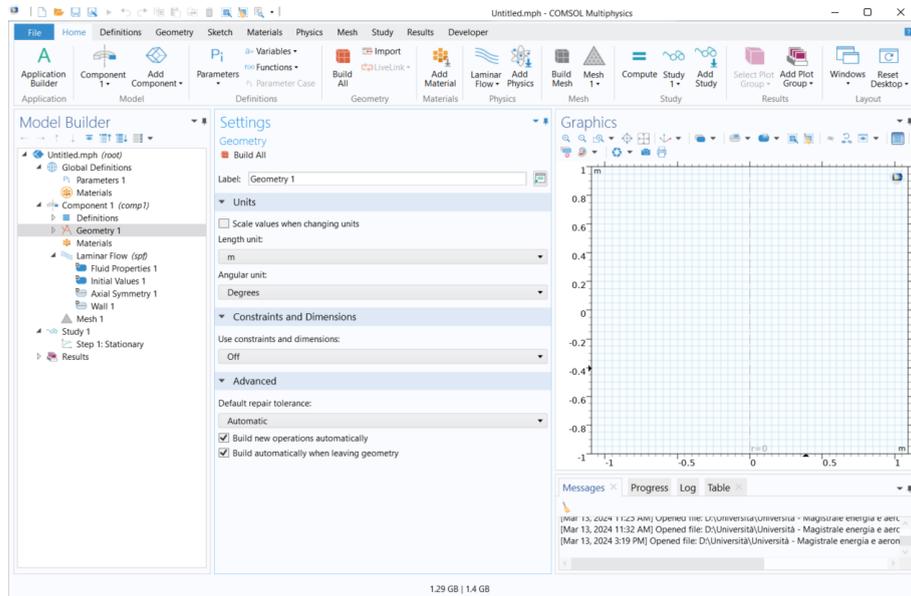


Fig. 5.5: Ambiente di lavoro

Di seguito viene mostrata l'adimensionalizzazione del problema numerico e analizzati nello specifico le impostazioni gestite nella sezione *Model Builder*.

5.2.1 Adimensionalizzazione del problema numerico

In figura 5.6 viene mostrato come vengono adimensionalizzate le quote geometriche. Come valore di riferimento per l'adimensionalizzazione viene considerato lo spessore dell'intercapedine d pari a 1.65 mm . Il valore del raggio del cilindro interno r_i è pari a 19.35 mm . Per quanto riguarda l'altezza viene semplicemente adottato un valore pari a quattordici volte il valore di D .

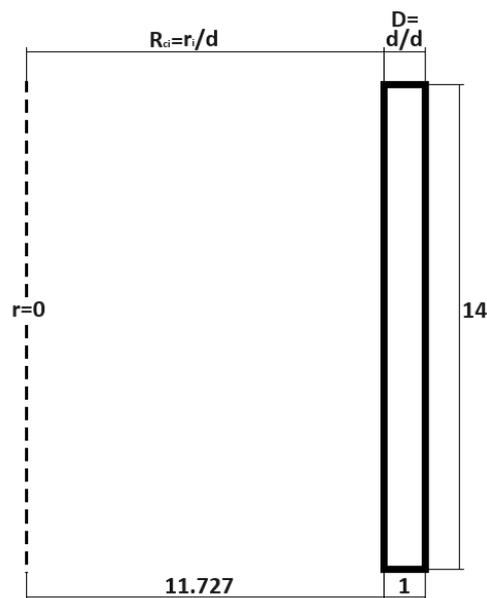


Fig. 5.6: Adimensionalizzazione delle quote geometriche

Considerando che il numero di Taylor è il parametro di riferimento per analizzare la fisica del fenomeno allora è stato scelto di adottare il numero di Taylor come parametro libero, di conseguenza il numero di Reynolds e la velocità di rotazione del cilindro interno vengono espressi in funzione del numero di Taylor.

Dal numero di Taylor (3.3) si ricava il numero di Reynolds del cilindro interno:

$$Re_i = \sqrt{Ta \frac{r_o + r_i}{2d}}. \quad (5.1)$$

Dalla formulazione classica del numero di Reynolds si ricava la velocità di rotazione del cilindro interno ω_i :

$$\omega_i = \frac{\mu Re_i}{\rho R_{ci} D}, \quad (5.2)$$

dove $R_{ci} = r_i/d$ e $D = d/d$. Ponendo i valori di μ e ρ pari a uno, dalla 5.2 si ottiene:

$$\omega_i = \frac{Re_i}{R_{ci}}, \quad (5.3)$$

dove R_{ci} è pari a 11.727.

5.2.2 Parameters

In questa impostazione vengono raggruppati tutti i parametri fissi o variabili e le grandezze fondamentali del problema. In questo caso sono stati inseriti il numero di Taylor, il numero di Reynolds del cilindro interno e la velocità di rotazione del cilindro interno come mostrato in figura 5.7.

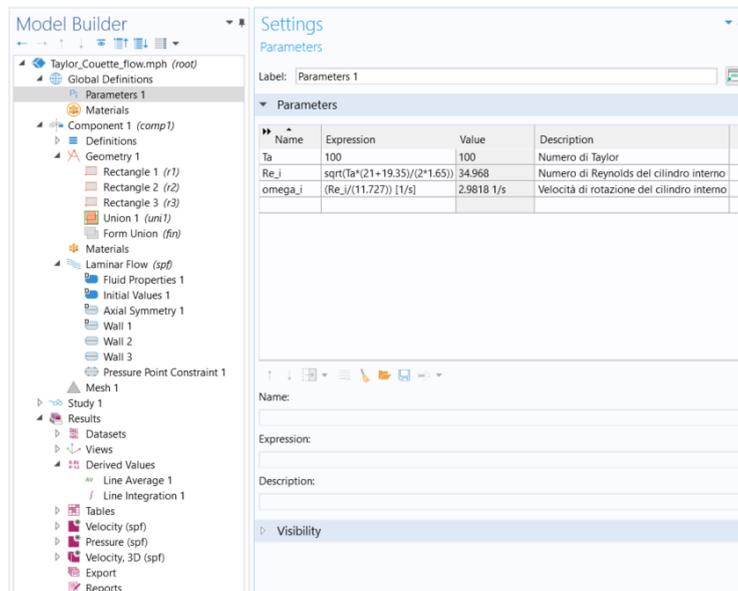


Fig. 5.7: Parameters

Il numero di Taylor viene considerato come grandezza libera mentre il numero di Reynolds Re_i e la velocità di rotazione del cilindro interno ω_i vengono scritti come mostrato nelle equazioni 5.1 e 5.3. Per ogni intervallo di regime di rotazione del cilindro interno quindi per ogni numero di Taylor viene eseguita una simulazione. Si

ha una gamma di numeri di Taylor da 1 a 1900, con intervalli variabili a seconda se si vuole ottenere o no una maggiore risoluzione nell'andamento dei risultati ottenuti. Il regime di rotazione viene controllato tramite l'inserimento di un valore desiderato del numero di Taylor nella tabella *Parameters*. All'aumentare del numero di Taylor corrisponde un aumento del regime di rotazione del cilindro interno.

5.2.3 Geometry

In *Geometry* è possibile costruire la geometria del problema da analizzare. In questo caso la geometria è semplicemente un dominio di fluido rettangolare posto dall'asse di simmetria ad una distanza pari al valore adimensionale del raggio del cilindro interno R_{ci} come mostrato in figura 5.8.

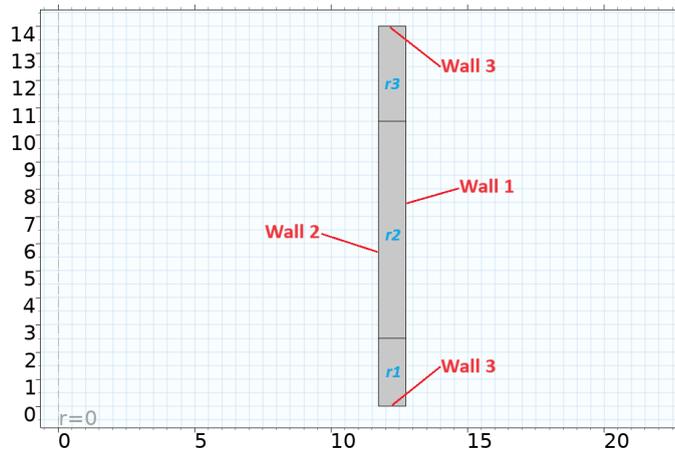


Fig. 5.8: Geometria del dominio di fluido

Nell'impostazione *Geometry* è possibile definire ad esempio le unità di misura (Fig. 5.9). Per il caso oggetto di studio non è fondamentale definire l'unità di misura perché viene analizzato in forma adimensionale.

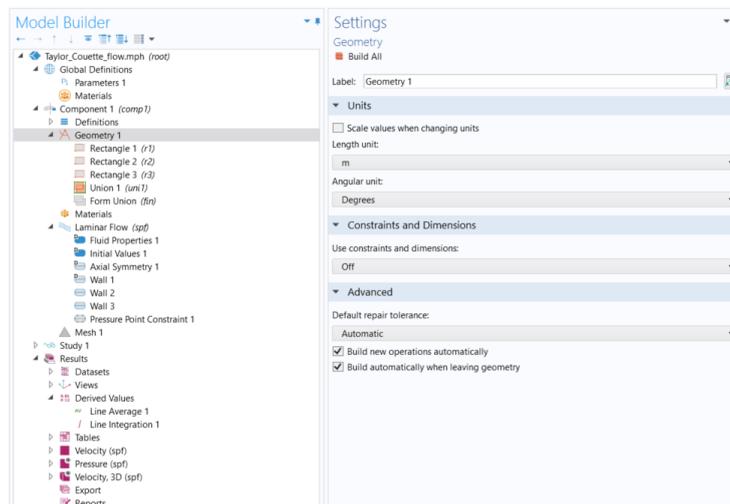


Fig. 5.9: Geometry

Il dominio di fluido viene generato dalla composizione di tre elementi rettangolari (Fig. 5.10) poi uniti fra di loro tramite la funzione *Union*. Questo è stato fatto per

poter effettuare calcoli integrali solo nella sezione centrale in modo tale da eliminare gli effetti del bordo superiore e inferiore.

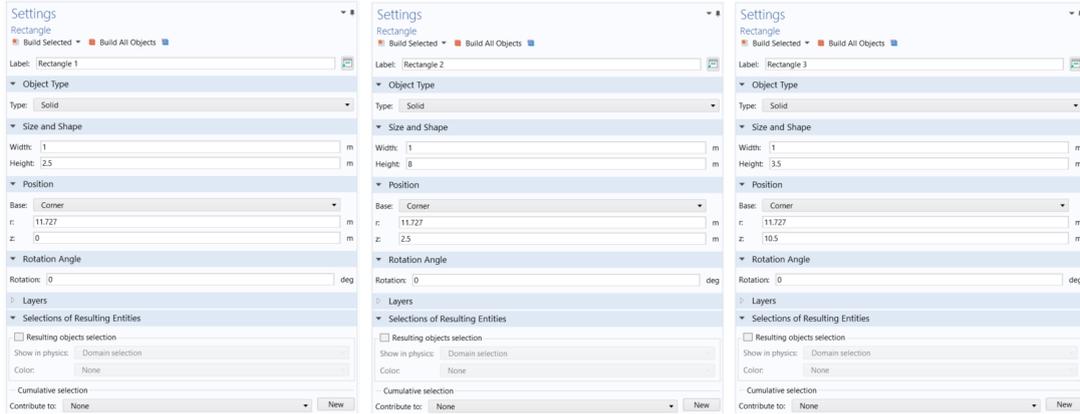


Fig. 5.10: Elementi rettangolari

La larghezza *Width* deve essere pari a $d/d = 1$ per tutti i rettangoli r_1 , r_2 e r_3 . La distanza r dei tre rettangoli dall'asse di rotazione deve essere pari a $r_i/d = 11.727$. Il primo rettangolo r_1 viene posizionato alla quota zero ed ha un'altezza di 2.5. Il secondo rettangolo r_2 centrale è successivo al primo ed ha un'altezza di 8. Il terzo rettangolo r_3 è successivo al secondo ed ha un'altezza di 3.5.

5.2.4 Laminar Flow

In *Laminar Flow* vengono inserite le proprietà del fluido e le condizioni al contorno. Inizialmente è necessario attivare in *Physical Model* l'impostazione *Swirl flow* che permette di controllare la velocità di rotazione del cilindro interno nella direzione θ (Fig. 5.11).

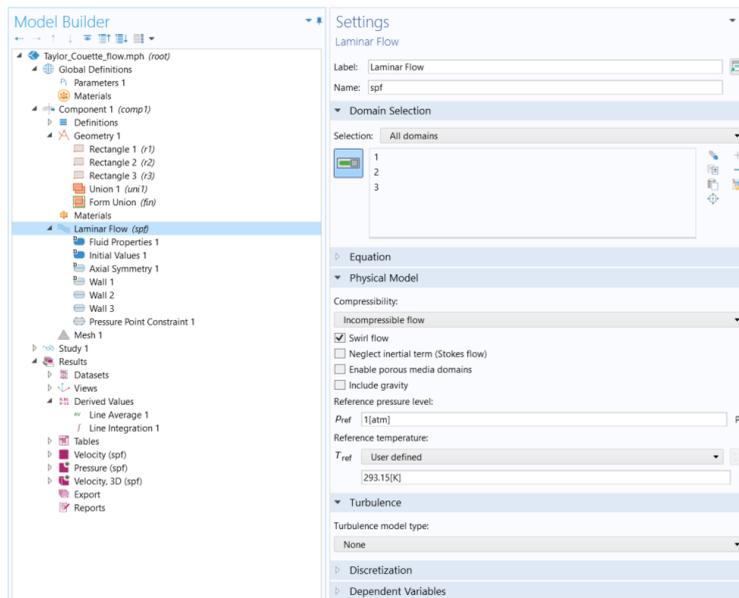


Fig. 5.11: Laminar Flow

In *Fluid Properties* la densità ρ e la viscosità dinamica μ vengono poste pari ad 1 perché grandezze adimensionali (Fig. 5.12).

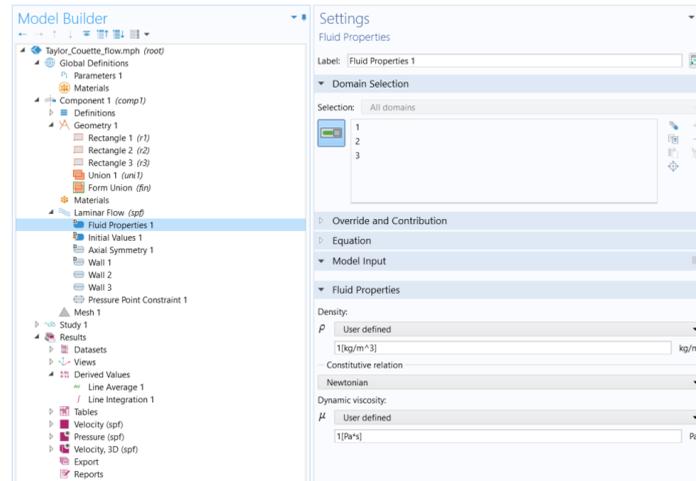


Fig. 5.12: *Fluid Properties*

Successivamente alle proprietà del fluido vengono imposte le condizioni al contorno come mostrato in figura 5.13.

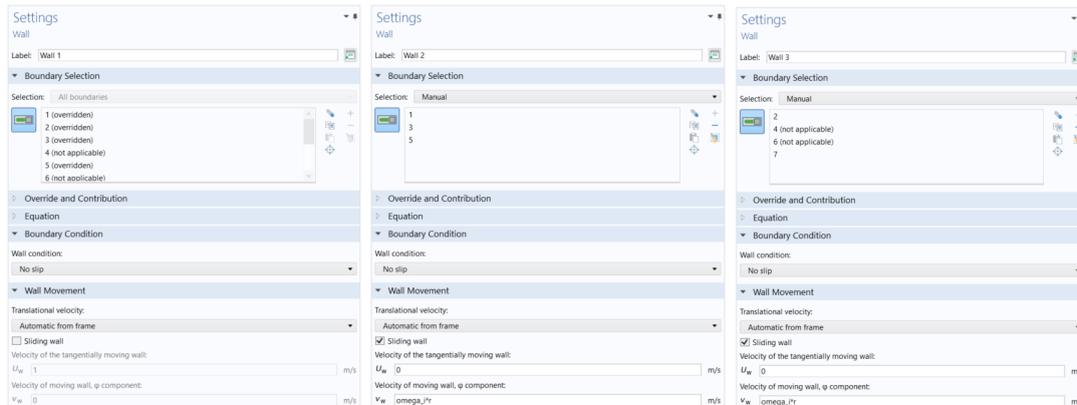


Fig. 5.13: *Condizioni al contorno*

Il Wall 1 rappresenta la superficie interna del cilindro esterno fisso di conseguenza viene imposta la condizione di *No slip*.

Il Wall 2 rappresenta la superficie del cilindro interno posto in rotazione di conseguenza viene imposta sempre la condizione di *No slip*, in quanto il fluido aderisce sempre alla parete, ma in aggiunta bisogna attivare il movimento della parete ovvero *Sliding wall* e si impone una velocità V_w pari a $\omega_i r$. La velocità di rotazione ω_i viene calcolata automaticamente dal programma una volta scelto e inserito in *Parameters* il numero di Taylor. Il termine r invece è la coordinata radiale del problema che risulta costante su Wall 2 e pari a 11.727.

Il Wall 3 rappresentano le superfici superiore e inferiore che si ipotizzano solide quindi aventi la condizione di *No slip* e di *Sliding wall* con V_w pari a $\omega_i r$. Quindi si hanno le superfici superiore e inferiore che muovono alla stessa velocità angolare ω_i del cilindro interno.

L'ultima condizione al contorno che deve essere imposta riguarda la pressione dove semplicemente viene imposto un *Pressure Point Constraint* che può essere applicato in uno dei quattro angoli del dominio. Questa ultima condizione garantisce maggiore stabilità di calcolo.

5.2.5 Mesh

COMSOL Multiphysics® offre la possibilità di poter costruire autonomamente la mesh oppure di generarla automaticamente. In questo ultimo metodo è necessario solo definire la dimensione dell'elemento indicando semplicemente il grado di finezza. In questo caso è stata scelta la generazione automatica della mesh con dimensione dell'elemento *Extremely fine* con l'obiettivo di poter visualizzare al meglio i vortici e poter catturare con il livello più alto di definizione la fisica del fenomeno (Fig. 5.14).

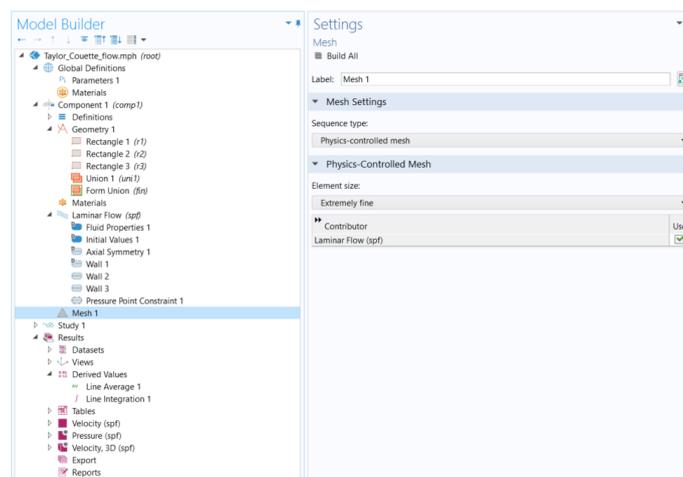


Fig. 5.14: Mesh

In figura 5.15 viene mostrata la struttura della mesh e la sua composizione.

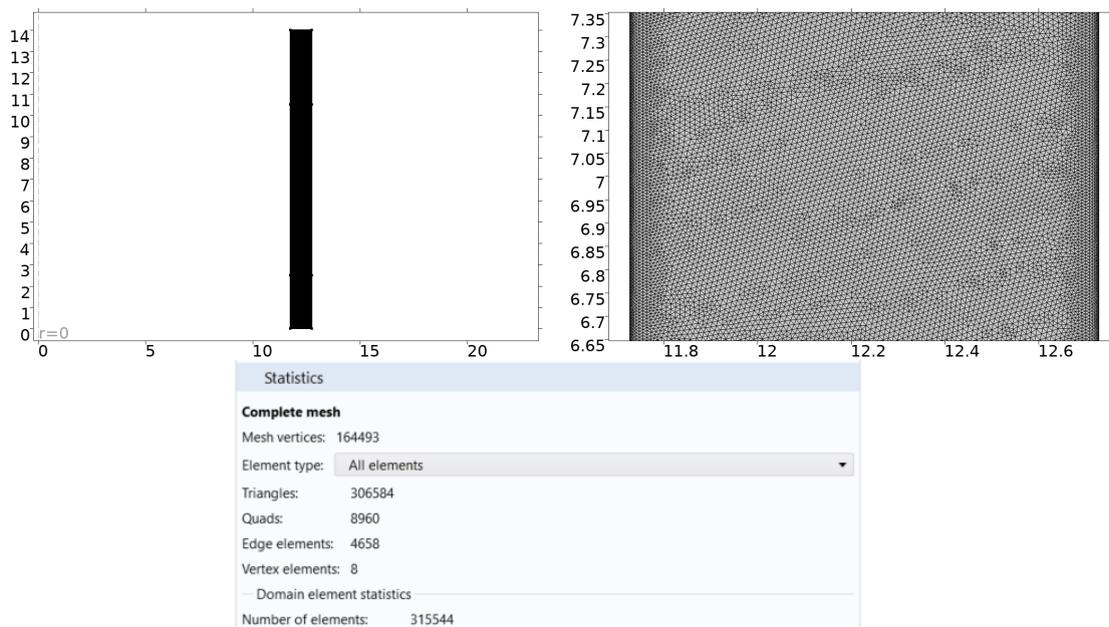


Fig. 5.15: Struttura e composizione della mesh

5.2.6 Study

In questa sezione è possibile avviare la simulazione e sotto la voce *Fully Coupled* andare a modificare il criterio con il quale avviene il termine della simulazione. In questo caso è stato scelto *Iterations or tolerance* rispettivamente di 1000 e 10^{-6} (Fig. 5.16).

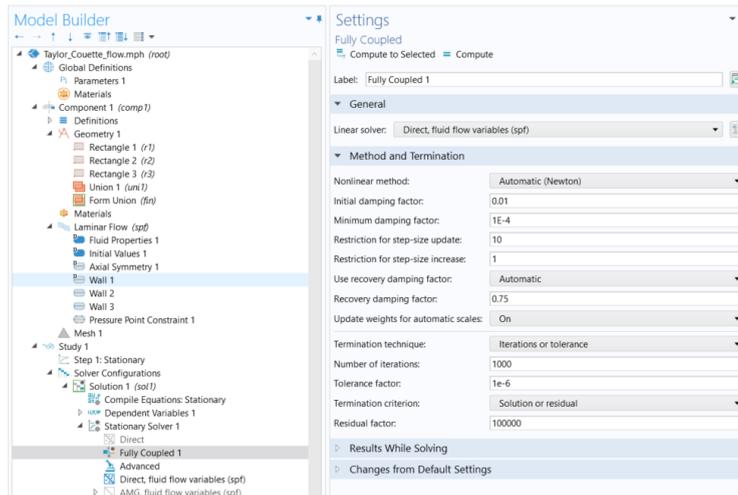


Fig. 5.16: Criterio di termine simulazione

5.2.7 Results

In *Results* vengono mostrati i risultati numerici al termine della simulazione, ad esempio si può scegliere di visualizzare i *contour*, ossia le mappe di distribuzione delle velocità nelle varie direzioni oppure di pressione. Inoltre è possibile visualizzare altri andamenti di grandezze, non solo in forma di *contour*.

Una volta terminata la simulazione compare automaticamente la voce *Velocity (spf)* da cui è possibile visualizzare tramite la voce *Surface* il *contour* delle componenti delle velocità (Fig. 5.17).

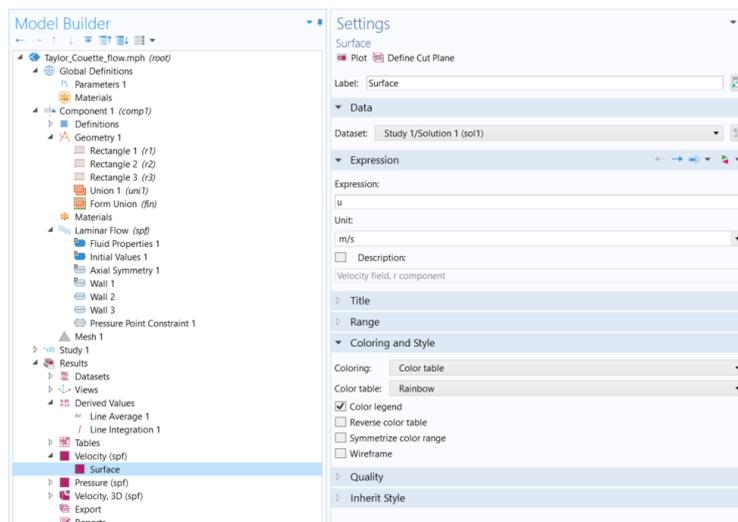


Fig. 5.17: Contour delle velocità

In *Expression* è possibile inserire la componente di velocità che si vuole visualizzare sotto forma di contour: u per la componente radiale, v per la componente circonferenziale, w per la componente assiale. Una volta inserita la componente desiderata bisogna premere il comando *Plot* per ottenere il contour.

Nella voce *Derived Values* viene attivata l'impostazione *Line Integration* che permette di effettuare un calcolo integrale lungo uno specifico segmento. Il calcolo integrale viene effettuato lungo il lato sinistro del secondo rettangolo $r2$ come mostrato in figura 5.18.

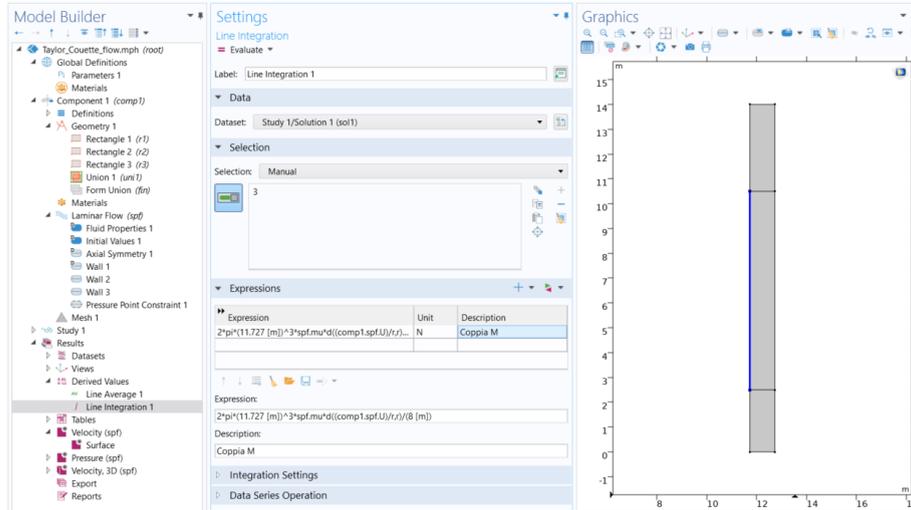


Fig. 5.18: Line Integration

Il calcolo integrale viene effettuato solo sul lato del rettangolo $r2$ perché in questo modo non si tengono conto degli effetti di bordo dei lati superiore e inferiore che risultano essere condizionati dalle condizioni al contorno. Si è interessati a fare valutazioni solo dove la fisica è ben sviluppata e non influenzata dalle condizioni al contorno. Il calcolo integrale permette di ricavare la coppia sviluppata su quel lato in base al regime di rotazione. Quindi per ogni simulazione avente un determinato numero di Taylor deve essere calcolata la coppia premendo il comando *Evaluate*.

Di seguito viene mostrata la provenienza dell'equazione inserita sotto la voce *Expression* per poter calcolare la coppia M .

Dal tensore dello stress viscoso in coordinate cilindriche è possibile ricavare la componente di sforzo tangenziale nella direzione $r\theta$:

$$\tau_{r\theta} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right], \quad (5.4)$$

ma tenendo conto dell'ipotesi di assialsimmetria la 5.4 diventa:

$$\tau_{r\theta} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right]. \quad (5.5)$$

La 5.5 deve essere valutata nel raggio del cilindro interno quindi si ottiene:

$$\tau_{r\theta} = \mu R_{ci} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right). \quad (5.6)$$

A questo punto il valore della forza F agente sull'intera superficie del cilindro interno è pari a:

$$F = 2\pi R_{ci} \int_0^H \tau_{r\theta} dz. \quad (5.7)$$

Il valore della coppia M di conseguenza è pari a:

$$M = FR_{ci} = 2\pi R_{ci}^2 \int_0^H \tau_{r\theta} dz = 2\pi\mu R_{ci}^3 \int_0^H \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) dz. \quad (5.8)$$

La 5.8 è l'espressione che viene inserita nella voce *Expression* del programma. Come si può notare nella figura 5.18 la 5.8 viene rapportata all'altezza del cilindro pari a 8 in modo tale da avere una coppia per unità di altezza.

5.3 Risultati delle simulazioni

Come scritto precedentemente per ogni regime di rotazione del cilindro interno e quindi per ogni numero di Taylor deve essere eseguita una simulazione. Di conseguenza è stato scelto di mostrare i contour delle componenti delle velocità per alcuni valori del numero di Taylor pari a 600, 1100, 1600, 1650, 1700, 1750, 1800, 1850, 1900.

5.3.1 $Ta=600$, $Re=85.6$

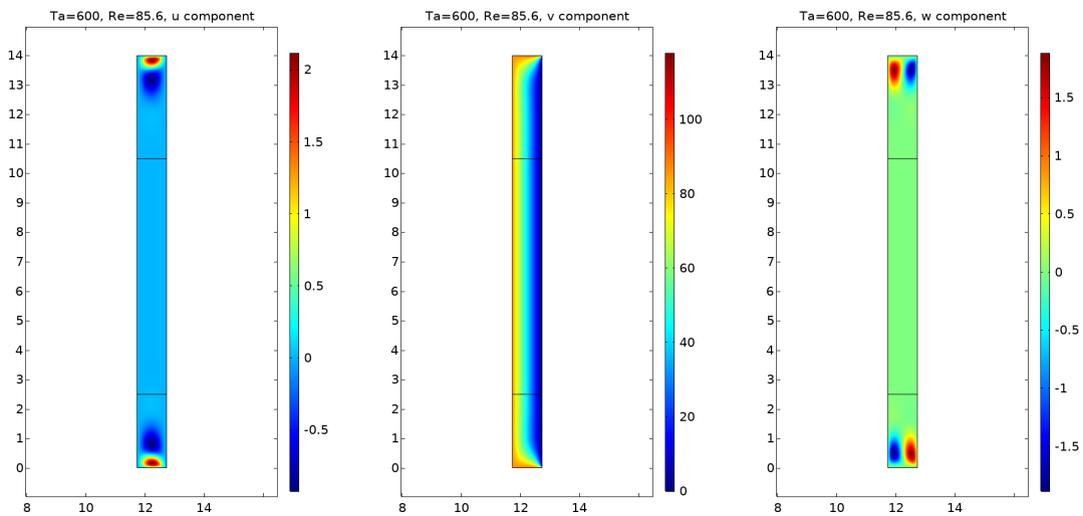


Fig. 5.19: Contour delle componenti della velocità. $Ta=600$, $Re=85.6$

Per $Ta=600$ si ha una velocità di rotazione del cilindro interno pari a 25.716 rpm e da come si può notare nei contour di figura 5.19 le componenti u e w sono costanti nel rettangolo $r2$ ovvero non mostrano la presenza di vortici. Questo significa che il flusso tra i cilindri è un flusso di Couette. Il contour della componente v mostra chiaramente il gradiente radiale della velocità lungo θ che è massima alla superficie del cilindro interno, nulla alla superficie del cilindro esterno.

5.3.2 $Ta=1100$, $Re=115.9$

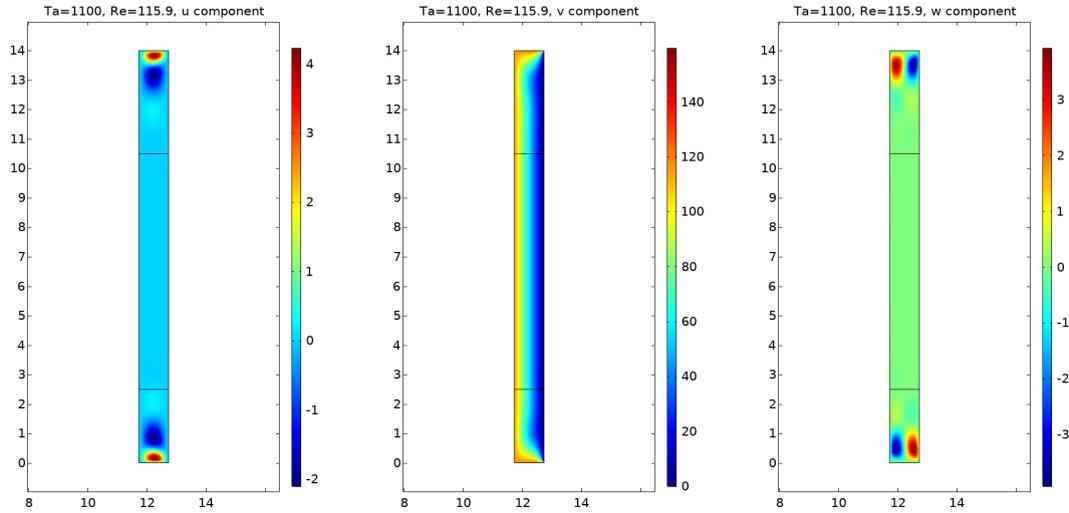


Fig. 5.20: Contour delle componenti della velocità. $Ta=1100$, $Re=115.9$

Per $Ta=1100$ si ha una velocità di rotazione del cilindro interno pari a 34.826 rpm e da come si può notare nei contour di figura 5.20 le componenti u e w non mostrano alcun gradiente di velocità, ovvero vortici, nella parte centrale (rettangolo r_2). Questo significa che il flusso tra i cilindri è ancora un flusso di Couette. Si può notare comunque che i valori minimo e massimo delle leggende sono aumentati. Il contour della componente v mostra chiaramente il gradiente radiale della velocità lungo θ che è massima alla superficie del cilindro interno, nulla alla superficie del cilindro esterno.

5.3.3 $Ta=1600$, $Re=139.8$

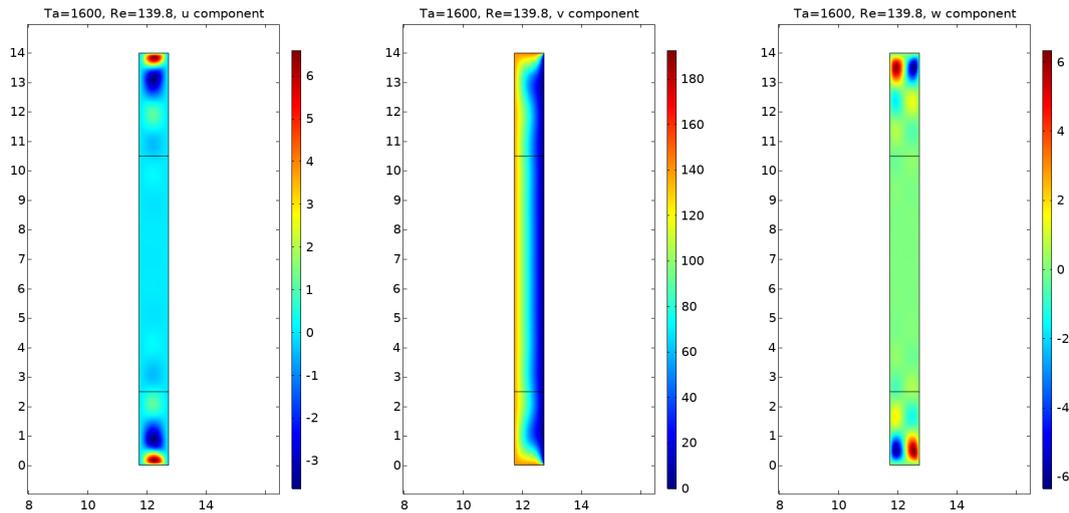


Fig. 5.21: Contour delle componenti della velocità. $Ta=1600$, $Re=139.8$

Per $Ta=1600$ si ha una velocità di rotazione del cilindro interno pari a 41.998 rpm . Nei contour di figura 5.21 la componente u mostra dei vortici di bassa intensità

alle estremità del rettangolo r_2 , segno che si sta procedendo verso la formazione di vortici. Nella componente w ancora è difficile apprezzare cambiamenti nel rettangolo r_2 , mentre invece si nota qualche piccola variazione nei rettangoli r_1 e r_3 rispetto ai casi precedenti.

5.3.4 $Ta=1650, Re=142$

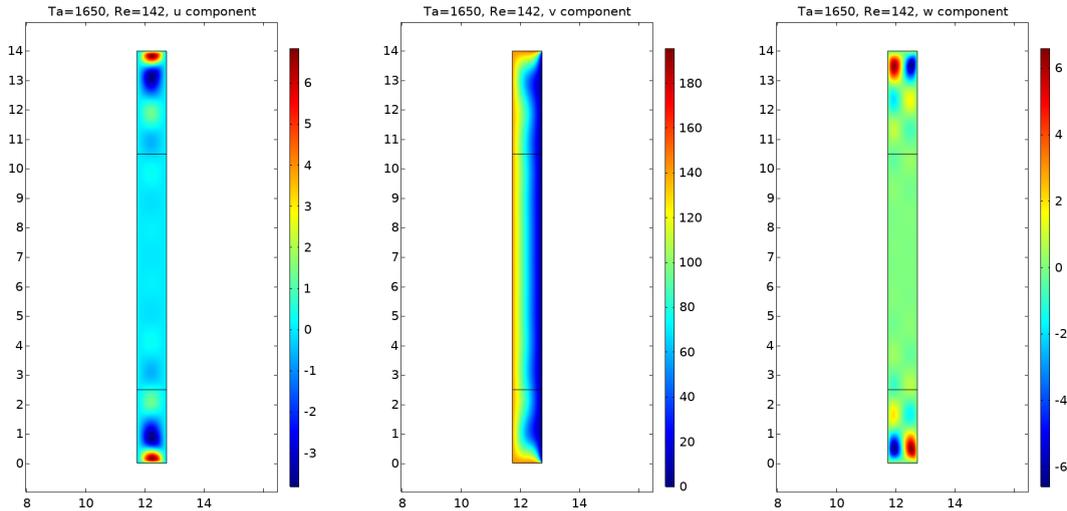


Fig. 5.22: Contour delle componenti della velocità. $Ta=1650, Re=142$

Per $Ta=1650$ si ha una velocità di rotazione del cilindro interno pari a 42.647 rpm . Rispetto al caso di $Ta=1600$ i contour di figura 5.22 mostrano differenze quasi trascurabili.

5.3.5 $Ta=1700, Re=144.1$

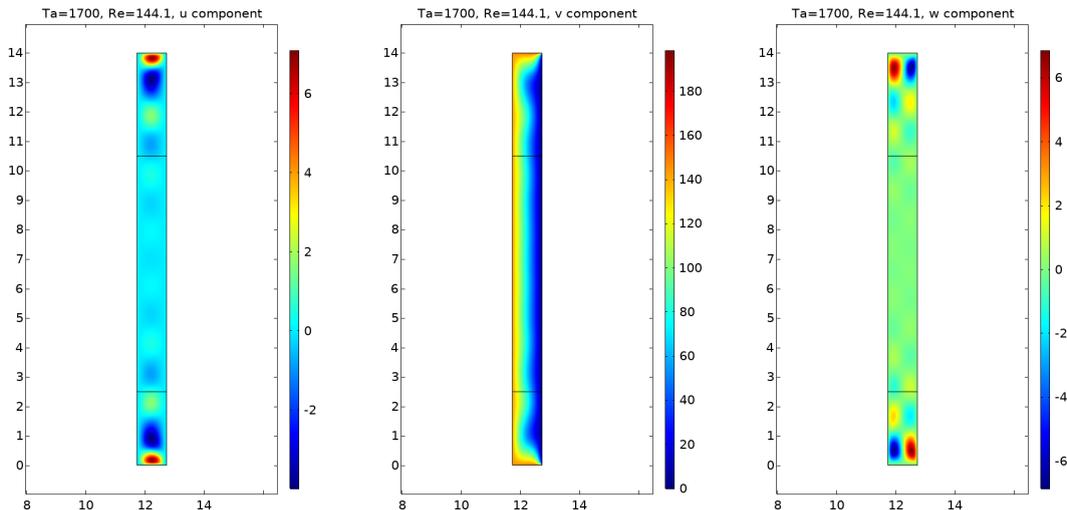


Fig. 5.23: Contour delle componenti della velocità. $Ta=1700, Re=144.1$

Per $Ta=1700$ si ha una velocità di rotazione del cilindro interno pari a 43.287 rpm . Rispetto ai casi precedenti il contour della velocità u di figura 5.23 permette di

iniziare ad apprezzare la distinzione tra i vari vortici nel rettangolo $r2$. Gli altri contour rimangono pressochè invariati.

5.3.6 $Ta=1750, Re=146.2$

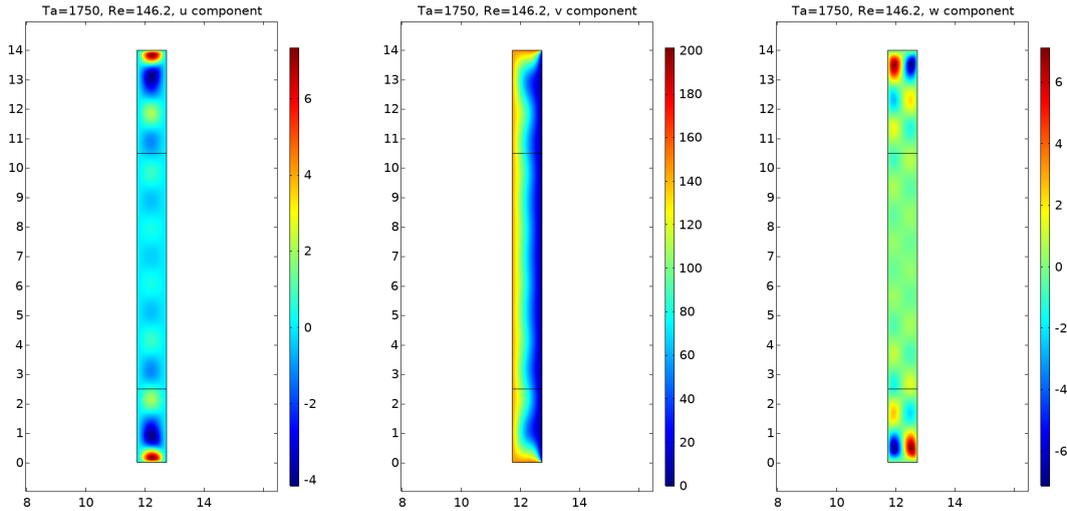


Fig. 5.24: Contour delle componenti della velocità. $Ta=1750, Re=146.2$

Per $Ta=1750$ si ha una velocità di rotazione del cilindro interno pari a 43.917 rpm . In questo caso nei contour di figura 5.24 relativi alle componenti v e w iniziano a subentrare cambiamenti. Per la componente v si ha una leggera oscillazione del gradiente radiale lungo il gap. Mentre nella componente w si iniziano ad apprezzare leggeri gradienti di velocità.

5.3.7 $Ta=1800, Re=148.3$

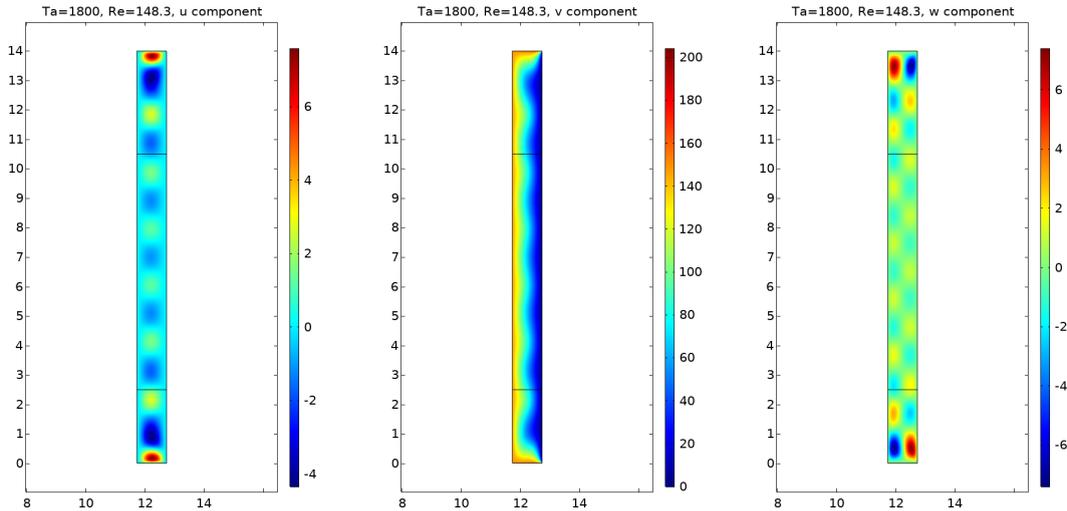


Fig. 5.25: Contour delle componenti della velocità. $Ta=1800, Re=148.3$

Per $Ta=1800$ si ha una velocità di rotazione del cilindro interno pari a 44.547 rpm . Osservando i contour di figura 5.25 è possibile affermare come nell'intorno

di $Ta=1800$ si ha la formazione dei vortici di Taylor, evidenziabili chiaramente nelle componenti u e w .

5.3.8 $Ta=1850$, $Re=150.4$

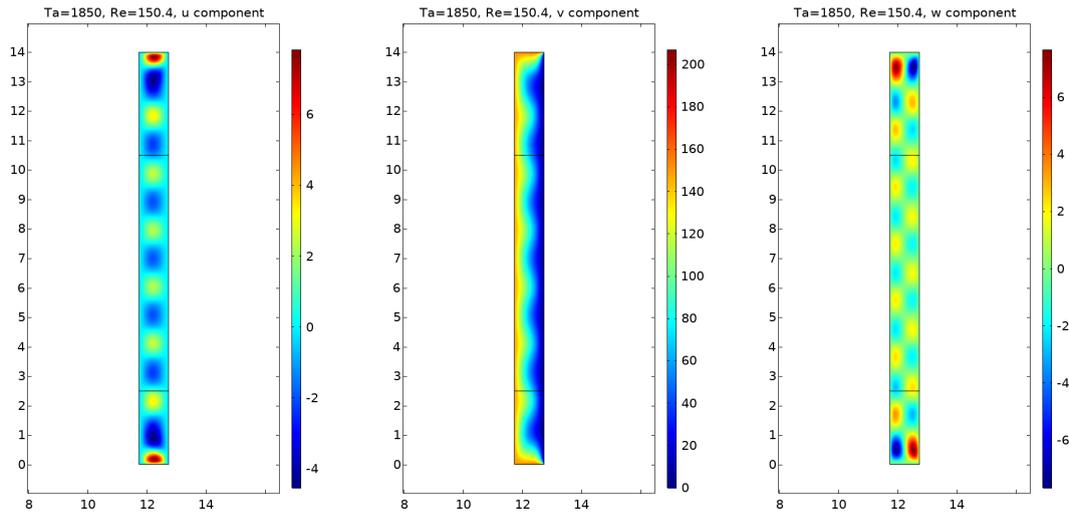


Fig. 5.26: Contour delle componenti della velocità. $Ta=1850$, $Re=150.4$

Per $Ta=1850$ si ha una velocità di rotazione del cilindro interno pari a 45.159 rpm . Rispetto al caso di $Ta=1800$ si osserva un intensificazione dei vortici di Taylor (Fig. 5.26).

5.3.9 $Ta=1900$, $Re=152.4$

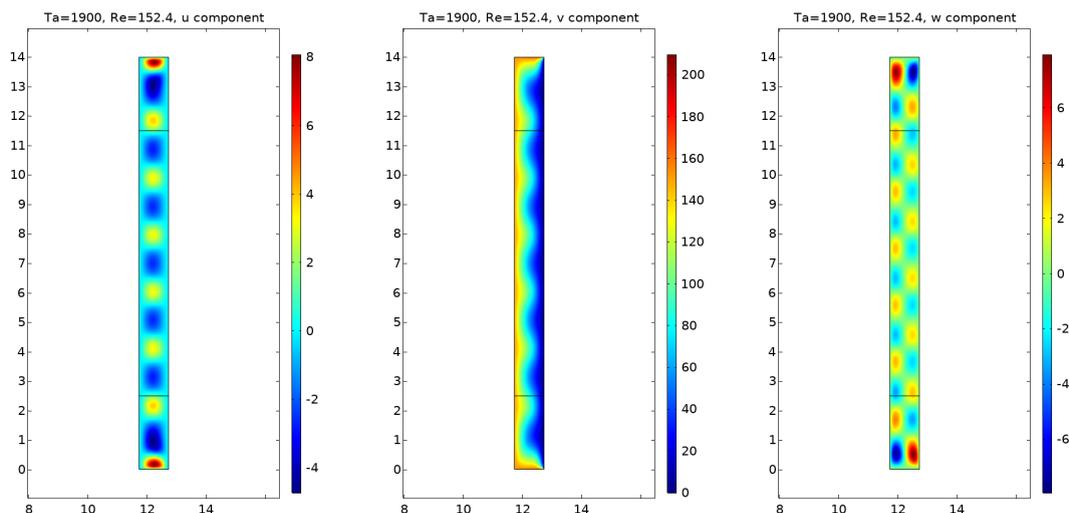


Fig. 5.27: Contour delle componenti della velocità. $Ta=1900$, $Re=152.4$

Per $Ta=1900$ si ha una velocità di rotazione del cilindro interno pari a 45.77 rpm . Da come si può notare in figura 5.27 i vortici di Taylor sono perfettamente evidenti e di notevole entità. Nella parte centrale, rettangolo $r2$, si possono visualizzare dieci

vortici controrotanti di cui due sono per metà inclusi nei rettangoli $r1$ e $r3$ come mostrato in figura 5.28.

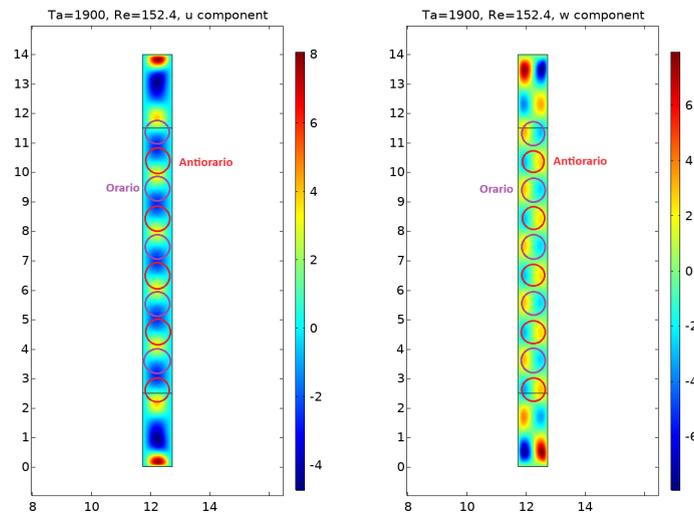


Fig. 5.28: Visualizzazione dei vortici nei contour delle componenti u e w della velocità. $Ta=1900$, $Re=152.4$

Di seguito vengono invece mostrati i contour delle componenti u e w con in aggiunta le linee di corrente (Fig. 5.29)

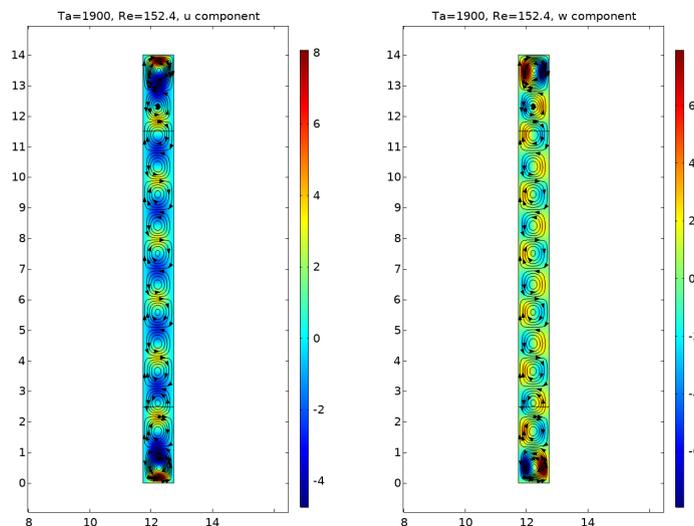


Fig. 5.29: Visualizzazione delle linee di corrente nei contour delle componenti u e w della velocità. $Ta=1900$, $Re=152.4$

5.4 Confronto tra i contour

Di seguito vengono messi a confronto i contour mostrati precedentemente per ogni componente della velocità (u, v, w) fissando la scala di grandezza mostrata a lato, in modo tale da apprezzare maggiormente l'incremento di intensità dei vortici (Fig. 5.30, 5.31, 5.32).

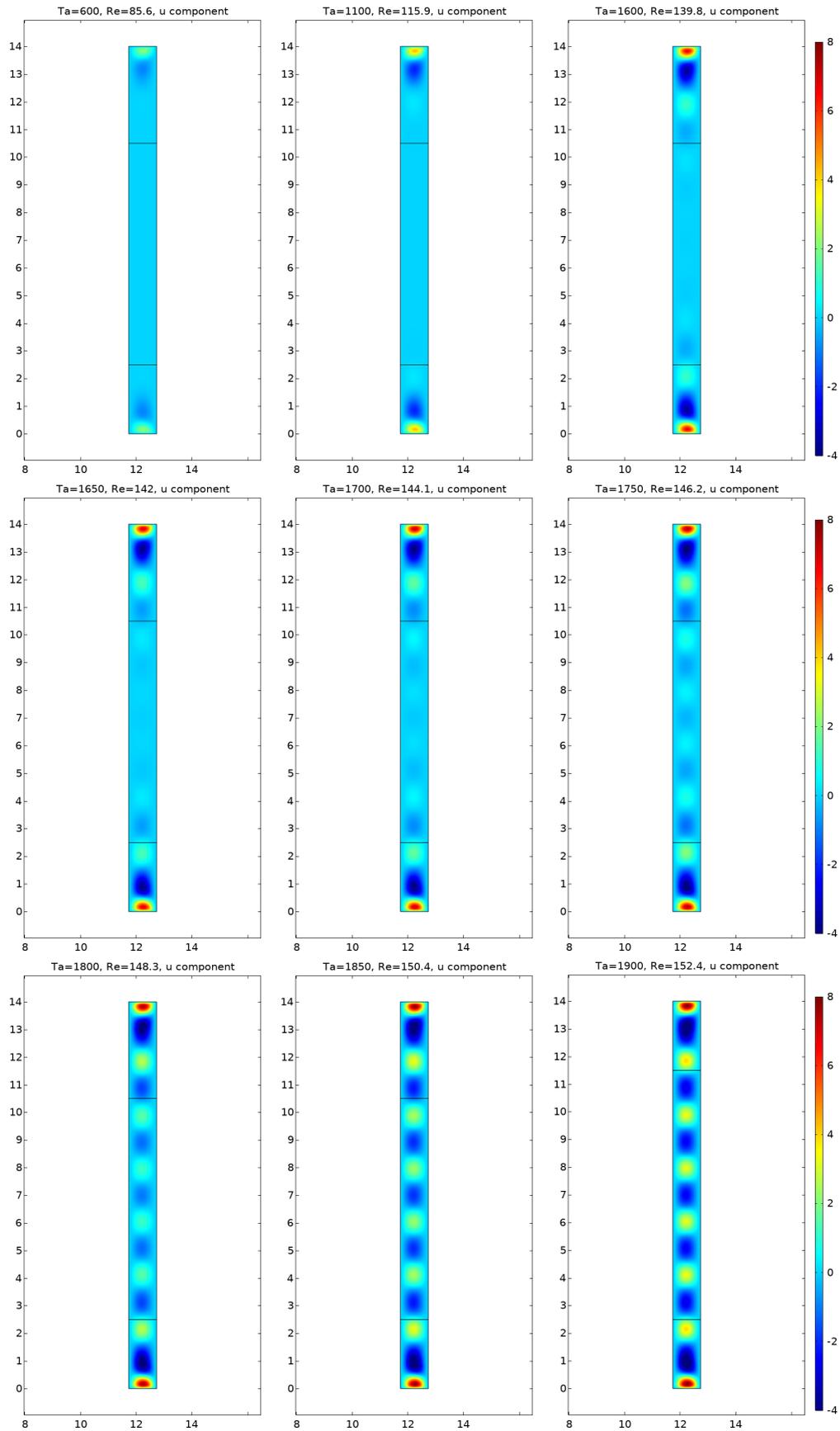


Fig. 5.30: Contour della componente u

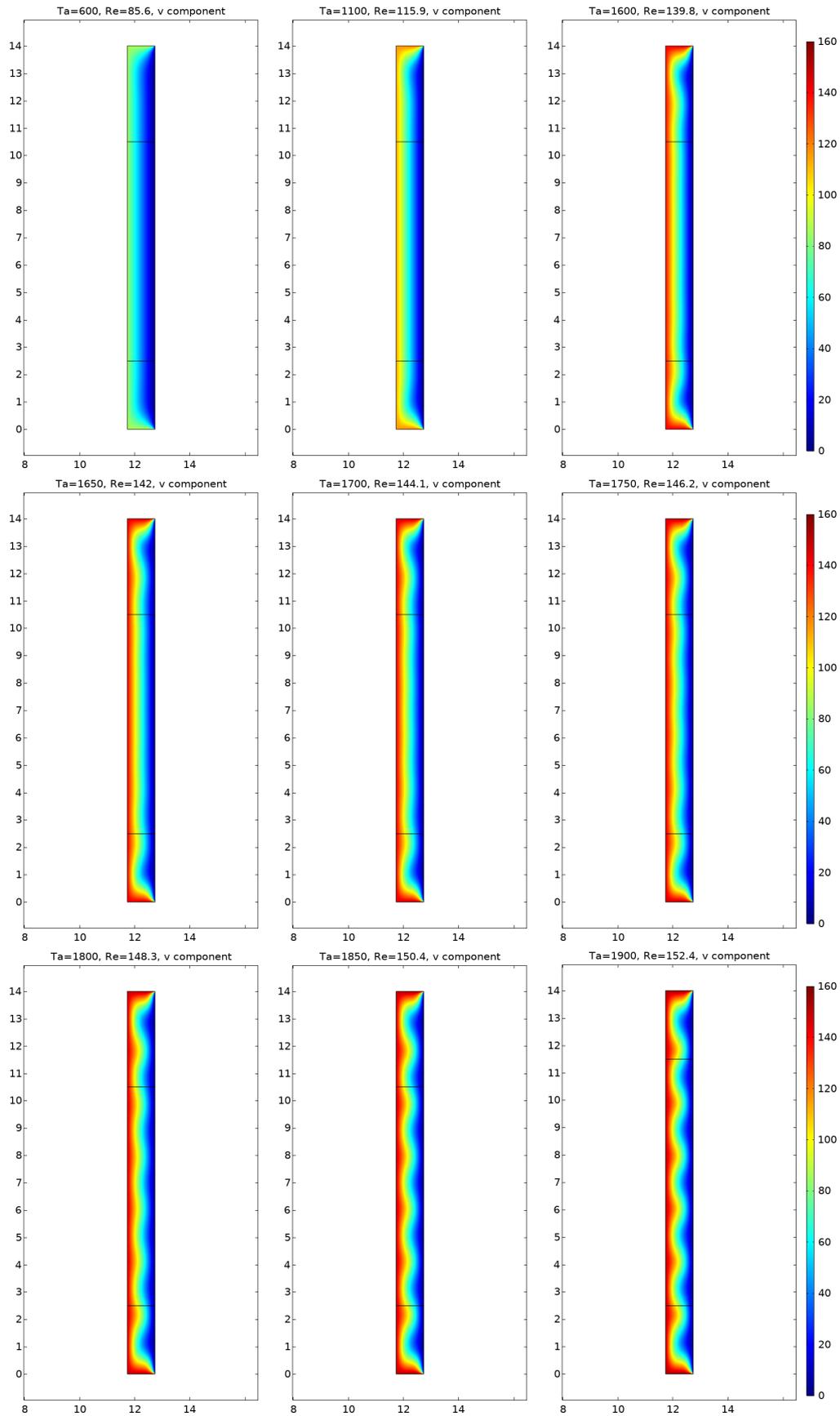


Fig. 5.31: Contour della componente v

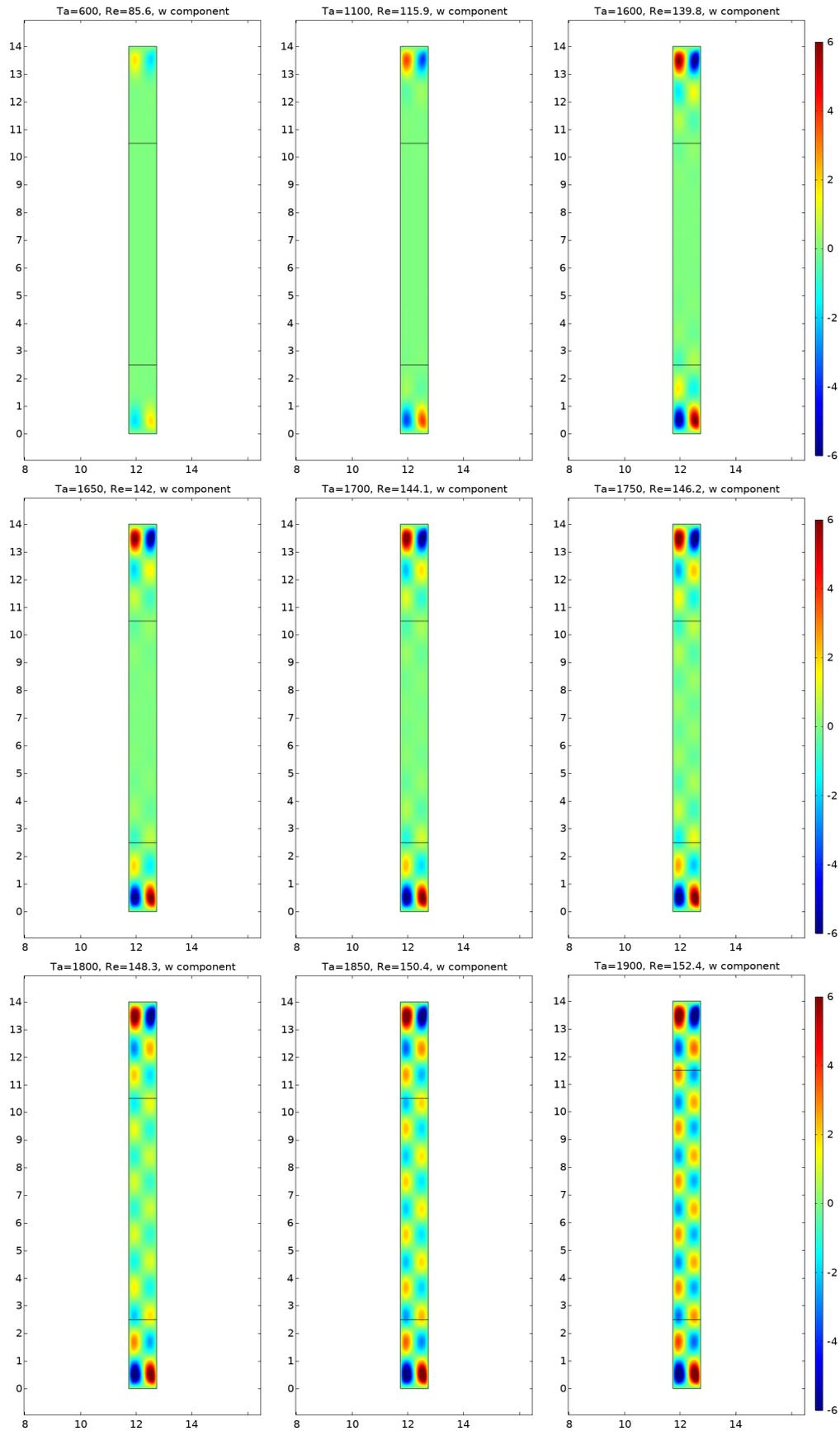


Fig. 5.32: Contour della componente w

5.5 $M = f(Ta)$ numerica

Di seguito, in figura 5.33, viene rappresentato il momento M per unità di altezza ricavato dalle simulazioni numeriche in funzione del numero di Taylor.

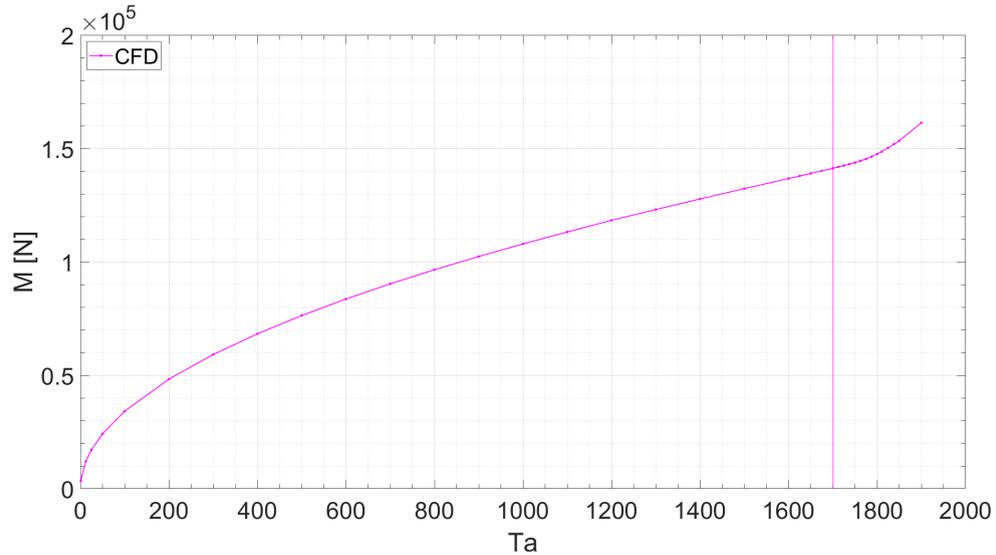


Fig. 5.33: Coppia M in funzione del numero di Taylor

Dal grafico è possibile osservare come la prima instabilità inizia ad instaurarsi nell'intorno di Taylor 1700, molto vicino al numero di Taylor ricavato dalla letteratura pari a 1695.

6 Laboratorio

6.1 Reometro

L'apparato sperimentale è essenzialmente composto da uno strumento, il reometro rotazionale. Il reometro è un dispositivo che permette di ricavare sperimentalmente la viscosità di un fluido tramite un bilancio di grandezze dinamiche (coppie), cinematiche (velocità) e geometriche. Viene definito rotazionale perché sfrutta la rotazione di un organo messo a contatto o immerso nel fluido da analizzare. Il reometro rotazionale può essere:

- a piatti paralleli
- a cilindri coassiali
- a cono piatto
- di Brookfield

Un motore elettrico mette in rotazione l'organo a contatto col fluido e un misuratore di coppia rileva il momento necessario per mantenerlo in rotazione. Dal momento e dalla velocità di rotazione è possibile ricavare rispettivamente lo sforzo applicato al fluido e il gradiente di velocità nel fluido. Da quest'ultimi si calcola la viscosità del fluido.

In laboratorio è stato utilizzato il reometro rotazionale della Anton Paar modello Physica MCR 301 le cui specifiche tecniche sono mostrate in figura 6.1. In realtà questo strumento non è stato utilizzato per la misura della viscosità del fluido, ma è stato impiegato fondamentalmente come misuratore di coppia in modo tale da stimare la variazione di resistenza idrodinamica al variare della velocità di rotazione.

Specifications				
	Unit	Physica MCR 51	Physica MCR 101	Physica MCR 301
Bearing	-	ball	air	air
EC motor (brushless DC) with high resolution optical encoder	-	yes	yes	yes
Permanent maximum torque, no signal drift	-	yes	yes	yes
Minimum torque rotation	µNm	250	0.1	0.05
Minimum torque oscillation	µNm	-	0.1	0.01
Maximum torque rotation/oscillation	mNm	125	150	200
Torque resolution	nNm	100	0.2	0.1
Angular deflection, set value	µrad	1 to ∞	1 to ∞	0.1 to ∞
Angular deflection, resolution	µrad	0.01	0.01	0.01
Minimum speed, CSS	1/min	10 ⁻⁵	10 ⁻⁶	10 ⁻⁷
Minimum speed, CSR	1/min	10 ⁻³	10 ⁻⁵	10 ⁻⁷
Maximum speed, CSS/CSR	1/min	3000	3000	3000
Minimum angular frequency	rad/s	10 ⁻³	10 ⁻⁵	10 ⁻⁵
Maximum angular frequency	rad/s	628	628	628
Normal force range	N	-	0.1 to 30	0.01 to 50
Normal force resolution	N	-	0.02	0.002
Dimensions	mm	440x600x620	440x600x620	440x600x620
Weight	kg	43	43	43
Toolmaster™, measuring system	-	yes	yes	yes
Toolmaster™, measuring cell	-	yes	yes	yes
QuickConnect for measuring systems, screwless	-	yes	yes	yes
Electronic trim lock	-	yes	yes	yes
More than 25 modular measuring cells, see catalogue	-	yes	yes	yes
Digital Eye, Rheoplus video option and camera	-	optional	optional	optional
Virtually gradient-free (horizontal, vertical) temperature control systems	-	yes	yes	yes
Maximum temperature range	°C	-150 to +1000	-150 to +1000	-150 to +1000
Automatic gap control/setting, AGC/AGS	-	yes	yes	yes
TruGap™	-	no	no	optional
Real time position control oscillation, DSO	-	no	no	optional
Sample (direct) strain control, virtually compliance free	-	-	yes	yes
Sample torque control, virtually inertia-free	-	-	yes	yes
Gap control, normal force and velocity, Tack/Squeeze	-	no	optional	yes
1st normal stress measurement NH	-	no	optional	yes
Waveform and Lissajous**	-	no	optional	optional
Multitone and higher harmonics**	-	no	yes	yes
Steady state**	-	no	yes	yes

Fig. 6.1: Specifiche tecniche del Physica MCR 301

6.2 Set-up sperimentale

Il set-up sperimentale prevede l'utilizzo di due cilindri coassiali, acciaio AISI 304 per il cilindro interno, alluminio per il cilindro esterno, entrambi con superfici perfettamente lisce. Il cilindro esterno fisso contiene acqua di rubinetto alla temperatura ambiente. La base del cilindro interno è di forma conica in quanto questa geometria evita la formazione e l'eventuale permanenza di bolle d'aria (Fig. 6.2).

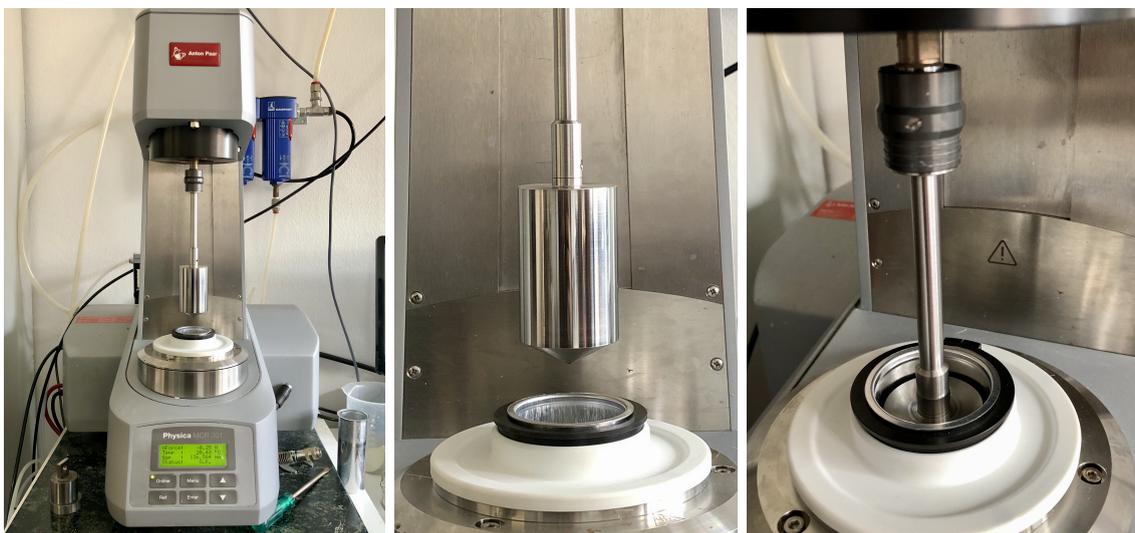


Fig. 6.2: Set-up sperimentale

In figura 6.3 vengono rappresentate le quote geometriche dei cilindri.

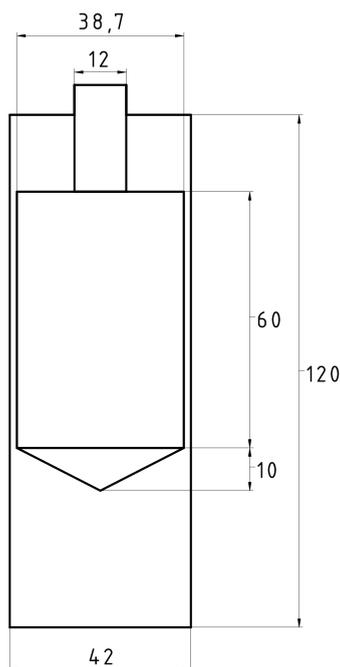


Fig. 6.3: Quote geometriche, unità in millimetri [mm]. La quota di 42 mm rappresenta il diametro interno del cilindro esterno

La collocazione in altezza del cilindro interno viene considerata dalla base interna del cilindro esterno alla punta del cilindro interno ed è stata assunta pari a 32 mm , in modo tale da limitare l'effetto bordo della superficie inferiore. Una volta posizionato il cilindro interno si è effettuato il riempimento con acqua portando il pelo libero a circa 3 mm sotto il bordo superiore del cilindro esterno. Successivamente ai test con l'altezza di 32 mm , è stato effettuato un test di prova con un'altezza pari a 45.2 mm in modo tale da avere il pelo libero quasi allo stesso livello del bordo superiore del cilindro interno. Questo test di prova ha permesso di verificare l'entità dell'influenza data dal contatto dell'acqua con la superficie orizzontale del cilindro interno e del relativo perno con vite di collegamento.

Per i test è stato conveniente dapprima calcolare il valore teorico del regime di rotazione del cilindro interno ω_i alla quale si ha la comparsa della prima instabilità. Dalla 3.2 si ricava:

$$\omega_i = \sqrt{Ta \frac{\nu^2}{r_i^2 d^3} \frac{r_o + r_i}{2}}, \quad (6.1)$$

e noti i seguenti parametri:

- il numero di Taylor critico pari a 1695 [16]
- la viscosità cinematica dell'acqua ν pari a $1.004 \text{ mm}^2/\text{s}$
- il raggio del cilindro interno r_i pari a 19.35 mm
- il raggio del cilindro esterno r_o pari a 21 mm
- il valore del gap d pari a 1.65 mm

si ottiene una ω_i critica pari a 4.527 rad/s (43.23 rpm) per il cilindro di diametro 38.7 mm .

6.3 Acquisizione dati

Questa tipologia di esperimento non è mai stata condotta in laboratorio di conseguenza è stato necessario capire dapprima come configurare il reometro, tramite il relativo software, per l'acquisizione ottimale dei dati.

Inizialmente il reometro deve essere inizializzato, in quanto, per poter permettere il posizionamento del cilindro interno ad una certa altezza, lo strumento deve conoscere lo *zero*, ovvero l'origine del sistema di riferimento. Questa operazione è del tutto automatica e prevede l'abbassamento del cilindro interno sino a toccare con la punta la base del cilindro esterno e questo istante è rilevabile dallo strumento tramite un sensore di forza. Terminata l'operazione di inizializzazione è possibile eseguire i test. Di seguito vengono catalogati tutti i test e le relative impostazioni:

Test	D [mm]	h [mm]	n	i [s]	t [s]	r [rpm]	a [$\frac{rad}{s^2}$]	c [rpm] - d [s]
1	38.7	32	200	0.1	20	0-100	0.5235	-
2	38.7	32	4000	0.1	400	0-100	0.0262	-
3	38.7	32	1000	0.5	500	0-50	0.0105	-
4	38.7	32	1000	0.5	500	0-50	0.0105	0.1-300
5	38.7	45.2	1000	0.5	500	0-50	0.0105	0.1-300
6	38.7	32	361	-	17200	1-60	$3.653 \cdot 10^{-4}$	-
7	38.7	32	181	-	8600	1-60	$7.306 \cdot 10^{-4}$	-
8	38.7	32	91	-	4300	1-60	$1.461 \cdot 10^{-3}$	-
9	38.7	32	46	-	2150	1-60	$2.922 \cdot 10^{-3}$	-

Dove:

- D diametro cilindro interno
- h altezza del cilindro interno
- n numero punti di rilevazione
- i intervallo temporale tra i punti di rilevazione
- t durata del test
- r velocità iniziale e finale del cilindro interno
- a accelerazione del cilindro interno
- c valore del tratto iniziale a velocità costante
- d durata del tratto iniziale a velocità costante

6.4 Risultati dei test

In figura 6.4 vengono mostrati i primi due test.

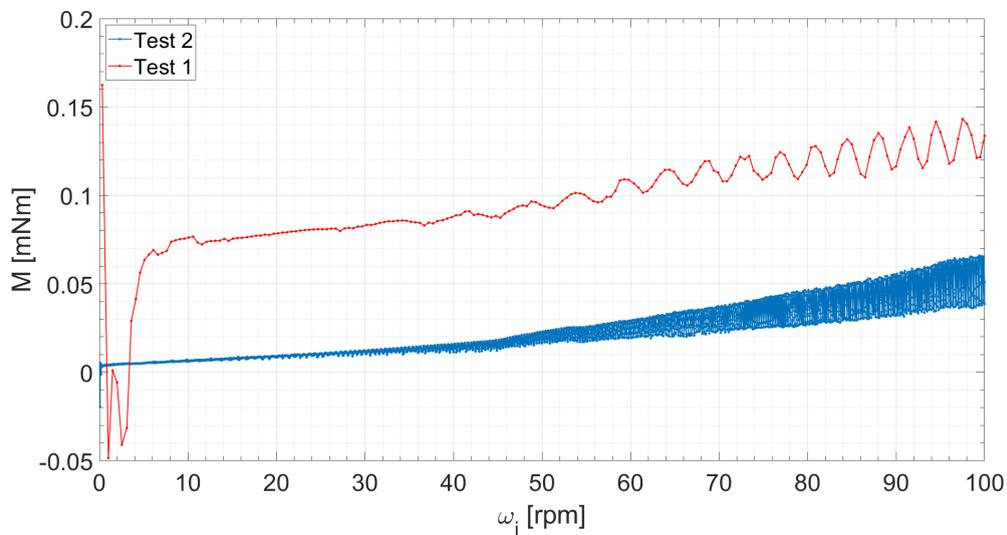


Fig. 6.4: Test 1 e 2

Dai primi due test si osserva chiaramente come le impostazioni del programma non sono adeguate per l'individuazione del cambio di pendenza nelle diverse instabilità. Il problema risiede nella rampa di accelerazione troppo elevata. Questo comporta la transizione immediata del fluido nell'intercapedine nel regime turbolento. Tuttavia nel test due è possibile osservare dei probabili cambi di pendenza tra i 40 e i 50 *rpm* e tra i 50 e 60 *rpm*. Nell'intorno di 0 *rpm* si osservano dei picchi di coppia *M* riconducibili alla fase di avviamento del cilindro interno e quindi soggetto a forze inerziali. Nei prossimi tre test si è cercato di abbassare ulteriormente il valore della rampa di accelerazione andando a controllare i parametri *n*, *i* e *t* che nel software sono legati fra loro.

In figura 6.5 viene mostrato il test numero tre.

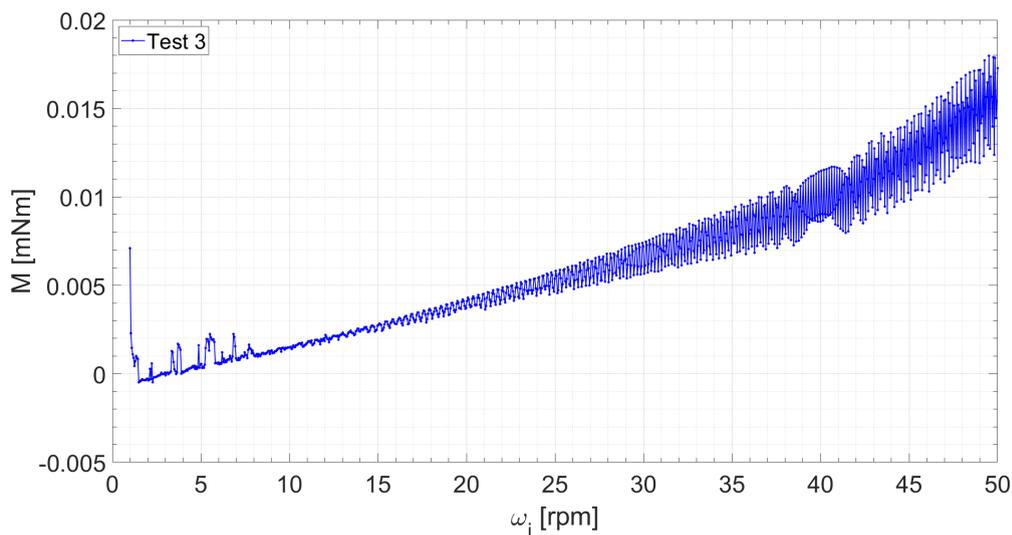


Fig. 6.5: Test 3

Nel test tre, nonostante l'elevata dispersione, è possibile osservare nell'intorno di 40 *rpm* un cambio di pendenza nell'andamento medio dei punti, in accordo all'incirca con il valore teorico calcolato precedentemente. Il cambio di pendenza è giustificato dal fatto che il passaggio dal regime stabile (flusso di Couette) al regime instabile (vortici di Taylor) porta ad avere una maggiore dissipazione e quindi un aumento della coppia *M* necessaria per mantenere in rotazione il cilindro interno. Tra 0 e 10 *rpm* è possibile notare un primo picco di coppia *M* riconducibile all'inerzia e i restanti picchi minori dovuti probabilmente a disturbi dati dalla presenza di bolle d'aria.

In figura 6.6 viene mostrato il test numero quattro insieme al test numero tre.

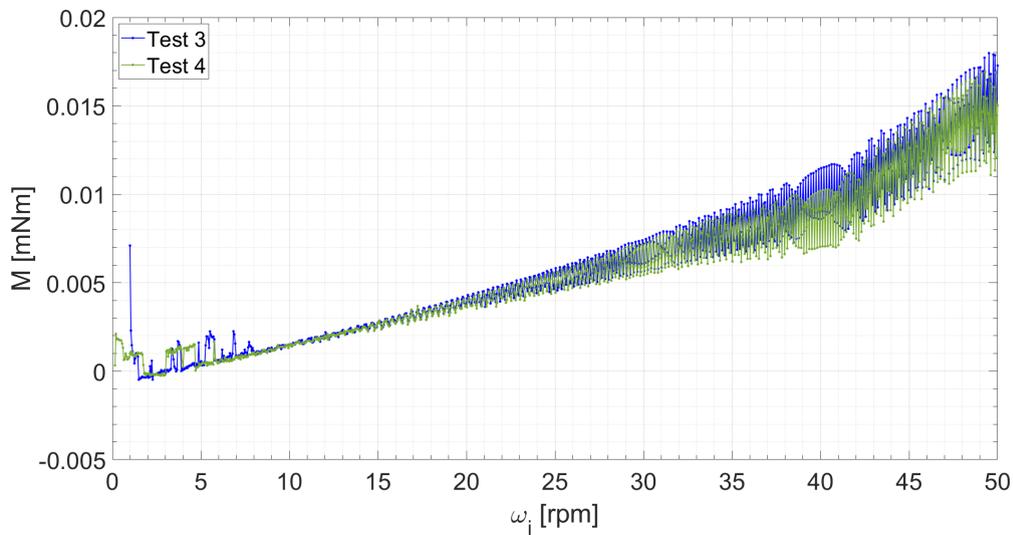


Fig. 6.6: Test 3 e 4

Si può notare nel quarto test un leggero abbassamento della coppia rispetto al primo test all'aumentare del regime di rotazione dovuto probabilmente all'eliminazione di eventuali bolle d'aria nel primo tratto di test a velocità costante.

In figura 6.7 viene mostrato il test numero cinque confrontato con il test numero tre.

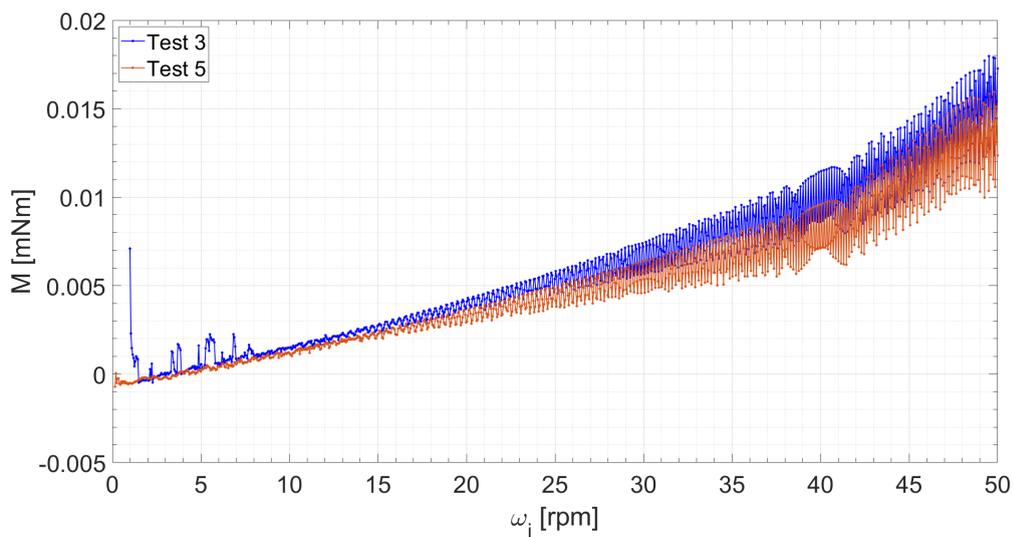


Fig. 6.7: Test 3 e 5

Nel quinto test si osserva una generale diminuzione della coppia rispetto il terzo test compatibilmente col fatto di avere una minore superficie bagnata. Sia per il quarto e quinto test il cambio di pendenza avviene sempre nell'intorno di 40 rpm. Nei successivi test il cilindro interno viene riposizionato all'altezza di 32 mm per semplicità di configurazione e assicurare la ripetibilità delle condizioni di esercizio.

La modalità di acquisizione dei punti sperimentali in questi test ha portato ad avere notevole dispersione e ciò ha reso più difficile l'individuazione del valore della velocità di rotazione in cui è avvenuto il cambio di pendenza della curva e quindi la nascita della prima instabilità. In conseguenza di ciò si è provveduto a cambiare il metodo di acquisizione dei dati. Dal sesto test si è controllato esclusivamente il parametro relativo al numero di punti di rilevazione n lasciando di conseguenza al software la scelta del tempo t necessario all'esecuzione del test. In questo modo è stata totalmente eliminata la dispersione dei punti e dal test numero sei è stato ricavato il grafico di figura 6.8.

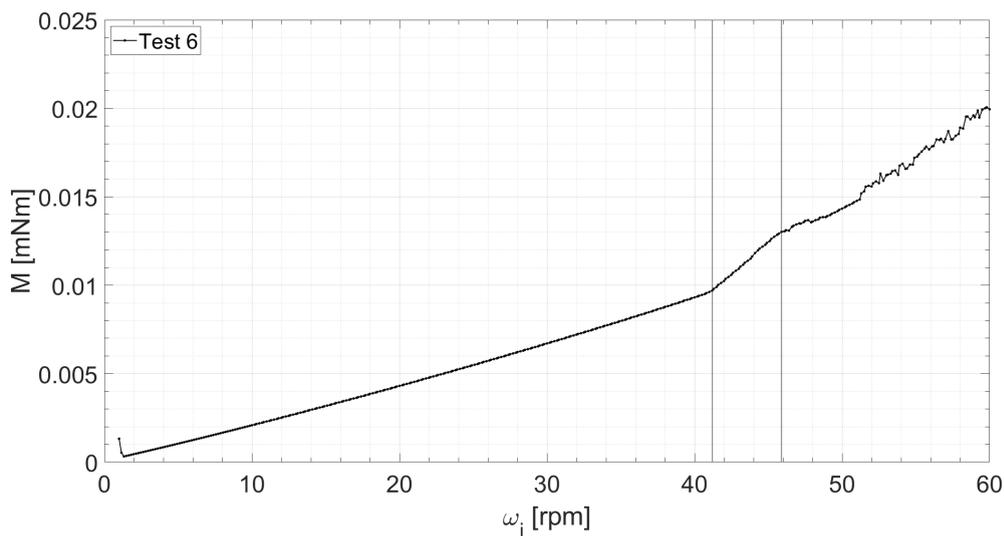


Fig. 6.8: Test 6

Nel test numero sei la presenza del picco iniziale di coppia M è dovuta all'inerzia del cilindro interno durante la fase di avviamento. In questo test è possibile individuare precisamente il momento in cui avvengono i cambi di pendenza e quindi la nascita delle relative instabilità. La prima instabilità compare a 41.2 rpm e che porta alla formazione dei vortici di Taylor. A 45.9 rpm invece si ha un secondo cambio di pendenza riconducibile al passaggio dai vortici di Taylor ai vortici ondulati. Si può quindi affermare di aver individuato anche la seconda instabilità non notata nei test precedenti. A 51.2 rpm si osserva una maggiore dispersione dei punti dovuto alla natura caotica del flusso. Successivamente al sesto test sono stati eseguiti altri tre test con l'obiettivo di verificare la ripetibilità dell'esperimento anche con rampe di accelerazioni maggiori. L'accelerazione maggiore è ottenuta semplicemente andando a dimezzare di volta in volta il numero di punti di rilevazione n . Qui di seguito, in figura 6.9, vengono rappresentati i test sette, otto e nove insieme al test sei.

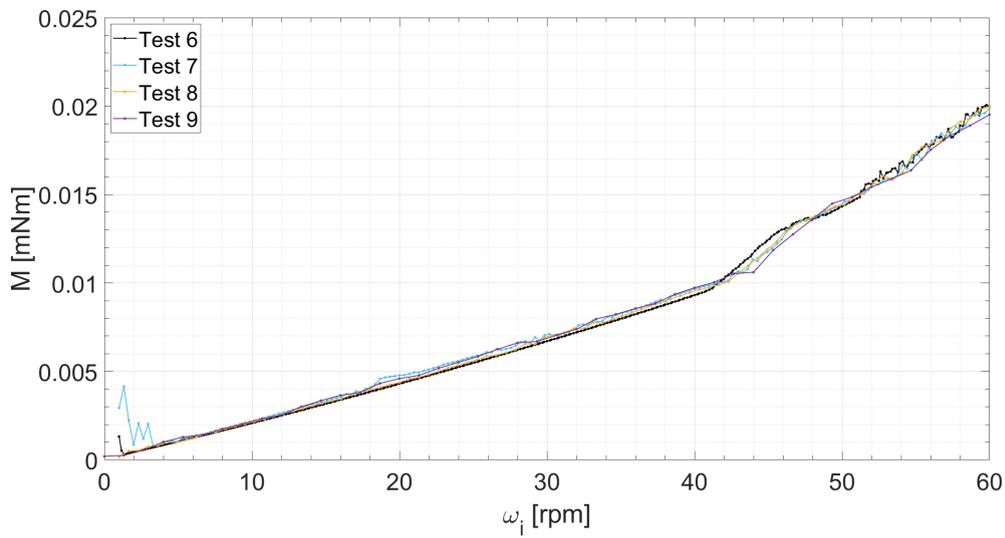


Fig. 6.9: Test 6, 7, 8 e 9

Dal grafico di figura 6.9 si conferma la buona ripetibilità dell'esperimento. Si può notare tuttavia che non è conveniente aumentare ulteriormente la rampa di accelerazione, ovvero meno punti di rilevazione, rispetto al test numero nove in quanto già esso presenta dei cambi di pendenza tendenzialmente meno evidenti. Di seguito, in figura 6.10, viene mostrato un ingrandimento della zona tra i 40 e 50 rpm in modo tale da osservare meglio tutti i cambi di pendenza.

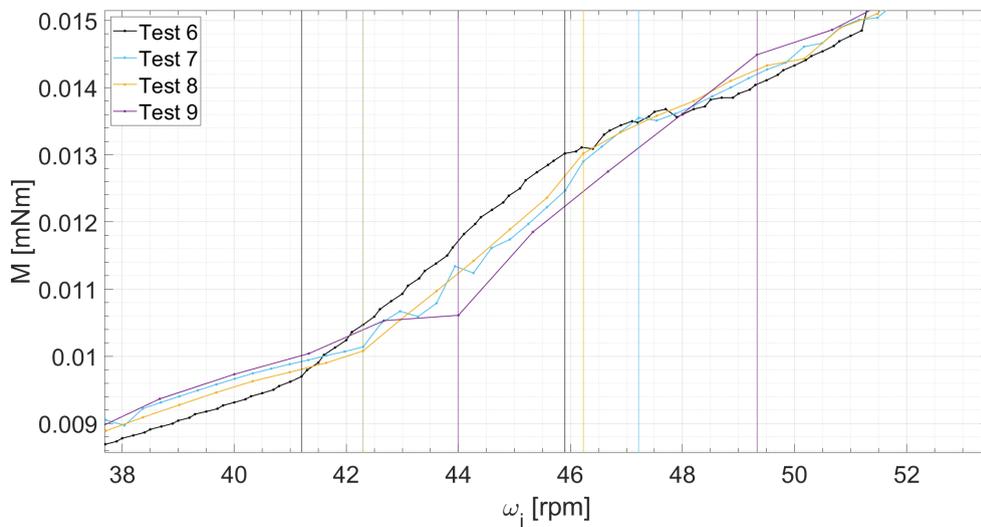


Fig. 6.10: Test 6, 7, 8 e 9 con ingrandimento

Prendendo in riferimento la figura 6.10 la prima instabilità si ottiene alle seguenti velocità ω_i :

- Test 6, 41.2 rpm
- Test 7, 42.3 rpm

- Test 8, 42.3 rpm
- Test 9, 44 rpm.

Mentre per la seconda instabilità:

- Test 6, 45.9 rpm
- Test 7, 47.22 rpm
- Test 8, 46.23 rpm
- Test 9, 49.33 rpm

6.5 $M = f(Ta)$ sperimentale

Di seguito, in figura 6.11, viene rappresentato il momento M ricavato sperimentalmente dal test numero sei in funzione del numero di Taylor (3.3).

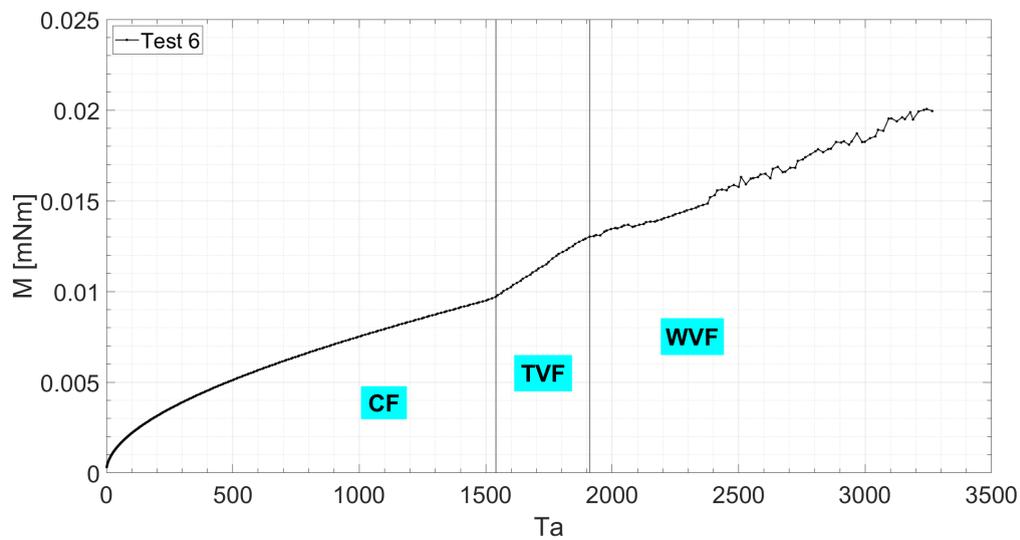


Fig. 6.11: Coppia M in funzione del numero di Taylor

Si può notare come la prima instabilità avviene per un valore del numero di Taylor pari a 1539.52. Mentre per la seconda instabilità si ha un valore di 1910.8.

7 Confronto tra analisi numerica e sperimentale

I risultati numerici e sperimentali vengono confrontati nel piano $(M/M_{rif}, Ta)$. Il valore di riferimento M_{rif} è un valore di coppia corrispondente ad un valore del numero di Taylor scelto a piacere. In questo caso è stato scelto il valore di coppia corrispondente a Taylor 500, sia per i risultati numerici sia per i test sperimentali. Il test sperimentale preso in considerazione è il test numero sei. In figura 7.1 viene mostrato il confronto.

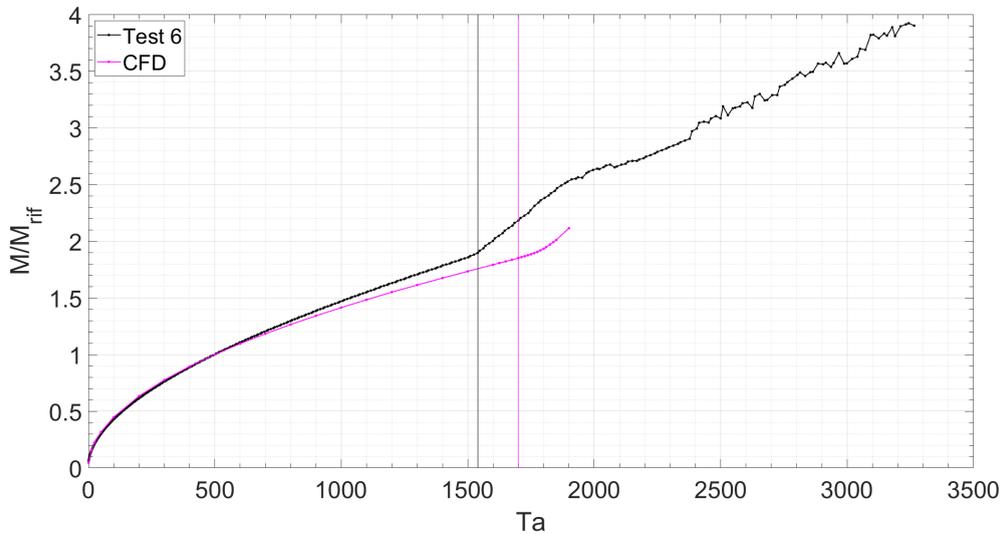


Fig. 7.1: Confronto tra simulazione numerica e test sperimentale

Per quanto riguarda la curva della simulazione CFD è possibile osservare un graduale cambio di pendenza che ha inizio nell'intorno di Taylor 1700. Mentre nel test numero sei si ha un cambio di pendenza netto per Taylor pari a 1539.52. Tale differenza nel numero di Taylor può essere data dalla presenza nelle prove sperimentali di piccoli disturbi che possono attivare l'instabilità prematuramente. Inoltre è necessario considerare che il cilindro utilizzato nelle prove di laboratorio presenta una punta conica e un perno, necessario per l'accoppiamento con il reometro, quindi la coppia che viene misurata dallo strumento tiene conto di queste superfici "aggiuntive" non presenti nel calcolo numerico e ciò giustifica un valore della coppia sperimentale più alto rispetto al risultato numerico, a parità di velocità di rotazione.

Per numeri di Taylor compresi tra 0 e nell'intorno di 750 è possibile notare un ottimo accordo tra le osservazioni sperimentali e i risultati numerici.

Oltre il valore di Taylor 1900 il software non è più in grado di ottenere una soluzione. Per risolvere il problema numerico a più alti numeri di Taylor, è necessario eliminare le ipotesi di assialsimmetria e stazionarietà.

8 Conclusioni

Obiettivo di questa tesi è stato quello di validare numericamente e sperimentalmente i dati raccolti dalla letteratura inerenti alle instabilità idrodinamiche che si verificano nel fluido presente tra due cilindri coassiali, di cui quello interno posto in rotazione.

Confrontando i risultati numerici e sperimentali, si sono ottenuti risultati in buon accordo con i dati ottenuti dalle prove in laboratorio per numeri di Taylor compresi tra 0 e 750. Al di sopra del numero di Taylor pari a 750, i risultati tendono a discostarsi tra di loro a causa di diversi fattori, tra cui il principale è legato al fatto che il cilindro utilizzato nelle prove di laboratorio presenta una punta conica e un perno, che non sono riprodotti nel calcolo numerico. La presenza di superfici "aggiuntive" giustifica un valore della coppia sperimentale più alto rispetto al risultato numerico, a parità di velocità di rotazione.

Il valore del numero di Taylor critico ottenuto dalla simulazione numerica, pari a 1700, è in ottimo accordo con il valore preso come riferimento dalla letteratura, ossia 1695. Tuttavia la prima instabilità, nei test sperimentali, si osserva per un numero di Taylor leggermente differente pari a 1540 a causa delle problematiche spiegate precedentemente.

Dal punto di vista numerico, una successiva estensione di analisi può essere condotta eliminando le ipotesi di assialsimmetria e stazionarietà osservando così instabilità fluidodinamiche successive alla prima. Un altro sviluppo possibile è quello di risolvere numericamente il problema in coordinate cartesiane, con l'ipotesi di narrow-gap approximation.

Dal punto di vista sperimentale, sarebbe interessante costruire un apparato che permetta di osservare le strutture vorticose tramite l'inseminazione del fluido. Inoltre, questi tesi sarà la base di partenza per studi successivi riguardanti cilindri aventi una microstrutturazione superficiale, eventualmente impregnati con oli lubrificanti [18, 19].

Simbologia

Simboli

ρ	Densità del fluido
U	Velocità del fluido
t	Tempo
∇	Gradiente
P	Pressione del fluido
g	Accelerazione gravitazionale
μ	Viscosità dinamica del fluido
ν	Viscosità cinematica del fluido
∇^2	Laplaciano
$\nabla \cdot$	Divergenza
V	Velocità della piastra
h	Distanza tra le piastre
r_i	Raggio del cilindro interno
R_{ci}	Raggio del cilindro interno adimensionale
r_o	Raggio del cilindro esterno
ω_i	Velocità angolare del cilindro interno
ω_o	Velocità angolare del cilindro esterno

H	Altezza dei cilindri
u, v, w	Componenti della velocità del fluido
v_r, v_θ, v_z	Componenti della velocità del fluido
τ	Tensione tangenziale
d	Dimensione dell'intercapedine (gap) tra i cilindri coassiali
D	Dimensione dell'intercapedine (gap) tra i cilindri coassiali adimensionale
A, B	Costanti di integrazione
F	Forza agente sulla superficie del cilindro interno
M	Coppia cilindro interno
M_i	Momento torcente sul cilindro interno
M_o	Momento torcente sul cilindro esterno
ϕ	Aspect ratio tra cilindri coassiali
R	Rapporto tra r_i e d
Re_i	Numero di Reynolds del cilindro interno
Re_o	Numero di Reynolds del cilindro esterno
Ta	Numero di Taylor
Re_i	Numero di Reynolds del cilindro interno
Re_o	Numero di Reynolds del cilindro esterno

Apici

$\hat{\cdot}$	Parametri dimensionali
$\bar{\cdot}$	Componente media
\prime	Componente fluttuante

Abbreviazioni ed acronimi

<i>RO</i>	Reverse Osmosis
<i>ISS</i>	International Space Station
<i>EHT</i>	Event Horizon Telescope
<i>ODE</i>	Ordinary Differential Equation
<i>PDE</i>	Partial Differential Equation
<i>RMSE</i>	Route Mean Square Error
<i>AISI</i>	American Iron and Steel Institute
<i>FEM</i>	Finite Element Method
<i>IDE</i>	Integrated Development Environment

Riferimenti bibliografici

- [1] R. J. Donnelly. "Taylor-Couette flow: The early days". *Physics Today*, 44(11):32–39, 1991.
- [2] N. Balestrieri. "Analisi e sviluppo del reattore a flusso di Taylor-Couette per la sintesi di nanoparticelle di silice su larga scala". <https://hdl.handle.net/20.500.12608/49821>.
- [3] S. Lee and R. M. Lueptow. "Rotating reverse osmosis system based on Taylor-Couette flow". In *12th International Couette-Taylor Workshop*, pages 6–8, 2001.
- [4] S. Lee and R. M. Lueptow. "Rotating reverse osmosis for water recovery in space: influence of operational parameters on RO performance". *Desalination*, 169(2):109–120, 2004.
- [5] Q. Tu, W. Ibrahimi, S. Ren, J. Wu, and S. Li. "A Molecular Dynamics Study on Rotational Nanofluid and Its Application to Desalination". *Membranes*, 10(6):117, 2020.
- [6] H. Ji and J. Goodman. "Taylor–Couette flow for astrophysical purposes". *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 381(2246):20220119, 2023.
- [7] G. G. Stokes. "*On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids*", volume 1 of *Cambridge Library Collection - Mathematics*, page 75–129. Cambridge University Press, 2009.
- [8] G. I. Taylor. VIII. "Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 223(605-615):289–343, 1923.
- [9] M. C. Wendl. "General solution for the Couette flow profile". *Physical Review E*, 60(5):6192, 1999.
- [10] W. M^F. Orr. "The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. Part II: A viscous liquid". In *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences*, volume 27, pages 69–138. JSTOR, 1907.
- [11] L. Rayleigh. "On the dynamics of revolving fluids". *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 93(648):148–154, 1917.
- [12] M. Couette. "Ann. de Chim. et de Phys.". *6 sér.*, vol. 21, 1890.
- [13] A. Mallock. III. "Experiments on fluid viscosity". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, (187):41–56, 1896.

- [14] Rayleigh. LXV. "On the motion of a viscous fluid". *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 26(154):776–786, 1913.
- [15] C. D. Andereck, S. S. Liu, and H. L. Swinney. "Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders". *Journal of fluid mechanics*, 164:155–183, 1986.
- [16] S. Chandrasekhar. "*Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*". Dover Publications, Inc., 1961.
- [17] "COMSOL". <https://www.comsol.com/>.
- [18] T. Van Buren and A. J. Smits. "Substantial drag reduction in turbulent flow using liquid-infused surfaces". *Journal of Fluid Mechanics*, 827:448–456, 2017.
- [19] F. Xu, J. Su, B. Lan, P. Zhao, Y. He, C. Sun, and J. Wang. "Direct numerical simulation of Taylor–Couette flow with vertical asymmetric rough walls". *Journal of Fluid Mechanics*, 975:A30, 2023.