Università degli Studi di Genova
Facoltà di Ingegneria

Compitino di Meccanica dei Fluidi
8 Novembre 2005, ore 9:00
Un foglio "aiuti" formato A4 ammesso
Rispondete dettagliatamente e giustificate tutte le vostre risposte
COMPITINO B

Esercizio 1: **Unità di misura** (~4 punti)

Si scriva l'espressione e si diano le unità di misura del momento centrifugo di inerzia I_{xy} di una superficie S rispetto all'asse y. Si spieghi perchè la coordinata x_F del centro di spinta F risulta uguale a $x_F=I_{xy}/(y_C\, S)$, con y_C la coordinata del baricentro di S.

Esercizio 2: **Matrice degli sforzi** (~7 punti)

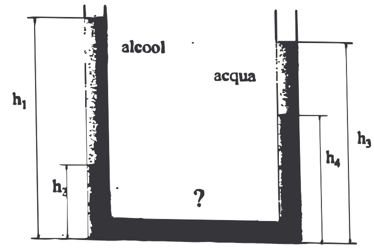
Una matrice degli sforzi in un punto A di un fluido è data da:

$$\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad [\text{KPa}]$$

1. Si esprima $\underline{T}_n$, vettore di sforzo nel piano di normale $\underline{n} = (n_1, n_2)$ nel punto A.
2. Si mostri che un versore $\underline{t}$ tangente al piano definito dal versore $\underline{n}$ può essere dato da $\underline{t} = (-n_2, n_1)$. Si esprima il versore antiparallelo a $\underline{t}$.
3. Si scriva la proiezione T_{nt} di $\underline{T}_n$ su $\underline{t}$ e si dimostri che tale proiezione è massima quando $\underline{n} = (1, 0)$. Quanto vale T_{nt} in tal caso?
4. Si calcolino direzioni e tensioni principali della matrice degli sforzi data sopra (e si verifichi l'*invariante* I_1)

Esercizio 3: **"Manometri"** (~4 punti)

Dato il dispositivo in figura, calcolare la densità del fluido incognito. Come cambierebbero i livelli se tale dispositivo fosse trasportato su Marte?



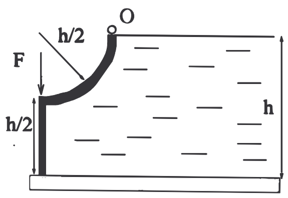
$h_1 = 50$ cm $h_2 = 13$ cm $h_3 = 32$ cm
$h_4 = 20$ cm $\rho_{acqua} = 1000$ Kg/m^3 $\rho_{alcool} = 780$ Kg/m^3

Esercizio 4: **Spinta su superfici parzialmente immerse** (~4 punti)

Un iceberg cubico di ghiaccio ($\rho_{ghiaccio}$ = 998.15 [kg m^{-3}]) è immerso in acqua salata (ρ_{acqua} = 1025 [kg m^{-3}]). Si calcoli l'altezza della parte emersa; $m_{iceberg} = 10^6$ [kg].

Esercizio 5: **Forze e momenti su una paratia** (~8 punti)

La paratia di figura è incernierata in O. Determinare l'ampiezza minima della forza F per impedire che lo sportello si apra sotto la spinta dell'acqua. (Si trascuri il peso proprio della paratia e l'attrito della cerniera; la dimensione b è ortogonale al foglio.)



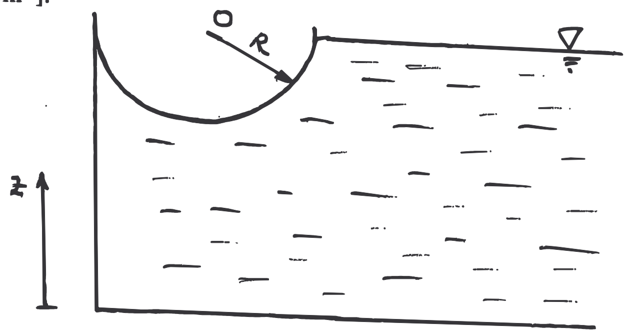
$h = 3$ m $\quad b = 2$ m

(sportello incernierato in O)

Suggerimento: si consideri la distribuzione trapezoidale di pressione sulla parte verticale della paratia come la somma di due contribuzioni distinte, una contribuzione uniforme ed una contribuzione triangolare, e si calcoli il momento di ciascuna delle due distribuzioni.

Esercizio 6: **Spinta su una superficie gobba** (~6 punti)

Data la superficie gobba di figura di forma semi-sferica si calcolino le componenti orizzontale e verticale della spinta risultante, nonchè le linee di azione delle componenti. Siano R = 50 [cm] e ρ = 1.2 [g cm^{-3}].



Compitino B - La Spezia

1. $$I_{xy} = \int_S xy\, dS \qquad [m^4]$$

La coordinata x_F del centro di spinta si ottiene imponendo che il momento rispetto ad y della risultante è uguale al momento delle forze distribuite, cioè $\underset{\text{risultante}}{F} \cdot x_F = \int_S p\, x\, dS$

$$\rightarrow \quad \overbrace{\gamma y_c S}^{\text{risultante}}\, x_F = \int (\gamma y) x\, dS \rightarrow x_F = \frac{I_{xy}}{y_c S}$$

2.

2.1. $\underline{T}_n = \underline{n}\,\mathbb{T} = (n_1 \;\; n_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (n_1 - n_2 \; , \; -n_1 + n_2)$

2.2. $\underline{t} = (-n_2, n_1)$ è ortogonale ad $\underline{n}$ in quanto $\underline{n} \cdot \underline{t} = 0$. Inoltre, il versore antiparallelo a $\underline{t}$ è dato da $(n_2, -n_1)$.

2.3. $$T_{nt} = \underline{T}_n \cdot \underline{t} = n_2^2 - n_1 n_2 + n_1 n_2 - n_1^2 = n_2^2 - n_1^2 =$$

$$= \underset{\substack{\text{in quanto} \\ n_1^2 + n_2^2 = 1}}{(1 - n_1^2)} - n_1^2 = 1 - 2 n_1^2$$

$$\frac{\partial T_{nt}}{\partial n_1} = -4 n_1 = 0 \quad \text{se} \quad n_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{n} = (0, \pm 1)$$

ma vale anche che $T_{nt} = n_2^2 - n_1^2 =$

$$= n_2^2 - (1 - n_2^2) = 2n_2^2 - 1$$

quindi: $\dfrac{\partial T_{nt}}{\partial n_2} = 4\,n_2 = 0$ per $n_2 = 0$ $\rightarrow$ $\underline{n} = (\pm 1, 0)$

In entrambi i casi T_{nt} vale $+1$ (IN MODULO)

(in realtà $T_{nt} = 1$, valore $\underline{\text{massimo}}$ solo per $\underline{n} = (0, \pm 1)$;

il valore è $\underline{\text{minimo}}$ $(T_{nt} = -1)$ quando $\underline{n} = (\pm 1, 0)$)

2.4. Direzioni e tensioni principali: banale: $\lambda_1 = 0 \rightarrow \underline{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\lambda_2 = 2 \rightarrow \underline{n} = \left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$

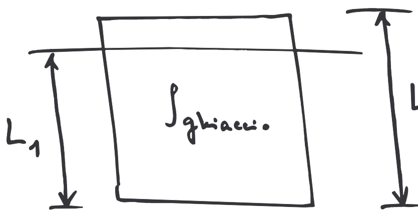
$\boxed{3.}$

$$\cancel{p_0} + \rho_{alcool}(h_1 - h_2)g + \rho_? g h_2 = \cancel{p_0} + \rho_{H_2O}\, g\,(h_3 - h_4) + \rho_? g\, h_4$$

$$\rho_? = \frac{\rho_{alcool}(h_1 - h_2) - \rho_{H_2O}(h_3 - h_4)}{h_4 - h_2} = 240\,8{,}57 \left[\frac{kg}{m^3}\right]$$

Siccome p_0 si semplifica, e g anche, otterremmo lo stesso risultato (e gli stessi livelli) anche nell'atmosfera e con la gravità marziana

$\boxed{4.}$



ρ_{acqua}

$$V_{iceberg} = \frac{m}{\rho_{iceberg}} = \frac{10^6\,[kg]}{998.15\left[\frac{kg}{m^3}\right]} = 1001.853\,[m^3]$$

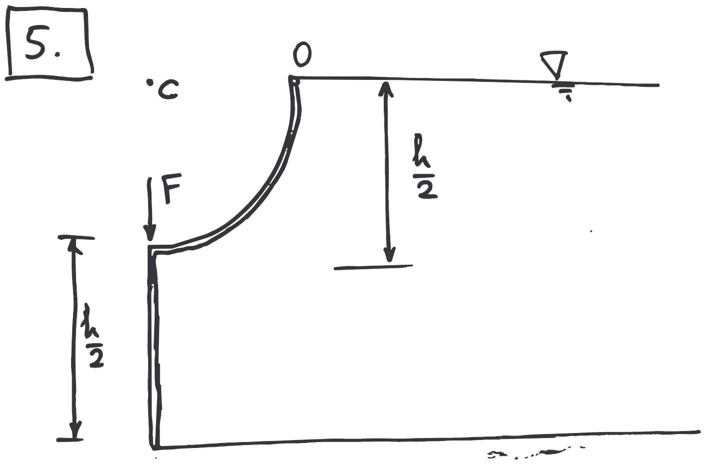
$m = 10^6\ [kg]$ $\longrightarrow$ $L = 10.00617\ [m]$

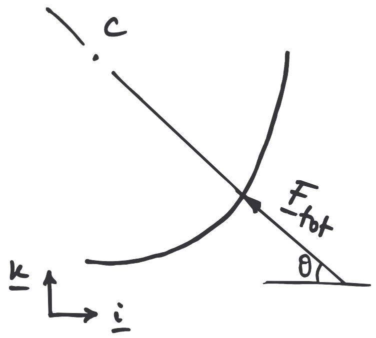
$$F_{Archimede} = \text{Peso iceberg} \rightarrow \cancel{g}\, V_{carena}\, \rho_{acqua} = \cancel{g}\, V_{iceberg}\, \rho_{ghiaccio}$$ 3

$$L^2 L_1 \cdot 1025 = L^3\ 998.15 \quad \rightarrow L_1 = 9.744\ [m]$$

$$\text{Parte emersa} = L - L_1 = 0.2621\ [m]$$

$\boxed{5.}$





Sulla parte curva si ha:

$$\underline{F}_o = \rho g \frac{h}{4}\left(\frac{h}{2} b\right)(-\underline{i}) =$$

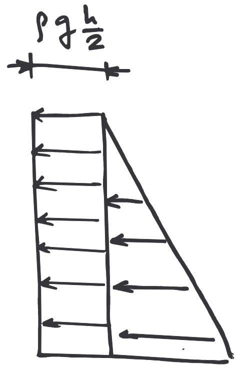
$$= -22072.5\ [N]\ \underline{i}$$

$$\underline{F}_v = \rho g \frac{\pi (h/2)^2}{4} b\ \underline{k} = 34671.4\ [N]\ \underline{k}$$

$$|\underline{F}_{tot}| = \sqrt{F_o^2 + F_v^2} = 41101.1\ [N]$$ e passa per C

facendo un angolo rispetto all'orizzontale $\theta = \tan^{-1}\frac{F_v}{F_o} = 57.5°$

Il momento (orario) di tale forza risultante rispetto ad O è: $M_{curva} = (F_{tot} \sin\theta) \cdot \frac{h}{2} = 52007.1\ [Nm]$



Il momento delle due componenti del trapezio rispetto ad O è:

$$\rho g \frac{h}{2} \overbrace{\left(\frac{h}{2} b\right)}^{\text{area}} \overbrace{\left(\frac{h}{2} + \frac{h}{4}\right)}^{\text{braccio}} + \rho g \frac{h}{4} \overbrace{\left(\frac{h}{2} b\right)}^{\text{area}} \overbrace{\left(\frac{h}{3} + \frac{h}{2}\right)}^{\text{braccio}}$$

$$= \rho g b h^3 \left(\frac{14}{48}\right) = 154507.5 \; [N\,m]$$

in senso orario.

Il momento totale è $52007.1 + 154507.5$ [N m] ed è bilanciato se la forza F (che genera un momento antiorario rispetto ad O) è almeno pari a:

$$\frac{M_{totale}}{h/2}$$

(poiché $M_{totale} = F \frac{h}{2}$ all'equilibrio)

si ha quindi: $\boxed{F = 137676.4 \; [N]}$

$\boxed{6.}$ Sulla superficie gobba di figura non c'è forza orizzontale (perché tutte le spinte sul piano orizzontale sono compensate) ed $\exists$ una forza verticale la cui linea di azione passa per il centro di curvatura della semisfera: $F_v = \rho g \left(\frac{2}{3}\pi R^3\right) = 3081.9 \; [N]$