Università degli Studi di Genova
Facoltà di Ingegneria

Compitino di Meccanica dei Fluidi
8 Novembre 2005, ore 9:00
Un foglio "aiuti" formato A4 ammesso

Rispondete dettagliatamente e giustificate tutte le vostre risposte

COMPITINO A

Esercizio 1: **Unità di misura** (~3 punti)

Si scrivano le unità di misura della densità ρ e della viscosità dinamica μ (sia nel sistema SI che nel sistema "cgs"), e si espliciti il rapporto tra ρ e μ.

Esercizio 2: **Matrice degli sforzi** (~6 punti)

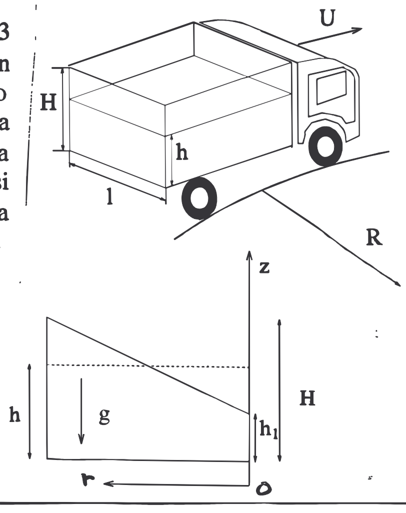
Una matrice degli sforzi in un punto A di un fluido è data da:

$$\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [\text{KPa}]$$

1. Si esprima $\underline{T}_n$, vettore di sforzo nel piano di normale $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$ nello stesso punto A.
2. Si trovi il versore $\underline{n}$ tale che $\underline{T}_n$, sia parallelo ad $\underline{n}$.
3. Qual'è la relazione tra $\underline{n}$ così trovato e le "direzioni principali"?
4. Si calcolino direzioni e tensioni principali (e si verifichi l'*invariante* I_1).

Esercizio 3: **Sistemi di riferimento non inerziali** (~5 punti)

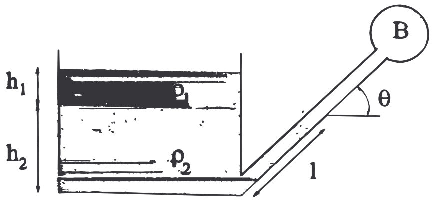
Un camion trasporta del liquido che riempie per 2/3 il cassone a forma di parallelepipedo aperto in superficie e percorre una curva circolare di raggio R alla velocità costante U. Calcolare la massima velocità con cui il camion puo' percorrere la curva senza che il liquido fuoriesca (suggerimento: si consideri R molto grande di modo che la forza centrifuga $\rho U^2/R$ possa essere considerata come indipendente dalla coordinata r di figura).



$l = 2.5$ m $\quad H = 2$ m
$R = 200$ m $\quad (h = 2H/3)$

Esercizio 4: **"Manometri"** (~5 punti)

Dato il dispositivo in figura, calcolare l'angolo θ in modo da avere all'equilibrio nel tubo inclinato una colonna di fluido di lunghezza *l*.

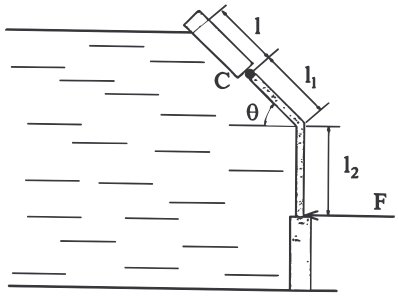


$h_1 = 20$ cm $\quad h_2 = 80$ cm
$\rho_1 = 10870$ Kg/m^3 $\quad \rho_2 = 11030$ Kg/m^3
$p_B = 1.7$ atm $\quad l = 0.6$ m

Nota: B è un gas, e sopra il fluido di densità ρ_1 c'è dell'aria a pressione atmosferica.

Esercizio 5: **Forze e momenti su una paratia** (~8 punti)

Data la configurazione dell'illustrazione, calcolare il modulo della forza F per evitare l'apertura dello sportello incernierato in C.



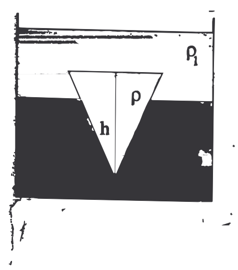
$l = 1.2$ m $\quad l_1 = 1.4$ m
$l_2 = 2$ m $\quad b = 1.5$ m
$\theta = 45^o$ $\quad$ fluido:acqua
b è la dimensione dello sportello nella direzione ortogonale al foglio.

Suggerimento: si consideri che una distribuzione trapezoidale di pressione può essere considerata come la somma di due distribuzioni distinte, una uniforme ed un'altra triangolare. Si può facilmente calcolare quindi il momento di ciascun contributo separatamente.

Esercizio 6: **Corpi immersi, spinta di Archimede** (~6 punti)

Dato il cono a base circolare di figura, determinare l'altezza della porzione di solido immerso nel fluido a densità ρ_0.

Nota: il volume di un cono a base circolare si ottiene dal prodotto dell'area della base, per l'altezza, diviso 3.



$\rho = 1.15$ Kg/dm^3 $\quad \rho_0 = 1.2$ Kg/dm^3
$\rho_1 = 0.98$ Kg/dm^3 $\quad h = 0.4$ m

Compitino A – La Spezia

$\boxed{1.}$ ρ $[kg\, m^{-3}]$ $[g\, cm^{-3}]$

μ $[kg\, m^{-1}\, s^{-1}]$ $[g\, cm^{-1}\, s^{-1}] = [\text{Poise}]$

$\dfrac{\mu}{\rho} = \nu$ viscosità cinematica

$\boxed{2.}$

$$\underline{T}_n = \underline{n}\,\mathbb{T} = (n_1 \;\; n_2 \;\; n_3)\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

2.1. $$= (-3n_1 - 2n_2 + n_3 \,,\; -2n_1 + n_2 ,\; n_1 + n_3)$$

2.2. $\underline{T}_n \parallel \underline{n} \implies \underline{T}_n = \lambda\, \underline{n}$ cioè

$$\begin{aligned} -3n_1 - 2n_2 + n_3 &= \lambda n_1 \\ -2n_1 + n_2 &= \lambda n_2 \\ n_1 + n_3 &= \lambda n_3 \end{aligned}$$

Il versore $\underline{n}$ tale che $\underline{T}_n \parallel \underline{n}$ è proprio

2.3. quello che definisce gli assi principali !

Quindi:

$$\begin{aligned} (-3-\lambda)n_1 - 2n_2 + n_3 &= 0 \\ -2n_1 + (1-\lambda)n_2 &= 0 \\ n_1 + (1-\lambda)n_3 &= 0 \end{aligned}$$

Soluzione ∃ se

2.4.
$$\det\begin{pmatrix} -3-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

cioè :
$$(\lambda-1) + (1-\lambda)\Big[(3+\lambda)(\lambda-1) - 4\Big] = 0$$

$$(\lambda-1)\Big[1 - \big[(3+\lambda)(\lambda-1)-4\big]\Big] = 0$$

$$-(\lambda-1)\left[\lambda^2 + 2\lambda - 8\right] = 0 \qquad \lambda_1 = -4,\quad \lambda_2 = 1,\quad \lambda_3 = 2$$

$\lambda_1 = -4$:
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$m_{11} - 2m_{12} + m_{13} = 0 \quad \leftarrow \text{superflua (perché la matrice è singolare)}$$
$$-2m_{11} + 5m_{12} = 0$$
$$m_{11} + 5m_{13} = 0$$

$$\mapsto \quad m_{11} = -5\, m_{13}, \qquad m_{11} = \frac{5}{2} m_{12} \quad \mapsto \quad \boxed{\underline{m}_1 = (m_{11}\ \ m_{12}\ \ m_{13}) = \left(-\frac{5}{\sqrt{30}},\ -\frac{2}{\sqrt{30}},\ \frac{1}{\sqrt{30}}\right)}$$

$\lambda_2 = 1$:
$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{21} \\ m_{22} \\ m_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-4m_{21} - 2m_{22} + m_{23} = 0$$
$$m_{21} = 0$$
$$\mapsto \quad \boxed{\underline{m}_2 = (m_{21}\ \ m_{22}\ \ m_{23}) = \left(0,\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$$

$\lambda_3 = 2$: $\begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{31} \\ n_{32} \\ n_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-5\, n_{31} - 2\, n_{32} + n_{33} = 0$ ← superflua

$-2\, n_{31} - n_{32} = 0$

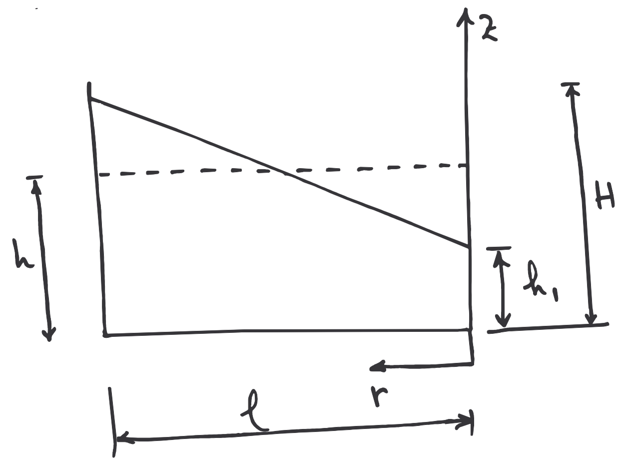
$n_{31} - n_{33} = 0$

$\mapsto \boxed{\underline{n}_3 = (n_{31} \;\; n_{32} \;\; n_{33}) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)}$

L'invariante $I_1 = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} = -3 + 1 + 1$ [kPa] $= -1$ [kP]

Si verifica che è uguale a $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -4 + 1 + 2$ [kPa] $=$ -1 [kPa]

3.



$H = 2$ [m]

$h = \frac{2}{3} H = 1,\bar{3}$ [m]

$\ell = 2,5$ [m]

$R = 200$ [m]

Equazioni della statica in un riferimento solidale con il camion :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0 \\[2ex] -\dfrac{\partial p}{\partial r} + \rho \dfrac{U^2}{R} = 0 \end{cases}$$

(con l'hp che $R \gg 1$ [m], considero la forza centrifuga indipendente dalla coordinata r)

④

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho \frac{U^2}{R} dr - \rho g\, dz$$

La superficie libera è a p_{atm} $\rightarrow$ $dp = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dr} = \frac{\rho U^2}{\rho g R} \quad \mapsto \quad z(r) = \frac{U^2 r}{g R} + \text{cost.}$$

La costante si determina in base al volume iniziale di fluido. La condizione critica si ha quando $z(r=\ell) = H$ e per conservare la massa deve essere $h = \frac{h_1 + H}{2}$.

$$z(r=\ell) = H = \frac{U^2 \ell}{g R} + \text{cost.} \qquad \text{cost.} = H - \frac{U^2 \ell}{g R}$$

$$z(r) = \frac{U^2 (r-\ell)}{g R} + H$$

$$z(0) = h_1 = 2h - H = -\frac{U^2 \ell}{g R} + H$$

Quindi: $U^2 = \frac{2(H-h) g R}{\ell}$ $\rightarrow$ $\boxed{U = 32.35 \ [m\,s^{-1}]}$

$\boxed{4.}$

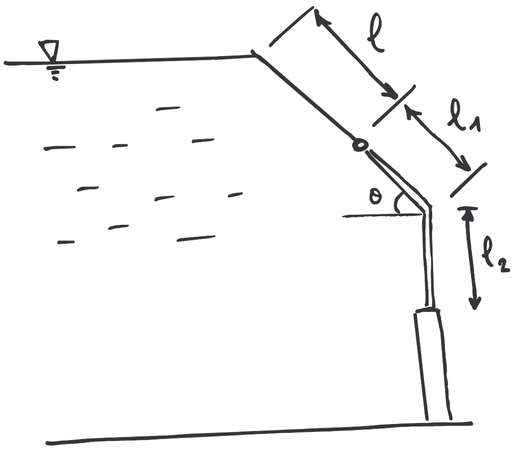
$$p_{atm} + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 = p_B + \rho_2 g \ell \sin\theta$$

= pressione sul fondo del recipiente

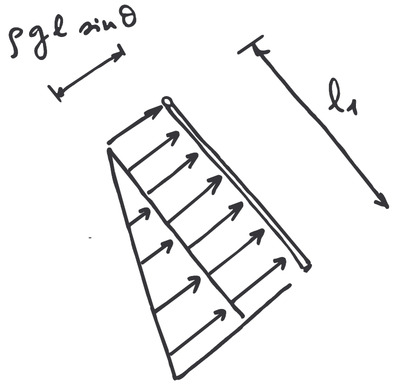
$$\sin\theta = \frac{1}{\rho_2 g \ell}\left[p_{atm} - p_B + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2\right] = 0.583624$$

$\rightarrow \boxed{\theta = 35.70°}$

5.



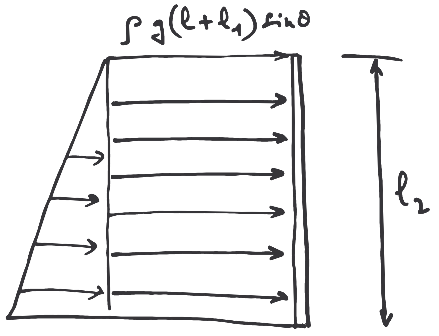
Trascuro il peso dello sportello e gli attriti.



$$\rho g l \sin\theta \,\overset{\text{area}}{\overbrace{(l_1 b)}}\, \overset{\text{braccio}}{\overbrace{\frac{l_1}{2}}} \; +$$

$$\rho g \frac{l_1}{2} \,\overset{\text{area}}{\overbrace{(l_1 b)}}\, \overset{\text{braccio}}{\overbrace{\frac{2}{3} l_1}} \; +$$

$$\rho g (l + l_1) \sin\theta \,\overset{\text{area}}{\overbrace{(l_2 b)}}\, \overset{\text{braccio}}{\overbrace{\left(l_1 \sin\theta + \frac{l_2}{2}\right)}}$$



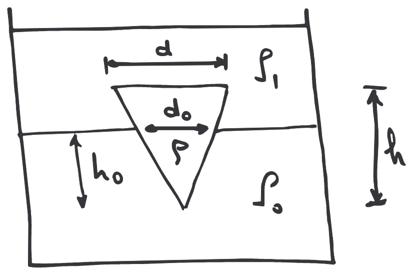
$$+ \; \rho g \frac{l_2}{2} \,\overset{\text{area}}{\overbrace{(l_2 b)}}\, \overset{\text{braccio}}{\overbrace{\left(l_1 \sin\theta + \frac{2}{3} l_2\right)}} \; =$$

$$F \left(l_2 + l_1 \sin\theta \right)$$

$$\rho g b \left[\frac{l_1^2 l}{2} \sin\theta + \frac{l_1^3}{3} + l_2 (l_1 + l) \sin\theta \left(l_1 \sin\theta + \frac{l_2}{2} \right) + \frac{l_2^2}{2} \left(l_1 \sin\theta + \frac{2}{3} l_2 \right) \right] = F (l_2 + l_1 \sin\theta)$$

$\Rightarrow$ inserendo i dati: $\boxed{F = 67472.34 \; [N]}$ forza minima necessaria per impedire l'apertura dello sportello.

6.



Archimede: $$\rho_0 g V_0 + \rho_1 g V_1 = \rho g V$$

dove $V_0 + V_1 = V$ con $\begin{cases} V = \dfrac{\pi d^2}{12} h \\ V_0 = \dfrac{\pi d_0^2}{12} h_0 \end{cases}$

Dalla similitudine tra i triangoli si può scrivere:

$$\frac{d}{h} = \frac{d_0}{h_0} \quad \mapsto \quad V_0 = \frac{\pi}{12} h_0 \left(d \frac{h_0}{h} \right)^2 = V \left(\frac{h_0}{h} \right)^3$$

$$\rightarrow \quad \rho_0 g V_0 + \rho_1 g (V - V_0) = \rho g V$$

$$V_0 (\rho_0 - \rho_1) = V (\rho - \rho_1)$$

$$\rightarrow \quad h_0^3 (\rho_0 - \rho_1) = h^3 (\rho - \rho_1)$$

$$\boxed{h_0 = \left[\frac{\rho - \rho_1}{\rho_0 - \rho_1} h^3 \right]^{1/3} = 0.367\ [m]}$$