Esercizio 1

1. Grandezze indipendenti

	M	L	T
R	0	1	0
Q	0	3	-1
ρ	1	-3	0
N	0	0	-1
P_{cz}	0	2	-2
$\dot{E}$	1	2	-3
μ	1	-1	-1

2. R, Q, ρ : grandezze fondamentali

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \qquad \text{o.k.}$$

$$\Pi_1 = \frac{N}{Q/R^3} \; ; \qquad \Pi_2 = \frac{P_{cz}}{Q^2/R^4} \; ; \qquad \Pi_3 = \frac{\dot{E}}{\rho Q^3/R^4} \; ;$$

$\Pi_4 = \dfrac{\mu}{Q\rho/R}$; siccome $Q = V_1 S_1$, Π_4 e' l' inverso di un numero di Reynolds, con $\dfrac{S_1}{R}$ come scala di lunghezza : $Re = \dfrac{\rho V_1 \, S_1/R}{\mu}$.

3. R, N, Q : grandezze fondamentali

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad !$$

R, N e Q non possono essere usate come grandezze fondamentali!

4. R, N, ρ : grandezze fondamentali

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \qquad \text{o.k.}$$

$$\pi_1' = \frac{Q}{R^3 N} = \phi \; ; \qquad \pi_2' = \frac{P_{cz}}{R^2 N^2} = \Psi \; ; \qquad \pi_3' = \frac{\dot{E}}{\rho R^5 N^3} \; ;$$

NUMERO DI PORTATA

NUMERO DI ENERGIA PER UNITÀ DI MASSA

$$\pi_4' = \frac{\mu}{\rho N R^2}$$

(tale π_4' è l'inverso di un numero di Reynolds, con NR una scala di velocità)

Si osserva che:

$$\pi_1' = \frac{1}{\pi_1} \; ; \quad \pi_2' = \frac{\pi_2}{\pi_1^2} \; ; \quad \pi_3' = \frac{\pi_3}{\pi_1^3}$$

$$\pi_4' = \frac{\pi_4}{\pi_1}$$

5. L'energia per unità di massa è:

$$P_{cz} = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g\left(z_2 - z_1\right)$$

La conservazione della massa ci dice che:

$$\rho_1 V_1 S_1 = \rho_2 V_2 S_2$$

$$\rho_1 = \rho_2 \ , \ S_1 = S_2 \longrightarrow V_1 = V_2$$

La differenza di quota è trascurabile : $z_2 \sim z_1$

$$\Longrightarrow P_{cz} \cong \frac{P_2 - P_1}{\rho}$$

$$\pi_2' = \frac{P_2 - P_1}{\rho N^2 R^2} = \psi \text{ (anche "numero di pressione")}$$

Nel condotto si ha portata volumetrica costante,

$$Q = UA = U \frac{\pi D^2}{4} \Longrightarrow U = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

La perdita di carico nel condotto è dovuta all'attrito con le pareti e vale:

$$P_2 - P_3 = \lambda \frac{L}{D} \rho \frac{U^2}{2} = \lambda \frac{L}{D} \rho \frac{8 Q^2}{\pi^2 D^4}$$

Il numero di pressione nel condotto è:

$$\boxed{\psi_{condotto}} = \frac{P_2 - P_3}{\rho N^2 R^2} = 8\lambda \frac{L}{D^5} \frac{Q^2}{\pi^2 N^2 R^2} = \boxed{\frac{8\lambda L R^4}{\pi^2 D^5} \phi^2}$$

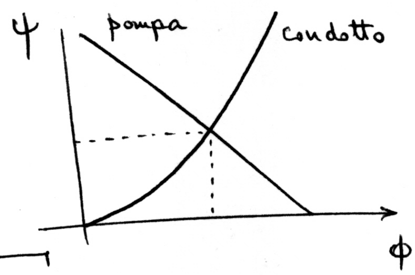
(visto che il numero di portata è: $\phi = \frac{Q}{R^3 N}$)

La pompa ha caratteristica lineare, e quindi

$$\psi_{pompa} = -4\phi + 1 \quad \text{(cf. figura)}$$

Il punto di funzionamento della pompa è caratterizzato da $\psi_{pompa} = \psi_{condotto}$., cioè:

$$\frac{8\lambda L R^4}{\pi^2 D^5}\phi^2 = -4\phi + 1$$



Cioè: $\alpha\phi^2 + 4\phi - 1 = 0$

$$\alpha = \frac{8\lambda L R^4}{\pi^2 D^5} \quad \mapsto \quad \phi = \frac{-2 \mp \sqrt{4+\alpha}}{\alpha}$$

$$\begin{cases} D = 0.1 \ m \\ R = 0.2 \ m \end{cases}$$

(solo il segno + ci interessa)

Applicazione numerica: $\alpha = \frac{8\lambda L R^4}{\pi^2 D^5} = \frac{8 \cdot 0.02 \times 20 \cdot 0.2^2}{\pi^2 \ 0.1^5} = 51.88$

$$\rightarrow \phi \cong 0.1055 \rightarrow \psi \cong 0.578$$

$$N = 1500 \left[\frac{giri}{min}\right] \longrightarrow n = \frac{2\pi \cdot 1500}{60} = 157,08 \ [rad \ s^{-1}]$$

(a) $\Delta p = P_2 - P_3 = P_2 - P_1 = \psi \rho n^2 R^2 = 0,578 \times 1000 \times 157.08^2 \times 0.2^2 \cong 575 \times 10^3 \ [Pa]$

(b) $Q = \phi R^3 n = 0,1055 \times 0.2^3 \cdot 157,08 = 0,1325 \ [m^3 s^{-1}]$

Esercizio 2

$$V_x = a \quad ; \quad V_y = b + kt$$

1. Il moto non è permanente, ed è incomprimibile

$$\left(d_{ii} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \right)$$

2. Linee di corrente:

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} \quad ; \quad \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b+kt} \quad \rightarrow \quad \boxed{y = \frac{b+kt}{a}(x-x_0) + y_0}$$

equazione di una retta

3. Traiettorie:

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = dt \quad ; \quad dx = a\,dt \quad ; \quad x = a(t-t_0) + x_0$$

$$dy = (b+kt)\,dt \; ; \quad y = b(t-t_0) + \frac{k}{2}(t^2-t_0^2) + y_0$$

Si elimina $t - t_0$: $\quad t - t_0 = \dfrac{x-x_0}{a}$

$$\rightarrow \quad y = \frac{b}{a}(x-x_0) + \frac{k}{2}\left[\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{2t_0(x-x_0)}{a}\right] + y_0$$

equazione di una parabola

4. Nessuna contraddizione!

5. Linea di fumo emessa da $(x_0, y_0) = (0, 0)$, a $t = 1$

$$x - x_0 = a(t-t_0) \quad : \quad x = a(1-t_0)$$

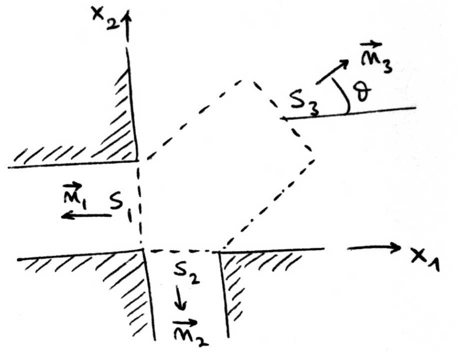
$$y - y_0 = b(t-t_0) + \frac{k}{2}(t^2-t_0^2) : \quad y = b(1-t_0) + \frac{k}{2}(1-t_0^2)$$

$$t_0 = \frac{a-x}{a} \quad \Longrightarrow \quad y = b\left[\frac{x}{a}\right] + \frac{k}{2}\left(\frac{x(2a-x)}{a^2}\right)$$

anche questa linea di fumo è una parabola.

Esercizio 3

Prendiamo un V.C. come in figura.



Conservazione della massa:

$$M_1 + M_2 = M_3$$

$$\rightarrow V_1 S_1 + V_2 S_2 = V_3 S_3$$

Principio della quantità di moto:

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.} \rho \vec{v}\, dV}}_{\text{moto permanente}} + \int_{S.C.} \rho \vec{v}\,(\vec{v}\cdot\vec{n})\, dA = \underbrace{\cancel{\int_{S.F.} \rho \vec{f}\, dV}}_{\text{peso trascurabile}} + \underbrace{\cancel{\int_{S.F.} -p\vec{n}\, dA}}_{\text{pressione costante}}$$

Lungo x_1: $\rho V_1 (-V_1) S_1 + \rho V_3 \cos\theta\, (V_3)\, S_3 = 0$

Lungo x_2: $\rho V_2 (-V_2) S_2 + \rho V_3 \sin\theta\, (V_3)\, S_3 = 0$

$$V_1^2 S_1 = V_3^2 S_3 \cos\theta \quad \rightarrow \quad Q_1 V_1 = Q_3 V_3 \cos\theta$$

$$V_2^2 S_2 = V_3^2 S_3 \sin\theta \quad \rightarrow \quad Q_2 V_2 = Q_3 V_3 \sin\theta$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{Q_2 V_2}{Q_1 V_1} \quad \rightarrow \quad \boxed{\theta = \operatorname{atan} \frac{Q_2 V_2}{Q_1 V_1}}$$

Il modulo della velocità si trova da:

$$(Q_1 V_1)^2 + (Q_2 V_2)^2 = (Q_3 V_3)^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$\boxed{V_3 = \frac{1}{Q_3}\sqrt{Q_1^2 V_1^2 + Q_2^2 V_2^2} = \frac{1}{V_1 S_1 + V_2 S_2}\left[Q_1^2 V_1^2 + Q_2^2 V_2^2\right]^{1/2}}$$