Compitino Genova, 18/11/2004

Es. 1, flusso di Poiseuille

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} -p & -2\mu y\, U_{max}/h^2 \\ -2\mu y \frac{U_{max}}{h^2} & -p \end{pmatrix}$$

1) $y = 0$: $\mathbb{T} = \begin{pmatrix} -p & 0 \\ 0 & -p \end{pmatrix}$

tutte le direzioni sono principali, e i 2 sforzi principali valgono $-p$.

2) In un punto $\forall$ l' eq. caratteristica è :

$$\begin{vmatrix} -p-\lambda & -2\mu y\, U_{max}/h^2 \\ -2\mu y \frac{U_{max}}{h^2} & -p-\lambda \end{vmatrix} = (p+\lambda)^2 - \left(2\mu y \frac{U_{max}}{h^2}\right)^2 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -p - 2\mu y\, U_{max}/h^2 \\ \lambda_2 = -p + 2\mu y\, U_{max}/h^2 \end{cases}$$

$\lambda = \lambda_1$: $\quad 2\mu y \frac{U_{max}}{h^2} n_1 - 2\mu y \frac{U_{max}}{h^2} n_2 = 0$

$n_1 = n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \mapsto \quad \vec{n}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\lambda = \lambda_2$: $\quad n_1 = -n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \mapsto \quad \vec{n}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Si noti che $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

Nel punto A:

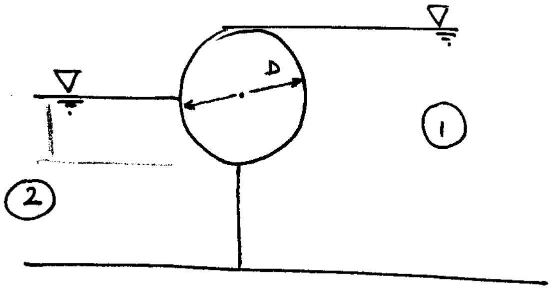
$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} -1 & -1,5 \\ -1,5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j} \qquad n_1 = \frac{3}{5} \qquad n_2 = -\frac{4}{5}$$

$$\begin{bmatrix} T_{n_1} & T_{n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1,5 \\ -1,5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

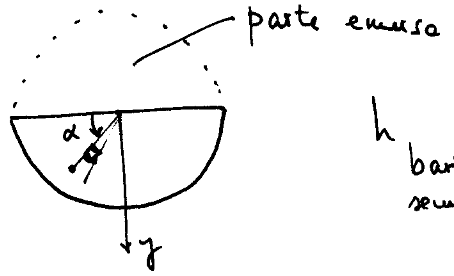
Il vettore sforzo cercato è: $\vec{T} = 0,6\,\vec{i} - 0,1\,\vec{j}$

Es. 2 <u>Spinte su superfici gobbe</u>



$$F_0 \big|_{\text{lato fluido 2}} = \gamma_2 \frac{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2}{2} h_{\substack{\text{baricentro} \\ \text{semicerchio}}}$$

Lato 2:



$$h_{\substack{\text{baricentro} \\ \text{semicerchio}}} = \frac{1}{S}\int_S y\, dS = \frac{1}{\frac{\pi (D/2)^2}{2}} \int_0^{\pi}\int_0^{D/2} y\, r\, d\alpha\, dr$$

$$y = r \sin\alpha$$

$$\to h_{\substack{\text{baricentro} \\ \text{semicerchio}}} = \frac{8}{\pi D^2}\int_0^{\pi}\int_0^{D/2} r^2 \sin\alpha\, d\alpha\, dr =$$

$$= \frac{8}{\pi D^2}\Big[-\cos\alpha\Big]_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{D/2} = \frac{16}{\pi D^2}\frac{(D/2)^3}{3} = \frac{2D}{3\pi}$$

$$F_0 \big|_{\text{lato fluido 2}} = \gamma_2 \frac{\pi (D/2)^2}{2} \frac{2D}{3\pi} = \gamma_2 \frac{D^3}{12}$$

Lato 1: $F_0 \big|_{\text{lato fluido 1}} = \gamma_1 \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 \frac{D}{2} = \gamma_1 D^3 \frac{\pi}{8}$

Equilibrio alla traslazione orizzontale se:

$$\frac{\gamma_2}{12} D^3 = \gamma_1 D^3 \frac{\pi}{8} \quad \mapsto \quad \rho_2 = \frac{3}{2}\pi \rho_1$$

Il peso specifico del fluido 2 e' quindi pari a:

$$\gamma_2 = \rho_2 g = \frac{3}{2}\pi\rho_1 g = 900 \pi g = 27737{,}12 \left[\frac{kg}{m^2 s^2}\right]$$

$$F_v\Big|_{\text{lato fluido } 2} = \frac{1}{4} V_{sfera}\, \gamma_2 = \frac{\pi}{3}\left(\frac{D}{2}\right)^3 \gamma_2 = 1858{,}96 \quad [N]$$

$$F_v\Big|_{\text{lato fluido } 1} = \frac{1}{2} V_{sfera}\, \gamma_1 = \frac{4}{6}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 \rho_1 g = 788.97 \quad [N]$$

Tali forze devono equilibrare il peso della sfera: $P_{sfera} = \gamma_{sfera} V_{sfera}$ (condizione per l'equilibrio alle traslazioni verticali – si noti altresì che le forze idrodinamiche sulla sfera non producono momento rispetto al centro della sfera): $P_{sfera} = 2647.93 \quad [N]$

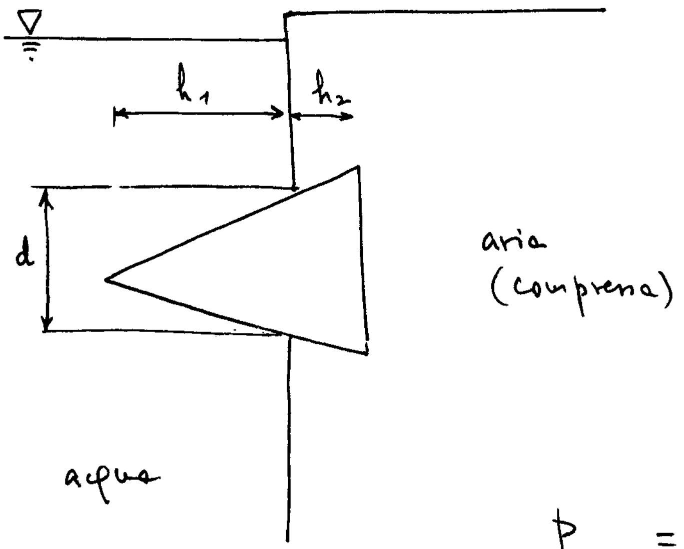
$$\rightarrow \quad \gamma_{sfera} = \frac{P_{sfera}}{V_{sfera}} = 9877{,}28 \quad [kg\ m^{-2}\ s^{-2}]$$

(si noti che la conoscenza del diametro della sfera e' superflua! Infatti: $F_v\big|_2 = \frac{1}{4} V_{sfera}\, \rho_2\, g$; $F_v\big|_1 = \frac{1}{2} V_{sfera}\, \rho_1\, g$;

$$P = \rho_{sfera}\, g\, V_{sfera} \quad \mapsto \quad \frac{1}{4}\gamma_2 + \frac{1}{2}\gamma_1 = \gamma_{sfera}$$

$$\rightarrow \left[\frac{1}{4}\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\right]\gamma_1 = \gamma_{sfera} = 9877{,}28 \quad [kg\ m^{-2}\ s^{-2}]$$)

Es. 3 Spinta su superfici gobbe



$h_1 = \frac{3}{4} h = 30$ cm

$h_2 = \frac{1}{4} h = 10$ cm

$\rho_{mercurio} = 13600 \; [kg \; m^{-3}]$

$$p_{aria} = p_{atm} + \gamma_m \Delta = 10^5 + 13600 \times 0{,}18 \times 9{,}81$$

$$= 124014{,}88 \quad [N \; m^{-2}]$$

$F_0 \big|_{lato\ acqua}$:

$$p = p_{atm} + \gamma_{H_2O}\, a = 10^5 + 10^3 \times 9{,}81 \times 2 = 119620 \quad [N \; m^{-2}]$$

$$F_0 \big|_{lato\ acqua} = p \cdot \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \qquad \text{con} \qquad d = \frac{h_1 D}{h} = \frac{3}{4} D = 0{,}15 \; m$$

$$= 119620 \times \pi \times (0{,}075)^2 = 2113.86 \quad [N]$$

$$F_0 \big|_{lato\ aria} = p_{aria} \cdot \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$= 124014.88 \times \pi \times (0.075)^2 = 2191.52 \quad [N]$$

La pressione dell' aria e' sufficiente a mantenere la spina in posizione.