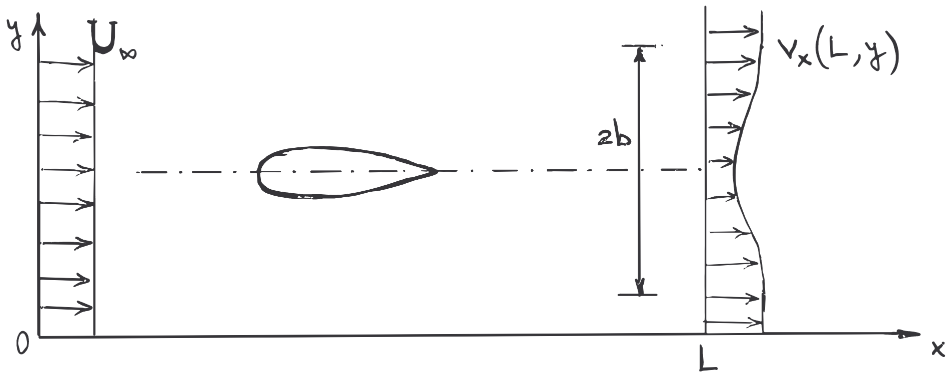
Università degli Studi di Genova
Facoltà di Ingegneria

Esame di Meccanica dei Fluidi
14 Febbraio 2005, ore 14:00, aula A7
Appunti del corso e testi ammessi
Rispondete dettagliatamente e giustificate tutte le vostre risposte

Esercizio 1: **Analisi integrale del moto: flusso attorno ad un profilo alare**

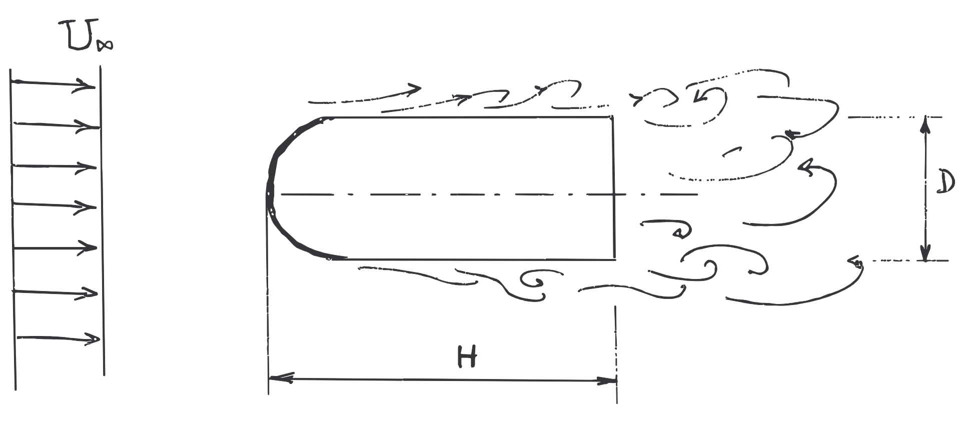
Si consideri il moto incomprimibile, bidimensionale, piano e permanente che si sviluppa attorno al profilo alare simmetrico di figura, mantenuto fisso in una galleria del vento. La velocità del fluido a monte del bordo d'attacco del profilo alare è uniforme ed uguale a $\mathbf{v}(x=0,y)=U_\infty\mathbf{i}$. Sufficientemente a valle del corpo (nella posizione x=L) si osserva la formazione di una scia e si può misurare il profilo di velocità longitudinale $v_x(x=L,y)$. La pressione del fluido è supposta costante ed uguale a p_∞ dappertutto.



Dopo aver scelto un volume di controllo appropriato, si formalizzino le equazioni integrali di conservazione della massa e di quantità di moto necessarie a determinare la forza esercitata dal corpo sul fluido. Si ponga particolare attenzione al bilancio di massa ingresso/uscita, e si consideri che, data la simmetria del profilo, la sola forza generata dal corpo sarà in direzione x. Si osservi inoltre che l'accelerazione di gravità agisce lungo l'asse z.

Esercizio 2: **Similitudine**

La parte emersa di un elemento strutturale di un ponte ha la sezione trasversale disegnata in figura.



Sotto l'azione del vento possono essere emessi vortici regolari che oscillano a frequenze particolari. Le forze generate da questi vortici possono danneggiare la struttura, ed é quindi importante poter prevedere la frequenza di emissione. Per la struttura che ci interessa si ha: D=0.1[m], H=0.3[m], velocità del vento $U_\infty \cong 50$[km h^{-1}]. Il fluido è aria a condizioni ambiente. Per determinare la frequenza di emissione si costruisce un modello ridotto che viene piazzato in una galleria ad acqua, alla temperatura di circa 20 [C]. Si sceglie un modello con D' = 20 [mm].

1. Determinare H' per il modello.
2. Decidere il tipo di similitudine da impiegare, e trovare la velocità dell'acqua a cui l'esperienza va condotta.
3. Dopo aver formalizzato la dipendenza funzionale della frequenza rispetto ai vari parametri del problema, si utilizzi il teorema π per esprimere una relazione formale tra numeri senza dimensioni. Se la frequenza di emissione dei vortici é di 49.9 [Hz] nel modello, quale sarà la frequenza corrispondente nel prototipo?

Esercizio 3: **Analisi della deformazione**

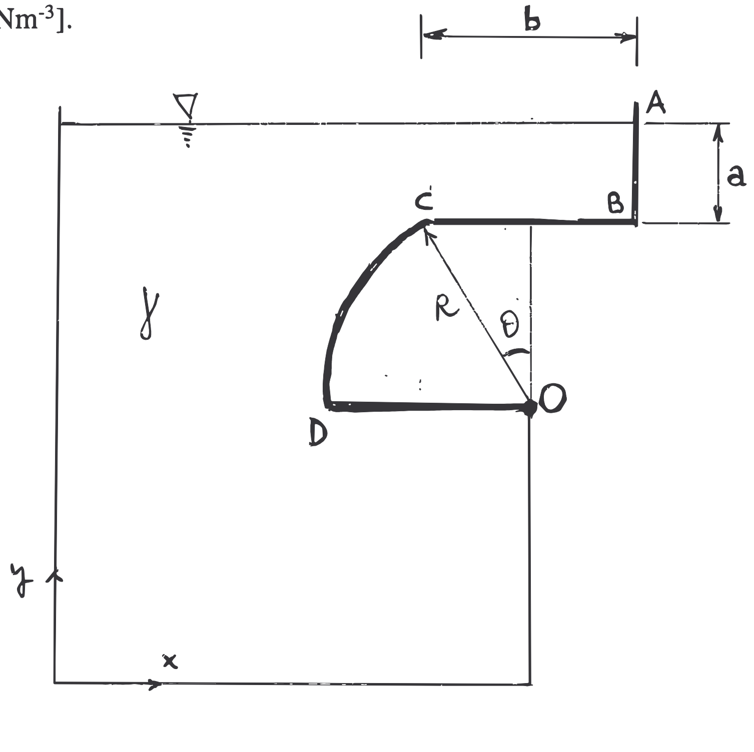
Il moto bidimensionale piano di un fluido incomprimibile è dato in un intorno del punto P_0 da:

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (y^2 - 2y, 0).$$

La velocità in un punto P del campo di moto sufficientemente vicino a P_0 può essere espressa tramite un semplice sviluppo di Taylor al prim'ordine che fa intervenire il tensore gradiente di velocità del flusso. Dopo aver mostrato che il tensore (la matrice) gradiente di velocità del fluido può essere scomposto nella somma di una matrice simmetrica ed una antisimmetrica, si calcolino tutte le componenti dei tensori della velocità di deformazione e della velocità di rotazione e si descriva il loro significato fisico.

Esercizio 4: **Spinte e momenti su superfici gobbe**

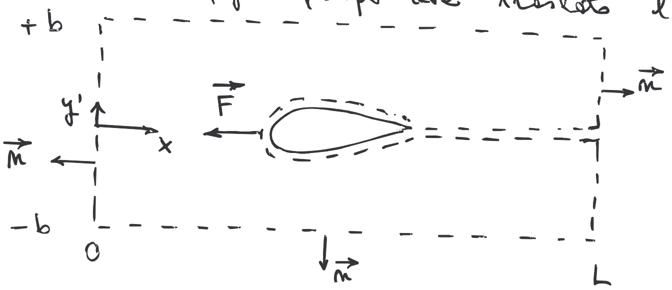
Valutare il momento (ed il verso, orario o antiorario) necessario a mantenere in equilibrio la paratoia ABCDO, incernierata in O, supposta di profondità unitaria. Dati: a = 0.2 [m], b = 0.6 [m], R = 0.6 [m], θ=30°, $\gamma = 10^4$ [Nm^{-3}].



Meccanica dei fluidi, GENOVA

Correzione scritto 14/2/2005

1. Si può scegliere un volume di controllo semplicemente connesso come in figura (dopo aver traslato l'asse x verticalmente ed averlo sovrapposto all'asse di simmetria del profilo).



$\vec{F}$ è la forza esercitata dal corpo sul fluido: $\vec{F} = (-F_x, 0, 0)$

L'eq. di continuità si scrive, per moto incomprimibile:

$$\int_{\text{superficie di controllo}} \rho\, \vec{v}\cdot\vec{n}\, dA = 0$$

cioè:

$$\underbrace{\rho\int_{-b}^{b} -U_\infty\, dy'}_{\text{entrata}} + \underbrace{\rho\int_{-b}^{b} v_x(L,y')\, dy' + \overset{\text{per la simmetria}}{2}\rho\int_0^L v_y(x,b)\, dx}_{\text{uscita}} = 0$$

Equazione della quantità di moto:

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.} \rho\vec{v}\, dV}}_{\text{moto permanente}} + \int_{S.C.} \rho\vec{v}\,(\vec{v}\cdot\vec{n})\, dA = \sum \vec{F}_{\substack{\text{campo } + \\ \text{superficie}}}$$

Proiettando sull'asse x:

$$-\rho\int_{-b}^{b} U_\infty^2\, dy' + \rho\int_{-b}^{b} v_x^2(L,y')\, dy' + 2\rho\int_0^L U_\infty\, v_y(x,b)\, dx = -F_x$$

Moltiplicando l'eq. di continuità per U_∞:

$$\rho \int_{-b}^{b} -U_\infty^2 \, dy' + \rho \int_{-b}^{b} U_\infty v_x(L,y') \, dy' + 2\rho \int_{0}^{L} U_\infty v_y(x,b) \, dx = 0$$

si trova facilmente:

$$\boxed{F_x = -\rho U_\infty^2 \int_{-b}^{b} \frac{v_x(L,y)}{U_\infty} \left[\frac{v_x(L,y)}{U_\infty} - 1 \right] dy}$$

Esercizio 2.

Con i dati si ha che:

$\mu = \mu_{aria} = 1{,}79 \times 10^{-5}$ [Pa·s] $\qquad \mu' = \mu_{H_2O} = 10^{-3}$ [Pa·s]

$\rho = \rho_{aria} = 1{,}23$ [kg m^{-3}] $\qquad \rho' = \rho_{H_2O} = 998$ [kg m^{-3}]

La similitudine geometrica impone che:

$$\frac{D'}{H'} = \frac{D}{H} \quad \rightarrow \quad H' = \frac{H}{D} D' = \frac{0.3}{0.1} \cdot 20 \text{ [mm]} = 60 \text{ [mm]}$$

Siamo a bassa velocità (Ma non interviene), lontani dall'interfaccia aria-acqua (Fr non interviene), senza fenomeni di tensione di superficie (We non interviene), etc. - Bisogna imporre la similitudine di Reynolds:

$$Re' = \frac{\rho' U'_\infty D'}{\mu'} = Re = \frac{\rho U_\infty D}{\mu}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{U'_\infty = \frac{\mu'}{\mu} \frac{\rho}{\rho'} \frac{D}{D'} U_\infty = 4.79 \text{ [m s}^{-1}]}$$

La frequenza di emissione dei vortici dipende da:

$$\omega = f(D, U_\infty, \rho, H, \mu) \quad . \; .$$

$$\omega \to [T^{-1}] \qquad U_\infty \to [L T^{-1}]$$

$$D, H \to [L^{-1}] \qquad \rho \to [M L^{-3}] \qquad \mu \to [M L^{-1} T^{-1}]$$

Prendo U_∞, μ e D come variabili dimensionalmente indipendenti:

$$\begin{array}{c} \\ U_\infty \\ \mu \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M & L & T \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right| \end{array} = -1 \neq 0$$

$$\frac{\omega D}{U_\infty} = \phi\left(\underbrace{\frac{\rho U_\infty D}{\mu}}_{\text{numero di Reynolds}} , \underbrace{\frac{H}{D}}_{\text{parametro di forma}} \right)$$

Il numero senza dimensioni $\dfrac{\omega D}{U_\infty}$ si chiama:

numero di Strouhal $St = \dfrac{\omega D}{U_\infty}$

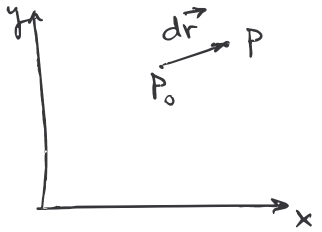
Una volta che $\dfrac{H'}{D'} = \dfrac{H}{D}$ e $Re' = Re$

$\rightarrow$ $St' = St$, cioè di una frequenza

del prototipo $\boxed{\omega = \dfrac{\omega' D'}{U'_\infty} \dfrac{U_\infty}{D} = 29 \text{ Hz}}$

Esercizio 3: Analisi della deformazione

$$v_x\big|_0 = y^2 - 2y \qquad v_y\big|_0 = 0 \quad , \quad \vec{v} = (v_x, v_y)$$



$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \left(d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\vec{v}\right)_0 + \dots$$

$$\vec{\nabla}\vec{v}\,\Big|_0 = \text{gradiente di } \vec{v}$$

Si tratta di un tensore, le cui componenti si scrivono (in notazione con gli indici):

$$G_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Si osserva che:

$$G_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)} =$$

$$= d_{ij} + \omega_{ij}$$

d_{ij}: tensore di velocità di deformazione (simmetrico)

ω_{ij}: tensore velocità di rotazione (antisimmetrico)

$$d_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \qquad d_{12} = d_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) = y - 1$$

$$d_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$\omega_{11} = 0 \quad , \quad \omega_{22} = 0 \quad , \quad \omega_{12} = -\omega_{21} = y - 1$$

$$V_x = V_x\big|_0 + \cancel{d_{xx}\big|_0 dx} + d_{xy}\big|_0 dy + \omega_{12}\big|_0 dy + \dots$$

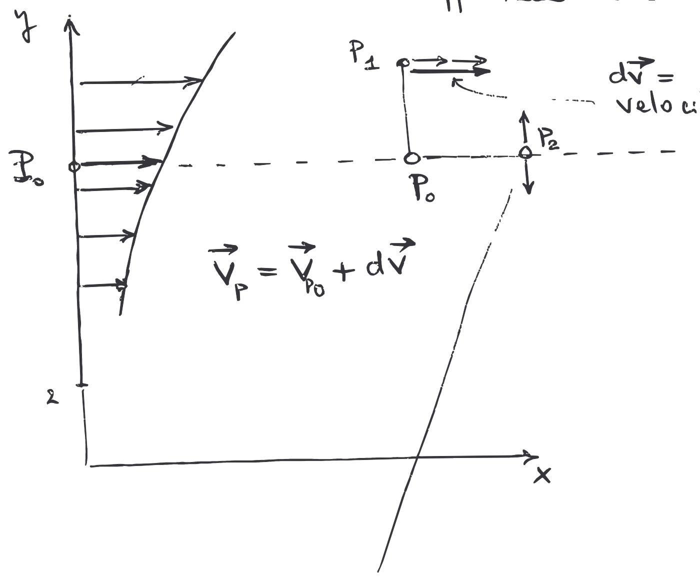
$$= V_x\big|_0 + (y-1)\,dy + (y-1)\,dy + \dots$$

$$= V_x\big|_0 + 2(y-1)\,dy + \dots$$

$$V_y = V_y\big|_0 + d_{xy}\big|_0 dx + \cancel{d_{yy}\big|_0 dy} - \omega_{12}\big|_0 dx + \dots$$

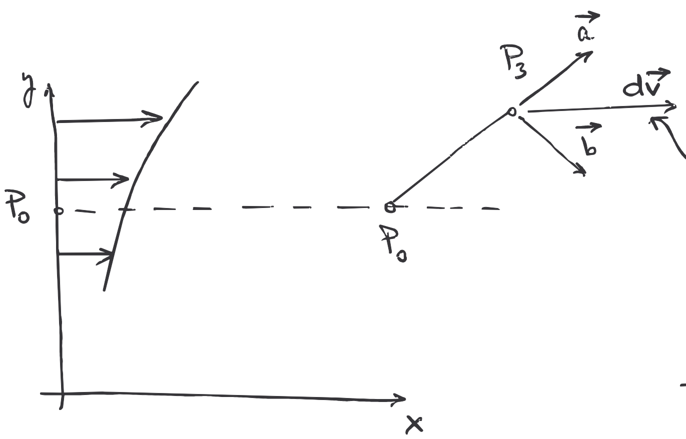
$$= V_y\big|_0 + (y-1)\,dx - (y-1)\,dx = V_y\big|_0 = 0$$

Supponiamo che P_0 sia come in figura:



$d\vec{V}$ = velocità totale di P_1 rispetto alla velocità in P_0 (composta da due vettori, uguali, che rappresentano l'uno la rotazione, l'altro la deformazione)

in P_2 la velocità orizzontale è la stessa che in P_0.
La velocità verticale rimane nulla (come in P_0) e può essere interpretata come la somma di due vettori in verso opposto, quello verso il basso che denota la rotazione, e quello verso l'alto deformazione)



velocità relativa di P_3 rispetto a P_0 - Composta da due vettori:

$$\vec{a} = (y-1)\,(dy,\, dx)$$

rappresenta una deformazione

$$\vec{b} = (y-1)\,(dy,\, -dx)$$

rappresenta una rotazione

La somma di tali due vettori produce:

$$d\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} = (y-1)\,(2\,dy\,,\,0)$$

cioè una variazione di velocità rispetto a quella in P_0 pari a $\boxed{2(y-1)\,dy}$, lungo x.

Esercizio 4 : Momento su una paratoia

$\vec{F}_{AB} = \vec{i}\ \gamma\,\frac{a}{2}\,a \cdot 1$ (risultante applicata ad una distanza $\frac{a}{3}$ dal punto B)

$\vec{F}_{CB}$ e $\vec{F}_{CD}$: non creano momenti rispetto ad O !

$\vec{F}_{DO} = \vec{j}\ \gamma(a+R\cos\theta)R \cdot 1$ (risultante applicata a distanza $\frac{R}{2}$ da O)

Il momento totale generato dalla spinta del fluido è in verso orario (e quindi quello necessario a mantenere in equilibrio la paratoia deve essere applicato nel senso antiorario):

$$M = F_{AB}\left(R\cos\theta + \frac{a}{3}\right) + F_{DO}\,\frac{R}{2} = 1724\ [N \cdot m]$$