# Meccanica dei Fluidi 1

1° Compitino – 22/04/2009

Foglio aiuti (formato A4) ammesso

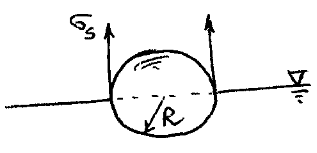
**Esercizio 1 (4 punti)**

Si consideri un materiale con $\rho = \rho(p, T)$, inizialmente a densità $\rho_0$ = 6000 kg/m$^3$, temperatura $T_0$ = 200 K e pressione $p_0$ = 1 atm, e lo si sottoponga ad un riscaldamento fino a $T_{finale}$ = 350 K, mantenendo costante la pressione $p_0$. Il modulo di dilatazione volumetrica $\beta$ del materiale vale:

$$\beta = -\rho^{-1}[\partial\rho/\partial T]_p = a\,T^{1/2} - b$$

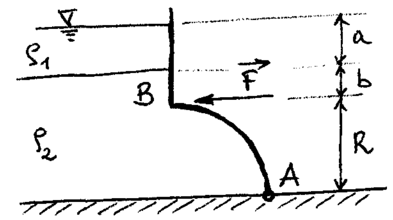
con $a$ = $10^{-4}$ K$^{-3/2}$ e $b$ = $10^{-3}$ K$^{-1}$ (valori validi nell'intervallo 200 K ≤ T ≤ 350 K). Si calcoli la densità del materiale alla fine della processo.

**Esercizio 2 (5 punti)**




Si deponga molto delicatamente una sfera di acciaio ($\rho$ = 8000 kg/m$^3$) sulla superficie dell'acqua. La sfera galleggia come in figura. Considerando anche la forza di Archimede, si calcoli il raggio massimo della pallina affinché non affondi ($\sigma_s$ = 0.073 N/m, angolo di contatto nullo).

**Esercizio 3 (7 punti)**

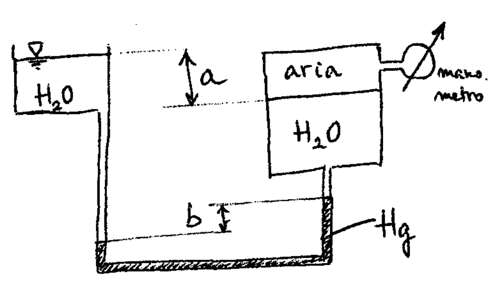



Valutare il modulo della forza $\boldsymbol{F}$ necessaria per tenere in equilibrio la paratia AB incernierata in A. Dati: $a$ = 2 m, $b$ = 0.5 m, $R$ = 2 m, profondità unitaria, $\rho_1$= 800 kg/m$^3$, $\rho_2$ = 1000 kg/m$^3$.

**Esercizio 4 (5 punti)**

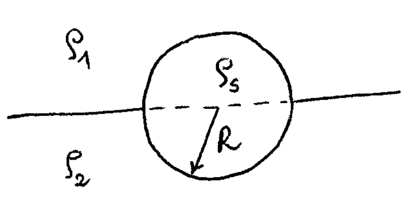
Spiegare la differenza tra l'approccio lagrangiano e quello euleriano per la valutazione delle caratteristiche del moto (introducendo il concetto di *campo*), e si definisca il concetto di *derivata materiale*, spiegando il significato dei termini che appaiono.

**Esercizio 5 (4 punti)**




Calcolare la pressione *relativa* misurata dal manometro di figura, sapendo che $a$ = 0.5 m, $b$ = 0.1 m, $\rho_{aria}$ ≈ 0 kg/m$^3$, $\rho_{H2O}$ = 1000 kg/m$^3$, $\rho_{Hg}$ = 13600 kg/m$^3$.

**Esercizio 6 (4 punti)**




Una sfera solida di raggio R e densità $\rho_s$ viene posta dentro un recipiente in modo tale che l'interfaccia tra due liquidi immiscibili di densità $\rho_1$ e $\rho_2$ la tagli esattamente a metà. La sfera viene poi lasciata libera di muoversi. Si descriva cosa succede negli instanti iniziali quando 2 $\rho_s$ > ($\rho_1$ + $\rho_2$) oppure quando 2 $\rho_s$ < ($\rho_1$ + $\rho_2$).

**Esercizio 7 (4 punti)**

Dato il campo di moto bidimensionale, cartesiano ($u$, $v$) = (2 $t$ + 5 $y$ – 5, 7 $x$) determinare se tale campo è stazionario, se è incomprimibile, e se la vorticità è nulla. Calcolare l'accelerazione nel punto di coordinate (7, 2). Determinare inoltre gli elementi della matrice delle velocità di deformazione e l'equazione delle linee di corrente.

# Correzione compitino 22/4/09

FILA C

**Es. 1**

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial \rho}{\partial T}\right]_p = a\,T^{1/2} - b$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\beta\, dT \rightarrow \ln\frac{\rho_f}{\rho_0} = \int_{T_0}^{T_f}\left(-a\,T^{1/2} + b\right) dT =$$

$$= \left[-\frac{2}{3}\,a\,T^{3/2} + b\,T\right]_{T_0}^{T_f} = -\frac{2}{3}\,a\left(T_f^{3/2} - T_0^{3/2}\right) + b\left(T_f - T_0\right)$$

$$= -0.0980$$

$$\rho_f = \rho_0\, e^{-0.0980} = 5400 \quad kg/m^3$$

**Es. 2**

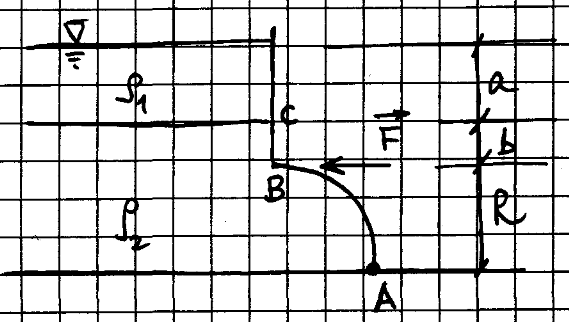
$$W = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{acciaio}\, g \qquad F_{Archimede} = \frac{4}{6}\pi R^3 \rho_{H_2O}\, g$$

$$F_{\sigma_s} = 2\pi R\, \sigma_s$$

$$2\cancel{\pi} R\, \sigma_s = \frac{4}{3}\cancel{\pi} R^3 g\left(\rho_{acciaio} - \frac{1}{2}\rho_{H_2O}\right)$$

$$R = \left[\frac{3}{2}\,\frac{\sigma_s}{g\left(\rho_{acciaio} - \frac{1}{2}\rho_{H_2O}\right)}\right]^{1/2} = 0.00122\ m = 1.22\ mm$$

**Es. 3**



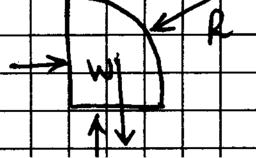

Lavoriamo con pressioni relative

$$p_C = \rho_1 g\, a \qquad p_B = p_C + \rho_2 g\, b = 20601\ \frac{N}{m^2}$$

$$R_x = p_B R\, 1 + \rho_2 g \frac{R}{2} R\, 1$$

$$R_y = \left(p_B + \rho_2 g R\right) R\, 1 - \rho_2 g \frac{\pi R^2}{4} 1$$

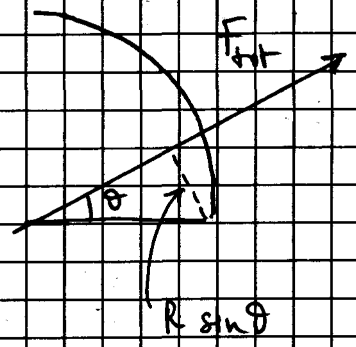
$$= p_B R + \rho_2 g R^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$



La spinta sulla sup. gobba è $F_{tot}$ di componenti

$F_x = 60822$ N (verso destra)

$F_y = 49623$ N (verso l'alto)




$$F_{tot} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 78497 \text{ N}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{F_y}{F_x} = 39.21°$$

$$F_{tot} R \sin\theta = F R$$

$\rightarrow$ il modulo della forza F che tiene in equilibrio la paratia è $F = F_{tot} \sin\theta =$
$= 49623$ N

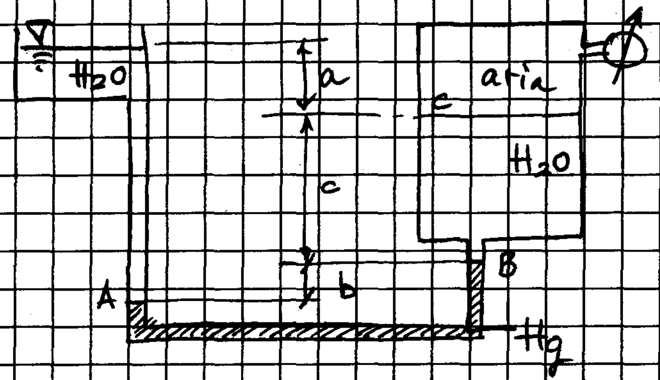
Es. 4 Approccio Lagrangiano: si segue il sistema fluido nel suo moto, cioè si seguono le traiettorie delle particelle

Approccio Euleriano: ci si mette in un punto del dominio fluido e si misurano i campi (di velocità, pressione, etc.) senza interessarsi a quali particelle hanno quali velocità.

$$\frac{D\phi}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\text{termine locale}} + \underbrace{(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\phi}_{\text{termine convettivo}}$$

$\phi$ una grandezza qualunque

Es. 5




Pressioni relative

$$p_A = \rho_{H_2O}\, g\,(a+b+c)$$

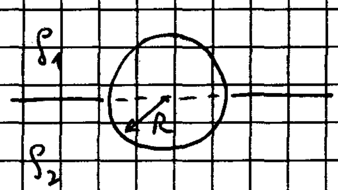
$$p_B = \rho_{H_2O}\, g\,(a+b+c) - \rho_{Hg}\, g\, b$$

$$p_c = \rho_{H_2O}\, g\,(a+b+\cancel{c}) - \rho_{Hg}\, g\, b - \rho_{H_2O}\, g\, \cancel{c} = p_{manometro} =$$

$$= -7455.6\ \frac{N}{m^2}$$

il segno $-$ indica che la pressione è più bassa della pressione atmosferica

Es. 6




All'equilibrio la forza di Archimede deve bilanciare il peso della sfera:

$$\frac{1}{2}\,\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1 g + \frac{1}{2}\,\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_2 g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s g$$

$$\rightarrow \quad \rho_s = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$$

Quindi, se $\rho_s > \frac{1}{2}(\rho_1+\rho_2)$ la sfera inizialmente sprofonda,

se $\rho_s < \frac{1}{2}(\rho_1+\rho_2)$ la sfera inizialmente sale

Es. 7 $\quad u = 2t + 5y - 5 \quad , \quad v = 7x \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = 2 \neq 0 \rightarrow$

il moto non è stazionario; il moto è incomprimibile, perché $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v = 0$. La vorticità $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 7 - 5 \neq 0$, cioè il moto è rotazionale, ogni particella fluida ruota

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\, u = 2 + (2t + 5y - 5)\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + 7x \cdot 5$$

$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\, v = 0 + (2t + 5y - 5)\, 7 + 7x \cdot \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}$$

On $(7,2) \rightarrow \quad a_x = 2 + 49 \cdot 5 = 247$

$$a_y = 14t + 35$$

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \epsilon_{yx} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

il che significa che c'è solo deformazione di taglio.

L'eq. delle linee di corrente (per le quali il tempo t è un parametro) è:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

$$\int 7x \, dx = \int (2t + 5y - 5)\, dy \quad \rightarrow \quad 7\frac{x^2}{2} = 2yt + 5\frac{y^2}{2} - 5y + k$$