# Meccanica dei Fluidi 1

1° Compitino – 22/04/2009

Foglio aiuti (formato A4) ammesso

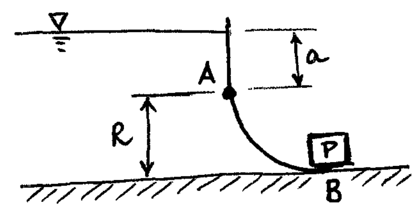
**Esercizio 1 (4 punti)** Si consideri un materiale con $\rho = \rho(p, T)$, inizialmente a densità $\rho_0 = 6000$ kg/m$^3$, temperatura $T_0 = 200$ K e pressione $p_0 = 1$ atm, e lo si sottoponga ad una compressione a $T = T_0 =$ costante, da $p_0$ fino a $p_{finale} = 4$ atm. Il modulo di comprimibilità isoterma $\alpha$ del materiale vale:

$$\alpha = \rho^{-1}[\partial\rho/\partial p]_T = a\, p^2$$

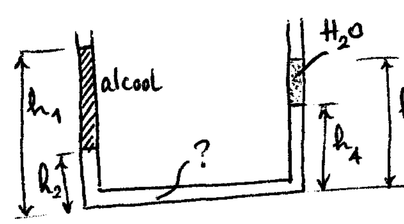
con $a = 10^{-4}$ atm$^{-3}$, valida nell'intervallo 1 atm $\leq p \leq$ 4 atm. Si calcoli la densità del materiale alla fine della compressione.

**Esercizio 2 (5 punti)** Si deponga molto delicatamente un ago di acciaio ($\rho$ = 7850 kg/m$^3$) di lunghezza $l$ = 2 cm e sezione circolare sulla superficie dell'acqua. Se la tensione superficiale tra acqua e aria vale 0.073 N/m (con angolo di contatto nullo), e trascurando la forza di Archimede, si calcoli il raggio massimo dell'ago, affinché non affondi.

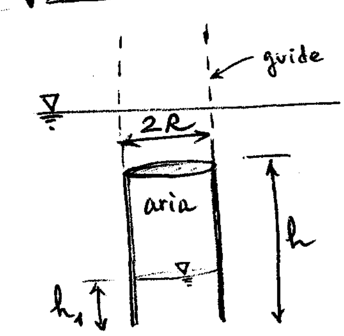
**Esercizio 3 (6 punti)** Determinare la massa del peso P posto sopra il punto B della paratoia AB, affinché la stessa, incernierata in A, sia in equilibrio. Dati: profondità della paratoia $L$ = 10 m, $a$ = 3 m, $R$ = 1 m, $\rho$ = 1000 kg/m$^3$.




**Esercizio 4 (4 punti)** Dato il dispositivo di figura, si calcoli la densità del fluido incognito, sapendo che $h_1$ = 0.5 m, $h_2$ = 0.13 m, $h_3$ = 0.32 m, $h_4$ = 0.20 m, $\rho_{H2O}$= 1000 kg/m$^3$, $\rho_{alcool}$ = 780 kg/m$^3$.




**Esercizio 5 (6 punti)** Una campana di vetro di forma cilindrica (spessore del vetro trascurabile), aperta sul lato inferiore e di massa pari a 100 kg viene immersa in olio con la parte aperta verso il basso, facendola scorrere su delle guide di modo da non farla rovesciare. L'aria intrappolata dentro la campana è inizialmente alla pressione atmosferica; si comprime per effetto della riduzione del volume disponibile, restando però sempre a temperatura costante (si consideri l'aria un gas perfetto). Calcolare l'altezza dell'olio $h_1$ rispetto al fondo della campana, una volta che il sistema è stato portato nella posizione di equilibrio. Dati: $R$ = 0.5 m, $h$ = 0.5 m, $\rho_{olio}$= 850 kg/m$^3$. Si discuta infine della posizione di equilibrio, cioè si dica se la posizione raggiunta è una posizione di equilibrio stabile (che viene mantenuta quando la campana è leggermente spostata – verso l'alto o verso il basso) oppure instabile. Giustificare la propria risposta.




**Esercizio 6 (4 punti)** Si scriva l'equazione della statica per un sistema fluido accelerato, e si facciano esempi di problemi di statica in sistemi non inerziali.

**Esercizio 7 (4 punti)** Dato il campo di moto bidimensionale cartesiano $(u, v) = (3\,t - y + 2,\, x)$ determinare se tale campo è stazionario e se è incomprimibile. Calcolare l'accelerazione nel punto di coordinate (3, 1). Determinare infine gli elementi delle matrici velocità di deformazione e di rotazione, e specificare quale tipo di deformazione e/o rotazione subisce un elemento fluido. Calcolare infine l'equazione delle linee di corrente.

# Correzione compitino 22/04/09

FILA A

Es. 1

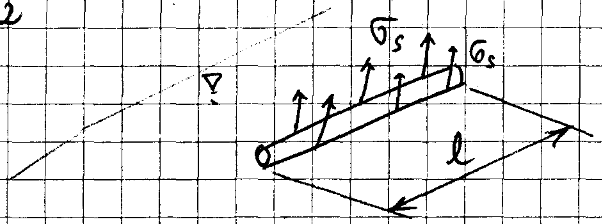
$$\alpha = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial \rho}{\partial p}\right]_T = a\,p^2$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \cancel{-\beta\, dT} + \alpha\, dp$$

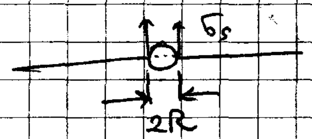
$$\ln\frac{\rho_f}{\rho_0} = \frac{1}{3}a\left[p^3\right]_{p_0}^{p_f} = 0.0021$$

$$\rho_f = \rho_0\, e^{0.0021} = 6012.6 \ \text{kg}/\text{m}^3$$

Es. 2



Suppongo l'ago immerso per metà:



$$2\sigma_s l + 2\sigma_s(2R) = \pi R^2 l \rho g$$

se $l \gg R$ $\qquad R = \sqrt{\frac{2\sigma_s l}{\pi l \rho g}} = 7.76\times 10^{-4}\ \text{m} = 0.776\ \text{mm}$

se $l$ non è molto più grande di $R$:

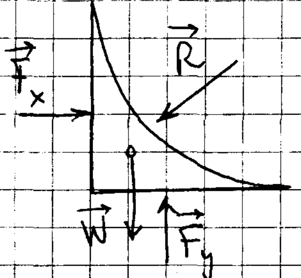
$$R^2(\pi l \rho g) - R(4\sigma_s) - 2\sigma_s l = 0$$

$$R = \frac{4\sigma_s \mp \sqrt{16\sigma_s^2 + 8\pi l^2 \sigma_s \rho g}}{2\pi l \rho g} = \dots = 8.07\times 10^{-4}\ \text{m} = 0.807\ \text{mm}$$

(è accettabile solo la soluzione con il segno +)

I due valori trovati sono vicini e l'approx $l \gg R$ è accettabile.

Es. 3




$$F_x = \rho g \left(a + \frac{R}{2}\right) L R$$

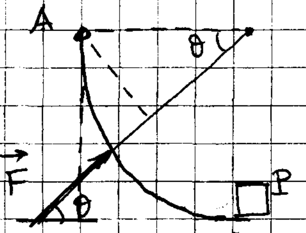
$$F_y = \rho g (a + R) L R$$

$$W = L\left(R^2 - \frac{\pi R^2}{4}\right)\rho g$$

Le componenti della reazione della paratia sull'acqua sono:

$$\begin{cases} R_x = \rho g \left(a + \frac{R}{2}\right) L R & \text{(verso sinistra)} \\ R_y = \rho g \left(a + \frac{\pi R}{4}\right) L R & \text{(verso il basso)} \end{cases}$$

La spinta dell'acqua sulla paratia è in verso opposto ad $\vec{R}$. Dall'equilibrio dei momenti trovo il peso $P$.




$$\vec{F} = (343350 \text{ N},\ 371347.6 \text{ N})$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{F_y}{F_x} = 47.24°$$

Il braccio della forza $\vec{F}$ rispetto ad A è:

$$R \sin\theta$$

$$F \cancel{R} \sin\theta = P \cancel{R}$$

$$P = F \sin\theta = F_y = 371347.6 \text{ N}$$

La massa dell'oggetto è quindi $m = \frac{P}{g} = 37854$ Kg

Es. 4

$$\rho_{alcool}(h_1 - h_2) g + \rho_? h_2 g = \rho_{H_2O}(h_3 - h_4) g + \rho_? h_4 g$$

$$\rho_? (h_4 - h_2) = \rho_{alcool}(h_1 - h_2) + \rho_{H_2O}(h_4 - h_3)$$

$$\rho_? = \frac{\rho_{alcool}(h_1 - h_2) - \rho_{H_2O}(h_3 - h_4)}{h_4 - h_2} = 2408.6 \ \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

Es. 5

All' equilibrio $\sum \vec{F} = 0$.

Le sole forze verticali sono la forza di Archimede ed il peso della campana, quindi

$$P = \rho g (h - h_1)\pi R^2$$

Sostituendo i dati si trova $h_1 = 0.35$ m.

Se avessimo voluto sapere la pressione dell'aria dentro la campana (immersa):

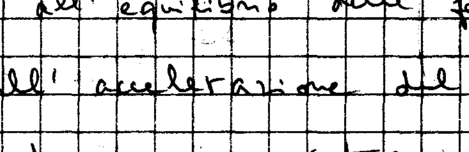
$$p_0 V_0 = p_{eq} V_{eq} = \text{cost.} \quad \text{per gas perfetto a } T \text{ cost.}$$

$$1\,\text{atm} \times \cancel{\pi R^2}\, h = p_{eq}\, \cancel{\pi R^2}\,(h - h_1) \rightarrow P_{eq} = \frac{0.5}{0.15} = 3.33\,\text{atm}$$

Se la campana venisse spostata verso il basso, l'aria intrappolata verrebbe compressa ulteriormente, il volume d'aria diminuirebbe e così anche la forza di Archimede ⟶ la campana affonderebbe sempre di più sotto l'effetto del suo peso. Se la campana venisse spostata verso l'alto, la pressione dell'aria diminuirebbe, aumenterebbe il volume d'aria e la forza di Archimede → in questo caso la campana tenderebbe a salire sempre più. La situazione è quindi una di equilibrio instabile.

Es. 6 In un sistema non-galileiano devo aggiungere la forza d'inerzia all'equilibrio delle forze. Tale forza ha verso opposto all'accelerazione del sistema, quando lo stesso è osservato da un osservatore esterno, in un sistema galileiano.

Ad es.



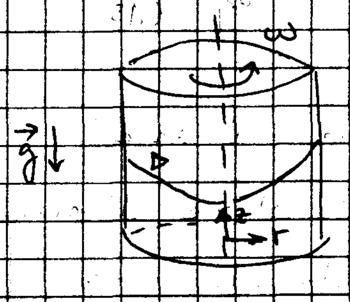

in un sistema accelerato, l'eq. della statica è:

$$\vec{\nabla} p = \rho(\vec{g} - \vec{a}) = \vec{f}_{eff}$$

e, con riferimento alla figura, si ha:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g$$

Un altro esempio classico di sistema di riferimento non galileiano è quello del liquido contenuto in una vasca che ruota attorno al proprio asse verticale, con velocità angolare $\omega$. In tal caso, un osservatore esterno nota che le particelle fluide hanno un'accelerazione centripeta, e un osservatore sulla vasca sperimenta un'accelerazione centrifuga. Si ha quindi:




$$\vec{\nabla} p = \vec{f}_{eff} = \underbrace{\rho r \omega^2 \vec{e}_r}_{\text{forza di inerzia (per unità di volume) centrifuga}} - \rho g \vec{e}_z$$

Es. 7

$$u = 3t - y + 2 \qquad v = x$$

Non è stazionario perché $\frac{\partial u}{\partial t} = 3 \neq 0$; è incomprimibile perché $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$.

L'accelerazione è:

$$a_x = \overbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}^{\text{acc. locale}} + \overbrace{u \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + v \frac{\partial u}{\partial y}}^{\text{accel. convettiva}} = 3 - x$$

$$a_y = \cancel{\frac{\partial v}{\partial t}} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} = 3t - y + 2$$

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \epsilon_{yx} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \omega_{yx} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'elemento fluido non è deformato; ruota attorno al proprio asse.

Linee di corrente $\rightarrow$ $t$ è un parametro; $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Longrightarrow$

$$x\,dx = (3t - y + 2)\,dy$$

$$\longrightarrow \frac{x^2}{2} = 3t\,y - \frac{y^2}{2} + 2y + k$$