Lezione 19

ALCUNI PROBLEMI RELATIVI A CONDOTTE A SEZIONE CIRCOLARE

Come accennato nella LEZIONE 18, se consideriamo il moto stazionario di un fluido incomprimibile all'interno di una condotta a sezione circolare e costante, l'equazione di continuità, (per fluido a densità costante) porge

$$Q = \text{ costante } \Rightarrow \quad U = \text{ costante}$$

Questa situazione, anche se particolare, è estremamente frequente nella pratica.

L'equazione del moto inoltre si semplifica e diviene

$$\frac{dH}{ds} = -\frac{\lambda}{D}\frac{U^2}{2g}$$

Siccome la sezione Ω è costante così come il suo diametro D e la sua scabrezza y_r (se la condotta è costruita tutta di uno stesso materiale) segue che anche il coefficiente di resistenza λ è costante. Infatti

$$Re = \frac{UD}{\nu} = \text{ costante ; } \varepsilon = \frac{y_r}{D} = \text{costante}$$

L'equazione del moto può dunque essere facilmente integrata porgendo

$$H_2 - H_1 = -\frac{\lambda}{D}\frac{U^2}{2g}(s_2 - s_1) = -\frac{\lambda}{D}\frac{U^2}{2g}L$$

essendo L la distanza fra due sezioni diverse con ascissa curvilinea s_2 e s_1 rispettivamente (s_2 a valle di s_1) e carico totale H_2 e H_1.

La relazione

$$\boxed{H_2 - H_1 = -\frac{\lambda}{D}\frac{U^2}{2g}L}$$

o l'equivalente

$$\boxed{H_2 - H_1 = -\frac{\lambda}{D}\frac{Q^2}{2g\Omega^2}L}$$

consentono di determinare una delle caratteristiche della condotta o della corrente note le altre. (NOTA 1)

1) Problema 1: calcolo delle perdite di carico

   Di una condotta in ghisa asfaltata sia assegnato il diametro D e la lunghezza L. Conoscendo il valore della portata di acqua defluente, valutare le perdite di carico totali subite dalla corrente fra la sezione iniziale e quella finale. Dati: $D = 15cm, \quad L = 500m, \quad Q = 25\ \ell/s$

   Soluzione:

   Dai dati disponibili è immediato calcolare la sezione Ω e quindi la velocità media

$$\Omega = \pi\frac{D^2}{4} = 1.767\ \ 10^{-2}m^2 \quad U = \frac{Q}{\Omega} = 1.415\ m/s$$

   Conoscendo il materiale con cui è stata realizzata la condotta è possibile valutare la scabrezza assoluta (vedi LEZIONE 18)

$$y_r = 1.0\,10^{-4}\,m$$

   Segue

$$Re = \frac{UD}{\nu} = 2.12\ \ 10^5 \quad \varepsilon = \frac{y_r}{D} = 6.67\ \ 10^{-4}$$

   Dal diagramma di Moody è possibile stimare

$$\lambda = 0.0195$$

   e quindi le perdite di carico

$$\mathrm{H}_2 - \mathrm{H}_1 = -\frac{\lambda}{\mathrm{D}}\frac{\mathrm{U}^2}{2\mathrm{g}}\mathrm{L} = -6.63\mathrm{m}$$

NOTA 1

Notiamo che in questo caso, essendo la velocità costante, le equazioni precedenti possono essere anche scritte nella forma

$$H_2 - H_1 = h_2 - h_1 = -\frac{\lambda}{D}\frac{U^2}{2g}L = -\frac{\lambda}{D}\frac{Q^2}{2g\Omega^2}L$$

2) Problema 2: calcolo della portata

La differenza fra il carico iniziale e quello finale in un tubo in rame lungo L è $\Delta H = H_1 - H_2$. Conoscendo il diametro D del tubo, valutare la portata Q di acqua defluente .

Dati: $L = 10m, \quad \Delta H = 5m, \quad D = 2{,}6cm$

Soluzione:

Dall'equazione del moto è possibile ricavare

$$Q = \Omega\sqrt{\frac{2g\Delta HD}{\lambda L}}$$

La precedente relazione non consente tuttavia il calcolo diretto di Q perché λ dipende dal numero di Reynolds e quindi da Q. E' necessario dunque procedere per tentativi.

Dalla conoscenza del materiale della condotta (rame) deriva il valore di $y_r = 0.1 \quad 10^{-4}m$ e quello di

$$\varepsilon = \frac{y_r}{D} = 3.85\,10^{-4}$$

Se si suppone che il regime di moto sia quello di parete assolutamente scabra (alti valori del numero di Reynolds) si ottiene un valore di primo tentativo di λ

$$\lambda_1 = 0.0158$$

Con esso è possibile ricavare un valore di primo tentativo di Q

$$Q_1 = 2.13\, \ell/s$$

da cui discendono

$$U_1 = 4.01\, m/s \quad \text{e} \quad Re_1 = 1.04 \quad 10^5$$

Avendo ora a disposizione un valore di tentativo del numero di Reynolds è possibile controllare se l'ipotesi iniziale di regime di parete assolutamente scabra era corretta o no. Dall'analisi del diagramma di Moody emerge che la condotta è nel regime di transizione. La conoscenza di Re consente di ottenere un secondo valore di λ

$$\lambda_2 = \lambda\left(1.04\,10^5, 3.85\,10^{-4}\right) \cong 0.02$$

Con tale valore di λ è possibile ottenere un secondo valore di Q

$$Q_2 = 1.89 \, \ell/s$$

da cui discendono

$$U_2 = 3.56 \, m/s \quad e \quad Re_2 = 9.26 \;\; 10^4$$

la conoscenza di Re_2 consente di ottenere un terzo valore di λ

$$\lambda_3 = \lambda\left(9.26\,10^4, 3.85\,10^{-4}\right) \cong 0.0201$$

che porta a un valore di Q praticamente coincidente con Q_2. Si è ottenuta la convergenza del risultato. Se Q_3 fosse stato sensibilmente diverso da Q_2 il calcolo avrebbe dovuto proseguire.

3) Problema 3: calcolo del diametro (Problema di progetto)

Fra due serbatoi, distanti 4 Km, si vuole posare una tubazione in grado di far defluire una portata Q di acqua. Si decide di utilizzare tubi in ghisa asfaltata $(y_r = 0.1mm)$. Sapendo che il dislivello fra il pelo libero dei due serbatoi è ΔH, valutare il diametro del tubo da utilizzare.

Dati: $Q = 3 \, \ell/s$, $\Delta H = 10m$

Soluzione:

Il calcolo del diametro di una condotta, noti gli altri dati, deve essere fatto per tentativi, cercando di individuare il valore di D che causa delle perdite di carico lungo la condotta pari a ΔH. In altre parole si deve trovare D tale che

$$\Delta H = \frac{\lambda}{D}\frac{Q^2}{2g\Omega^2}L$$

A tal fine è opportuno precisare che la valutazione di D non deve essere fatta con troppe cifre significative, considerando che i diametri in commercio sono un numero limitato. Un valore di primo tentativo per D può essere individuato imponendo che la velocità media nella condotta sia pari a $1 \, m/s$

$$D_1 = \sqrt{\frac{4Q}{\pi U_1}} = 0.0618m$$

Con tale valore del diametro (ricordiamo di tentativo) valutiamo $\frac{\lambda}{D}\frac{Q^2}{2g\Omega^2}L$ e confrontiamolo con ΔH pari a 10m.

Si ha

D	Ω	U	Re	ε	λ	$\frac{\lambda}{D}\frac{U^2}{2g}L$
$[m]$	$[m^2]$	$[m/s]$				$[m]$
0.0618	3.10^{-3}	1.00	$6.18\,10^4$	$1.62\,10^{-3}$	$\cong 0.025$	82.6

Il valore delle perdite risulta molto maggiore del dislivello effettivamente disponibile. Ciò suggerisce che il diametro deve essere maggiore, affinchè il fluido viaggi a una velocità inferiore e inferiori siano le perdite. Tentiamo con $D = 10cm$. Si ha

D	Ω	U	Re	ε	λ	$\frac{\lambda}{D}\frac{U^2}{2g}L$
0.1	$7.85\,10^{-3}$	0.38	$3.8\,10^4$	$1.\,10^{-3}$	$\cong 0.025$	$7.36m$

Le perdite sono ora inferiori al dislivello. Proviamo $D = 9.5cm$

D	Ω	U	Re	ε	λ	$\frac{\lambda}{D}\frac{U^2}{2g}L$
0.095	$7.09\,10^{-3}$	0.42	$3.99\,10^4$	$1.\,05\,10^{-3}$	$\cong 0.025$	$9.44m$

Le perdite sono ancora inferiori a ΔH anche se molto vicine. Verifichiamo che con un diametro di $9\ cm$ esse risultano superiori

D	Ω	U	Re	ε	λ	$\frac{\lambda}{D}\frac{U^2}{2g}L$
0.09	$6.36\,10^{-3}$	0.47	$4.23\,10^4$	$1.11\,10^{-3}$	$\cong 0.024$	$12.12m$

Emerge quindi che il diametro da utilizzare è compreso fra 9 e 9.5 cm.