

ELEMENTI DI IDRAULICA AMBIENTALE

Maurizio Brocchini



Università degli Studi di Genova
Anno Accademico 2005-2006

PREFAZIONE

Questi appunti di “Elementi di Idraulica Ambientale” sono stati redatti come supporto didattico ai corsi di Idraulica Ambientale 1 (Cod. 32643) per allievi in Ingegneria Civile e Ambientale e di Idraulica Ambientale (Cod. 32823) per allievi in Ingegneria per l’Ambiente e il Territorio.

Nel corso si propongono gli elementi di base della teoria della diffusione e dispersione di traccianti passivi, dei fondamenti di turbolenza libera e di applicazioni relative a corpi idrici naturali quali fiumi, laghi e mari.

Gli appunti riassumono compiutamente ma sinteticamente i contenuti del corso (e anche la forma editoriale lo testimonia) che verranno discussi in maggior dettaglio durante le lezioni. Per ulteriori approfondimenti si riferiscono gli allievi ai testi specializzati e, in particolare, al testo di H.B. Fischer et al.

Mixing in inland and coastal waters
(Academic Press).

Ringrazio, infine, i Proff. Colombini e Seminara per gli utili suggerimenti e per aver gentilmente messo a mia disposizione molto materiale didattico utilizzato in questi appunti.

Genova, Settembre 2005

Maurizio Brocchini

Tel.: 010 353 2471, e-m.: brocchin@diam.unige.it, Ricevimento: martedì 16-18 presso DIAM

1 FONDAMENTI

I meccanismi che conducono al mescolamento in ambiente fluido di traccianti passivi (soluti non reattivi) si differenziano in funzione delle caratteristiche del moto del fluido stesso.

Schema dei processi di mescolamento

Proprietà del Moto	Meccanismi di Mescolamento
Quiete ($\mathbf{v}=0$)	Diffusione molecolare
Laminare ($Re < Re_c$) e Uniforme ($\nabla \mathbf{v}=0$)	Diffusione molecolare+Convezione
Laminare ($Re < Re_c$) e Disuniforme ($\nabla \mathbf{v} \neq 0$)	Diff. molec.+Convezione+Dispersione
Turbolento ($Re > Re_c$) e Mediamente uniforme ($\nabla \mathbf{V}=0$)	Diff. molec.+Convezione+Diff. turbolenta
Turbolento ($Re > Re_c$) e Mediamente disuniforme ($\nabla \mathbf{V} \neq 0$)	Diff. molec.+Convezione+Diff. turbolenta+Dispersione

Nel seguito si farà uso delle seguenti definizioni:

1. Concentrazione massica

Nello ‘schema di continuo’, per cui le proprietà di un fluido sono la media su un numero opportuno di molecole, data la massa $\Delta \mathcal{M}_A$ del ‘componente o specie A’ contenuta in ΔV si definisce la concentrazione c_A come:

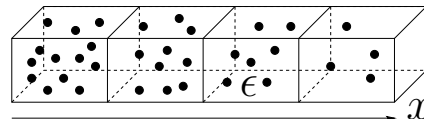
$$c_A \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow \epsilon} \frac{\Delta \mathcal{M}_A}{\Delta V}, \quad [c_A] = ML^{-3} \quad (1.1)$$

Nota. Lo schema di continuo è valido se ϵ è:

- (a) abbastanza grande da contenere molte molecole cioè se
 $(\epsilon)^{1/3} \gg \lambda$ con $\lambda =$ distanza intermolecolare media;
- (b) abbastanza piccolo da descrivere correttamente la distribuzione spaziale locale delle concentrazioni cioè se

$$(\epsilon)^{1/3} \ll \left(\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} \right)^{-1}.$$

Esempio



Con questa scelta di ϵ si evidenzia bene che $\frac{\partial c}{\partial x} < 0$. Impossibile per ϵ molto grande.

La concentrazione massica della miscela di 2 componenti A e B è:

$$\bar{c} \equiv c_A + c_B = \lim_{\Delta V \rightarrow \epsilon} \frac{\Delta \mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B}{\Delta V} \quad (1.2)$$

e per fluido omogeneo (1 sola componente) \bar{c} è la densità.

2. Velocità

(a) Velocità della miscela

in una miscela le varie componenti hanno velocità diverse ($\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B, \dots$). La velocità media della miscela $\bar{\mathbf{v}}$ è tale che $\bar{c}\bar{\mathbf{v}}$ sia la portata massica per unità di superficie in direzione $\bar{\mathbf{v}}/|\bar{\mathbf{v}}|$:

$$\begin{aligned} \bar{c}\bar{\mathbf{v}} &\equiv c_A \mathbf{v}_A + c_B \mathbf{v}_B, \quad [\bar{c}\bar{\mathbf{v}}] = (ML^{-3})(LT^{-1}) = ML^{-2}T^{-1} \\ \implies \bar{\mathbf{v}} &\equiv \frac{c_A \mathbf{v}_A + c_B \mathbf{v}_B}{\bar{c}} \stackrel{(1.1)-(1.2)}{=} \frac{\Delta \mathcal{M}_A \mathbf{v}_A + \Delta \mathcal{M}_B \mathbf{v}_B}{\Delta \mathcal{M}_A + \Delta \mathcal{M}_B}. \quad (1.3) \end{aligned}$$

(b) Velocità di diffusione di 1 componente

la velocità di diffusione di 1 componente (A) è la velocità della componente (\mathbf{v}_A) rispetto alla velocità della miscela ($\bar{\mathbf{v}}$):

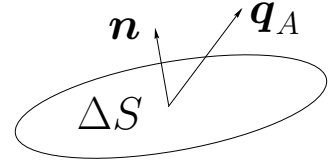
$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}_A &\equiv \mathbf{v}_A - \bar{\mathbf{v}} \stackrel{(1.3)}{=} \frac{(\Delta \mathcal{M}_A + \Delta \mathcal{M}_B) \mathbf{v}_A - \Delta \mathcal{M}_A \mathbf{v}_A - \Delta \mathcal{M}_B \mathbf{v}_B}{\Delta \mathcal{M}_A + \Delta \mathcal{M}_B} = \\ &= \frac{\Delta \mathcal{M}_B}{\Delta \mathcal{M}_A + \Delta \mathcal{M}_B} (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) \end{aligned}$$

cioè è una velocità relativa.

3. Flusso di massa

- (a) Il flusso di massa assoluto di A è \mathbf{q}_A tale che $\mathbf{q}_A \cdot \mathbf{n} \Delta S \Delta t$ sia la massa $\Delta \mathcal{M}_A$ che attraversa l'elemento di superficie ΔS di normale \mathbf{n} in un tempo Δt cioè:

$$\Delta \mathcal{M}_A \equiv \mathbf{q}_A \cdot \mathbf{n} \Delta S \Delta t.$$



Ma essendo $\Delta V = \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{n} \Delta S \Delta t$ il volume di A che attraversa ΔS nel tempo Δt , ed essendo, per definizione, $\Delta \mathcal{M}_A = c_A \Delta V$ ne segue:

$$c_A \underbrace{(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{n} \Delta S \Delta t)}_{(\Delta V)} = \Delta \mathcal{M}_A \equiv \mathbf{q}_A \cdot \mathbf{n} \Delta S \Delta t$$

cioè
$$\mathbf{q}_A = c_A \mathbf{v}_A. \quad (1.4)$$

- (b) Il flusso di massa relativo $\hat{\mathbf{q}}_A$ si definisce in analogia a $\hat{\mathbf{v}}_A$:
- $$\hat{\mathbf{q}}_A \equiv c_A \hat{\mathbf{v}}_A = c_A (\mathbf{v}_A - \bar{\mathbf{v}}).$$

1.1 Gli assiomi di Fick e la ‘Legge di Fick’

Gli assiomi, simili agli ‘Assiomi di Stokes’, permettono di derivare un ‘legame costitutivo’ tra \mathbf{q} e c noto come ‘legge di Fick’. [Questo legame è analogo, per esempio, alla ‘legge di Fourier’ che lega il flusso di calore alla temperatura ($\mathbf{q} = -K \nabla C_t$ con $K = \text{diffusività termica}$).]

Ipotesi:

1. miscela in quiete i.e. $\bar{\mathbf{v}} = 0$;
2. concentrazione massica costante $\bar{c} = \text{cost.}$

Assioma (1). $\hat{\mathbf{q}}_A$ è funzione di ∇c_A : $\hat{\mathbf{q}}_A = f(\nabla c_A)$.

Poichè per ipotesi $\bar{\mathbf{v}} = 0$, dalla definizione di $\hat{\mathbf{v}}_A$ ne segue $\hat{\mathbf{v}}_A = \mathbf{v}_A$ cioè $\mathbf{q}_A = f(\nabla c_A)$ e per una specie/componente generica:

$$\mathbf{q} = f(\nabla c);$$

Assioma (2). Il processo diffusivo è isotropo cioè non esistono direzioni preferenziali. Questo impone che f non deve dipendere dalla direzione spaziale;

Assioma (3). Il processo diffusivo è omogeneo cioè non dipende dalla posizione \mathbf{x} . Questo impone che f non deve dipendere esplicitamente da \mathbf{x} ;

Assioma (4). Il legame f è lineare.

Da cui la ‘Legge di Fick’:

$$\boxed{\mathbf{q} = -D\nabla c}, \quad D = \text{diffusività molecolare}, \quad [D] = L^2 T^{-1}. \quad (1.5)$$

Note:

- per l’Assioma (3), $\nabla D = 0$, ma D può dipendere dallo stato del fluido:

$$D = D(P, C_t, \text{chimica}, \dots);$$

- per l’Assioma (2), D è uno scalare;

- il segno $-$ nella (1.5) indica che la massa fluisce da regioni ad alta concentrazione verso regioni a bassa concentrazione;

- il Numero di Schmidt $\boxed{Sc \equiv \frac{\nu}{D}}$ (1.6)

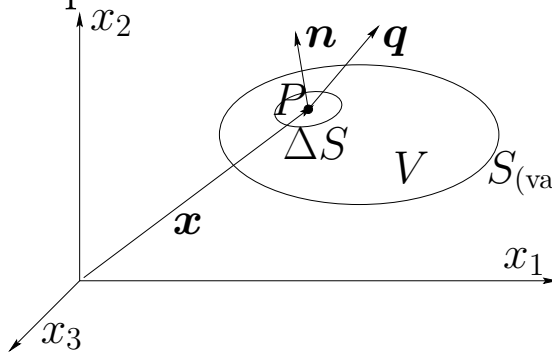
misura gli effetti di diffusione di quantità di moto rispetto alla diffusione di massa.

Nei liquidi (acqua) $D \approx 2 \times 10^{-9} m^2 s^{-1}$ e $\nu \approx 1 \times 10^{-6} m^2 s^{-1}$
 $\implies Sc \approx 10^3 \gg 1$.

2 LA DIFFUSIONE MOLECOLARE (quiete)

L'equazione che descrive il processo di pura diffusione molecolare si ottiene imponendo la conservazione della massa di soluto.

Se $c(\mathbf{x}, t)$ è la concentrazione massica di soluto in un punto P interno al volume di controllo V (volume spaziale fisso), si impone la conservazione della massa di soluto racchiusa in V :



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V c dV + \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (2.1)$$

(variazione di massa in V) (flusso di massa attraverso S)

Usando il 'Teorema della Divergenza' $\int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} dV$,

si giunge alla forma

$$\int_V \left[\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} \right] dV = 0$$

e, per l'arbitrarietà di V , alla forma differenziale

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0. \quad (2.2)$$

Quindi, sostituendo nella (2.2) la 'Legge di Fick' (1.5) si ha:

$$0 = \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} \stackrel{(1.5)}{=} \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (-D \nabla c) \stackrel{(D = cost)}{=} \frac{\partial c}{\partial t} - D \nabla^2 c$$

$$\implies \boxed{\frac{\partial c}{\partial t} = D \nabla^2 c} \quad (\text{Equazione di 'pura diffusione'}) \quad (2.3)$$

Quest'equazione è:

- simile all' 'Equazione del calore';
- lineare in c cioè tale che se c_1 e c_2 la soddisfano anche la combinazione lineare $c = \alpha c_1 + \beta c_2$ la soddisfa \implies 'Sovrapposizione degli effetti'.

Alla (2.3) si devono associare delle opportune:

- Condizioni iniziali. $c(\mathbf{x}, 0) = c_0(\mathbf{x})$;
- Condizioni al contorno. Queste possono essere di 2 tipi:

Tipo Dirichlet. $c(\mathbf{x}_f, t) = c_f(t)$, $\mathbf{x}_f \in$ frontiera del dominio

Tipo Neumann. $\nabla c(\mathbf{x}_f, t) = (\nabla c)_f(t)$, $\mathbf{x}_f \in$ frontiera del dominio

Nota: Dalla (1.5) la condizione di Neumann coincide con il fornire il flusso di massa \mathbf{q} alla frontiera. Infatti essendo $\mathbf{q} = -D\nabla c$ noto ∇c risulta noto anche \mathbf{q} .

2.1 La diffusione monodimensionale

Si ipotizza di studiare la diffusione molecolare 1D di soluto per cui $c = c(x, t)$ ossia:

$$\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial z} = 0.$$

In tal caso la (2.3) diventa

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (2.4)$$

Si determina, quindi, la **soluzione fondamentale** della (2.4) corrispondente all'immissione di una massa \mathcal{M} di soluto in $(x, t) = (0, 0)$.

Le condizioni al contorno sono tali che c sia limitata per $x \pm \infty$.

La soluzione deve soddisfare le seguenti proprietà:

$$(i) \quad c = c(x, t, \mathcal{M}, D), \quad (2.5a)$$

(ii) Poichè (2.4) è lineare in c vale la sovrapposizione degli effetti cioè usando N sorgenti \mathcal{M} si ha una concentrazione Nc cioè

$$c \propto \mathcal{M}, \quad (2.5b)$$

(iii) per la definizione di concentrazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} c dx = \mathcal{M}, \quad (2.5c)$$

(iv) per la simmetria $x \leftrightarrow -x$ della (2.4) risulta $c(x, t) = c(-x, t)$.

$$\text{Quindi} \quad \frac{\partial c}{\partial x}(0, t) \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c(\Delta x, t) - c(-\Delta x, t)}{2\Delta x} = 0. \quad (2.5d)$$

Le condizioni (i) e (ii) implicano che

$$c = \mathcal{M}f(x, t, D) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{c}{\mathcal{M}} = f(x, t, D)$$

ed essendo, in un'analisi monodimensionale

$$[c] = ML^{-1}, \quad [\mathcal{M}] = M, \quad [x] = L, \quad [t] = T, \quad [D] = L^2T^{-1}$$

è possibile applicare il 'Teorema Π ' usando (t, D) come coppia di base

$$\Pi_0 = g(\Pi_1) \quad \text{con} \quad \Pi_0 = \frac{c/\mathcal{M}}{t^{\alpha_0}D^{\beta_0}}, \quad \Pi_1 = \frac{x}{t^{\alpha_1}D^{\beta_1}}$$

$$\Longrightarrow L^{-1} = \boxed{[c/\mathcal{M}] = [t]^{\alpha_0}[D]^{\beta_0}} = T^{\alpha_0}L^{2\beta_0}T^{-\beta_0} \Longrightarrow \alpha_0 - \beta_0 = 0, \quad 2\beta_0 = -1$$

$$\Longrightarrow (\alpha_0, \beta_0) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow L^1 = \boxed{[x] = [t]^{\alpha_1}[D]^{\beta_1}} = T^{\alpha_1}L^{2\beta_1}T^{-\beta_1} \Longrightarrow \alpha_1 - \beta_1 = 0, \quad 2\beta_1 = 1$$

$$\Longrightarrow (\alpha_1, \beta_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Ne deriva quindi che
$$\frac{c}{\mathcal{M}t^{-1/2}D^{-1/2}} = g\left(\frac{x}{t^{1/2}D^{1/2}}\right)$$

Da cui la **Soluzione fondamentale**

$$c = \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{Dt}} g(\eta) \quad \text{con} \quad \eta \equiv \frac{x}{\sqrt{Dt}} \quad (2.6)$$

Si determina la forma esplicita di $g(\eta)$ sostituendo la (2.6) nella (2.4) dove compaiono:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{Dt^3}} g + \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{Dt}} g' \left(-\frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{Dt^3}} \right) =_{(x/\sqrt{Dt}=\eta)} = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{Dt^3}} (g + g' \eta)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{Dt}} g' \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\mathcal{M}}{Dt} g'$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathcal{M}}{Dt} g' \right) = \frac{\mathcal{M}}{Dt} g'' \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{D^3 t^3}} g''.$$

Sostituendo nella (2.4), si ottiene un'equazione per $g(\eta)$:

$$-\frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{Dt^3}} (g + g' \eta) = \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{D^3 t^3}} g'' \implies g'' + \frac{1}{2} g' \eta + \frac{1}{2} g = 0$$

che può anche essere riscritta come: $\frac{d}{d\eta} \left(g' + \frac{1}{2} g \eta \right) = 0$

ed integrata tra 0 e il generico valore η :

$$\int_0^\eta \frac{d}{d\hat{\eta}} \left(g' + \frac{1}{2} g \hat{\eta} \right) d\hat{\eta} = 0 \implies \left(g' + \frac{1}{2} g \hat{\eta} \right)_\eta - \left(g' + \frac{1}{2} g \hat{\eta} \right)_0 = 0$$

$$\implies g'(\eta) + \frac{1}{2} g(\eta) \eta = g'(0).$$

Il valore di $g'(0)$ si calcola dalla proprietà di simmetria di c (equazione (2.5d)). Infatti dalla $\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\mathcal{M}}{Dt} g'$ ne segue che

$$g'(0) = \frac{Dt}{\mathcal{M}} \frac{\partial c}{\partial x}(0) =_{(2.5d)} = 0$$

e quindi
$$g' + \frac{1}{2} g \eta = 0 \quad (2.7)$$

con soluzione tipo $g = C_1 e^{\lambda \eta^2}$ con C_1 e λ da determinare.

Sostituendo tale soluzione nella (2.7) si ottiene:

$$2C_1\lambda\eta e^{\lambda\eta^2} + \frac{1}{2}C_1\eta e^{\lambda\eta^2} = 0 \implies 2\lambda = -\frac{1}{2} \implies \lambda = -\frac{1}{4}.$$

Per cui la (2.6) diventa: $c = \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{Dt}} C_1 e^{-\frac{\eta^2}{4}} = \frac{\mathcal{M}C_1}{\sqrt{Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$

La costante C_1 si determina imponendo il vincolo (2.5c):

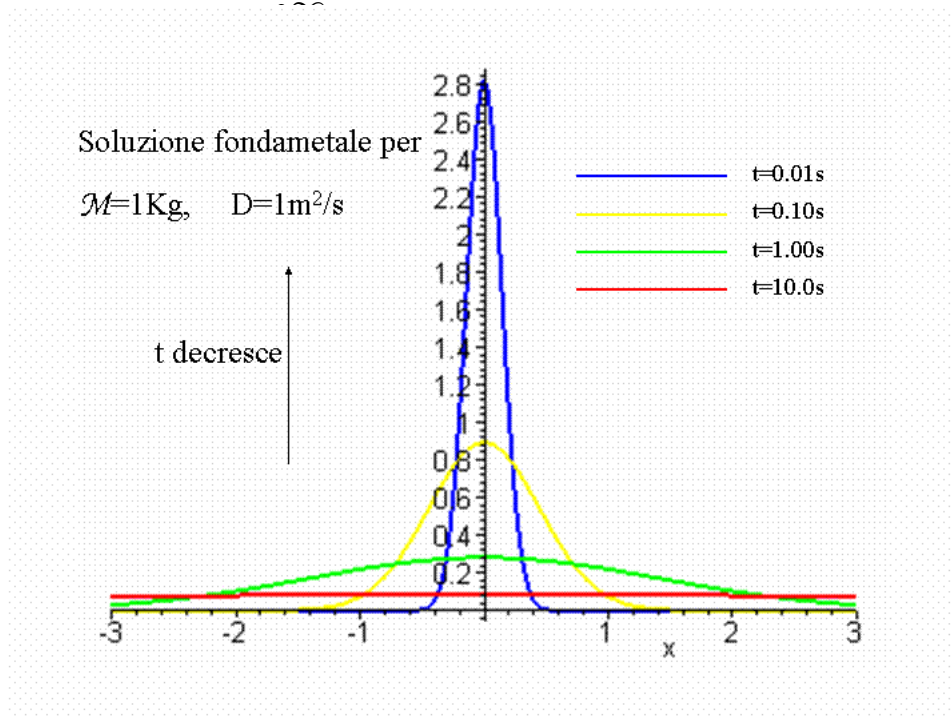
$$\mathcal{M} = \int_{-\infty}^{\infty} c dx = \frac{\mathcal{M}C_1}{\sqrt{Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx \stackrel{(X \equiv x/2\sqrt{Dt})}{=} \frac{\mathcal{M}C_1}{\sqrt{Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} 2\sqrt{Dt} dX$$

$$C_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

La soluzione fondamentale è, quindi:

$$(2.8)$$

$t \rightarrow 0$ tende alla δ



$$\lim_{x \neq 0, t \rightarrow 0} c(x, t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} c(0, t) = \infty$$

Cioè la (2.8) è soluzione della (2.4) a cui è associata la condizione iniziale $C_0(x) = \mathcal{M}\delta(x)$ (2.9)

[si provi a calcolare $\lim_{t \rightarrow 0} (2.8)$] dove

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - X) dx = f(X). \quad (2.10)$$

Proprietà della soluzione fondamentale

$$(i) M_0 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} c(x, t) dx = \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = \mathcal{M} \quad (2.11a)$$

(ii) la media μ (posizione del baricentro di c) e il momento di ordine 1, M_1 , sono legati dalla definizione

$$\mu \equiv \frac{M_1}{M_0} \quad (2.11b)$$

e sono entrambi nulli. Infatti

$$\begin{aligned} M_1 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} xc(x, t) dx = \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = \frac{\mathcal{M}2\sqrt{Dt}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Xe^{-X^2} dX \\ &= 2\mathcal{M} \sqrt{\frac{Dt}{\pi}} \left[-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d(e^{-X^2}) \right] = -\mathcal{M} \sqrt{\frac{Dt}{\pi}} \left[e^{-X^2} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0 \end{aligned} \quad (2.11c)$$

[Nota: si può dimostrare che tutti i momenti dispari sono nulli.]

(iii) il momento d'ordine 2, M_2 , dipende da D e t :

$$\begin{aligned} M_2 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^2 c(x, t) dx = \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{\pi}} 4Dt \int_{-\infty}^{\infty} X^2 e^{-X^2} dX \\ &= \frac{4\mathcal{M}Dt}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{d\lambda} e^{-\lambda X^2} \right]_{\lambda=1} dX = \frac{4\mathcal{M}Dt}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{d}{d\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda X^2} dX \right]_{\lambda=1} \\ &= -\frac{4\mathcal{M}Dt}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{d}{d\lambda} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \right) \right]_{\lambda=1} = -\frac{4\mathcal{M}Dt}{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^3}} \right]_{\lambda=1} = 2\mathcal{M}Dt \end{aligned} \quad (2.11d)$$

(iv) dalle (2.11) si determina la varianza σ^2 :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 c dx}{M_0} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 c dx - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} x c dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} c dx}{M_0} \\ &= \frac{M_2}{M_0} = \frac{2\mathcal{M}Dt}{\mathcal{M}} = 2Dt \end{aligned} \quad (2.11e)$$

Note:

- la (2.11d) mostra che la regione spaziale su cui $c(x, t)$ è significativa (di ampiezza σ^2) cresce linearmente con D e t ;
- si dimostra che tutti i momenti pari sono funzione di σ^2 ;
- dalla (2.11d) è chiaro che
$$\boxed{\frac{d\sigma^2}{dt} = 2D.} \quad (2.12)$$

Quest'ultimo risultato è molto più generale e vale per ogni funzione che soddisfa la (2.4) e tale che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n c = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad \forall n. \quad (2.13)$$

Infatti moltiplicando la (2.4) per x e integrando:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial c}{\partial t} dx &= D \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} dx \implies \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x c dx}_{=M_1} = D \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[x \frac{\partial c}{\partial x} - c \right] dx \\ \implies \frac{dM_1}{dt} &= D \left[x \frac{\partial c}{\partial x} - c \right]_{-\infty}^{\infty} \stackrel{(2.13)}{=} 0 \implies \mathcal{M} \frac{d\mu}{dt} = 0 \quad \text{cioè} \\ &\mu = \text{cost.} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Analogamente moltiplicando la (2.4) per x^2 e integrando:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\partial c}{\partial t} dx &= D \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} dx \implies \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 c dx}_{=M_2} = D \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^2 \frac{\partial c}{\partial x} - 2xc \right] dx + 2D \int_{-\infty}^{\infty} c dx \\ \implies \frac{dM_2}{dt} &= D \left[x^2 \frac{\partial c}{\partial x} - 2xc \right]_{-\infty}^{\infty} + 2D \mathcal{M} \stackrel{(2.13)}{=} 2D \mathcal{M} \implies \frac{d(M_0 \sigma^2)}{dt} = 2D \mathcal{M} \\ \implies \mathcal{M} \frac{d\sigma^2}{dt} &= 2D \mathcal{M} \implies \boxed{\frac{d\sigma^2}{dt} = 2D.} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Cioè la varianza di una qualsiasi distribuzione c limitata nel senso di (2.13) cresce con t alla velocità $2D$ indipendentemente dalla sua forma specifica.

3 ESTENSIONE APPLICABILITÀ SOLUZIONE FONDAMENTALE

Si analizzano alcuni casi specifici di **Soluzione fondamentale** in funzione di particolari condizioni iniziali/al contorno.

3.1 Caso di generica distribuzione iniziale di concentrazione

Mentre la soluzione (2.8) è relativa al caso di una massa \mathcal{M} immessa in $(x, t) = (0, 0)$ ci si pone il problema di ottenere una soluzione dell'equazione (2.4) nel caso in cui sia nota la generica condizione iniziale:

$$c(x, 0) = c_0(x). \quad (3.1)$$

Per le proprietà della δ di Dirac tale distribuzione iniziale può essere considerata come la sovrapposizione di infinite immissioni di massa del tipo: $d\mathcal{M}(\xi) = c_0(\xi)d\xi$. (3.2)

Infatti per le (2.10) la (3.1) diventa:

$$c_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c_0(\xi)\delta(x - \xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathcal{M}(\xi)\delta(x - \xi) \quad (3.3)$$

cioè una distribuzione iniziale dovuta ad infinite immissioni locali di massa $d\mathcal{M}(\xi)$.

Ricordando poi che

1. la (2.4) è lineare in c ;
2. la δ è il limite per $t \rightarrow 0$ della **Soluzione fondamentale**, cioè per $t \rightarrow 0$ la $\delta(x - \xi)$ che compare nella (3.3) evolve nel tempo verso la funzione $\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}$

la soluzione $c(x, t)$ al generico tempo t si ottiene come somma di **Soluzioni fondamentali**:

$$c(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_0(\xi)}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathcal{M}(\xi)}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}. \quad (3.4)$$

È ora possibile verificare che

(i) La (3.4) tende alla $c_0(x)$ per $t \rightarrow 0$.

$$\text{Posto } X \equiv \frac{x - \xi}{\sqrt{4Dt}} \implies \xi = x - (\sqrt{4Dt}) X, \quad dX = -\frac{d\xi}{\sqrt{4Dt}}$$

la (3.4) diventa $c(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c_0(x - \sqrt{4Dt} X) e^{-X^2} dX$
ed essendo per X prefissato $\lim_{t \rightarrow 0} \xi = x$ ne deriva

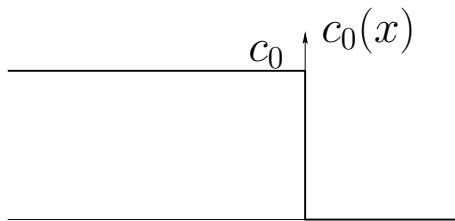
$$\lim_{t \rightarrow 0} c(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c_0(x) e^{-X^2} dX = \frac{c_0(x)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} dX = \frac{c_0(x)}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = c_0(x).$$

(ii) La massa di soluto è conservata.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} c(x, t) dx & \stackrel{(3.4)}{=} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} c_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi \right] dx = \\ & = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} c_0(\xi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} dx \right] d\xi = \\ & = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} c_0(\xi) \sqrt{4Dt} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} dX \right] d\xi = \\ & = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c_0(\xi) \sqrt{\pi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} c_0(\xi) d\xi = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathcal{M} = \mathcal{M} \end{aligned}$$

3.2 Il caso di ‘distribuzione iniziale a gradino’

È un caso particolare della soluzione (3.4) appena vista ed è relativa alla condizione iniziale



$$c_0(x) = \begin{cases} c_0 = \text{cost.} & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

che corrisponde all'immissione costante di soluto lungo $x < 0$.

La (3.4) si specializza in:

$$\begin{aligned} c(x, t) &= \frac{c_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi \stackrel{(X \equiv \frac{x-\xi}{\sqrt{4Dt}})}{=} -\frac{c_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} \sqrt{4Dt} e^{-X^2} dX \\ &= \frac{c_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}}^{\infty} e^{-X^2} dX = \frac{c_0}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^{\infty} e^{-X^2} dX - \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} e^{-X^2} dX \right] \\ &= \frac{c_0}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] = \frac{c_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

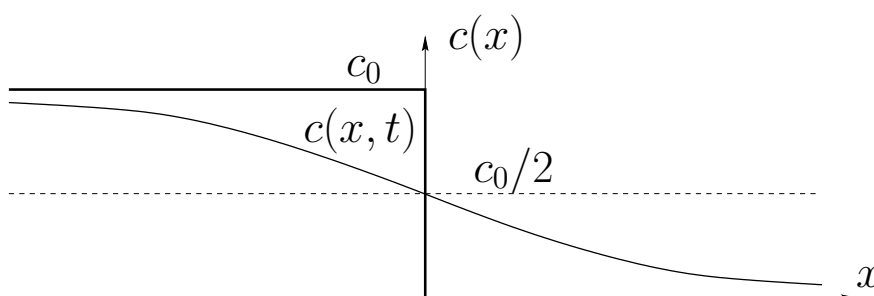
dove si è usata la definizione di ‘error function’

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-X^2} dX \quad (3.7)$$

che è una funzione per cui:

$$\operatorname{erf}(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{erf}(x) = \pm 1, \quad \operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x). \quad (3.8)$$

Nota: $\lim_{t \rightarrow \infty} c(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] = \frac{c_0}{2} [1 - \operatorname{erf}(0)] = \frac{c_0}{2}$



È possibile derivare altri casi particolari di **Soluzione fondamentale** ma per brevità non vengono qui riportate.

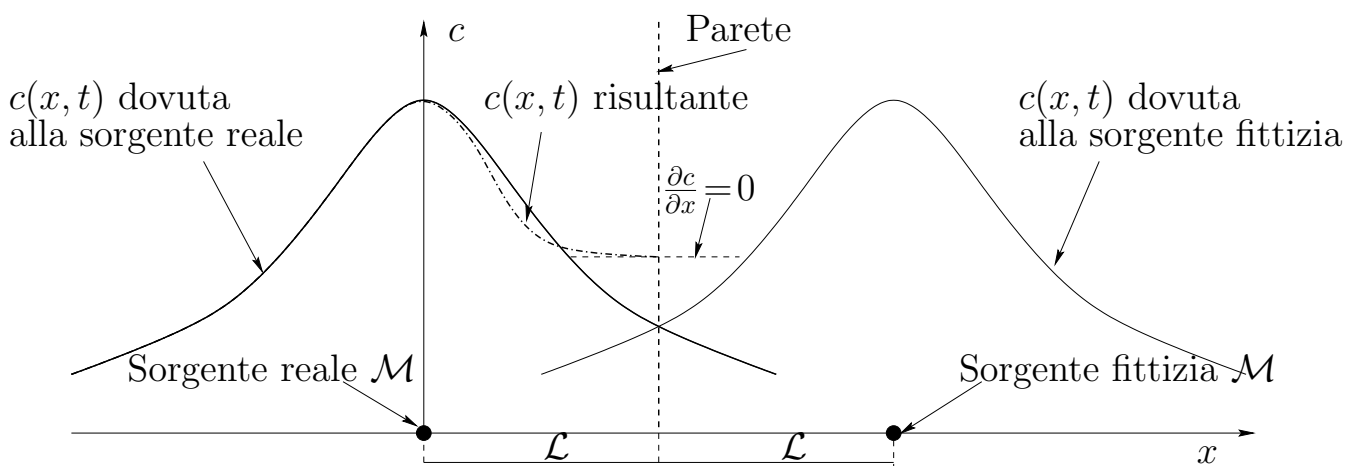
Viceversa si analizza il ruolo di eventuali contorni solidi che delimitino il dominio della **Soluzione fondamentale**

3.3 L'influenza delle pareti e il 'metodo delle immagini'

La presenza di una parete, posta per esempio a $x = \mathcal{L}$, impone che a tale contorno il flusso di massa sia nullo cioè [si veda la 'Legge di Fick' (1.5)]:

$$q_x = -D \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad \text{a} \quad x = \mathcal{L}.$$

Tale condizione viene soddisfatta ricorrendo ad un artificio per cui si rimuove la parete e si impongono condizioni di concentrazione simmetrica rispetto alla parete (in modo che sia $\frac{\partial c}{\partial x} = 0$). Questo è possibile usando la 'sovrapposizione degli effetti' valida in virtù della linearità della (2.4).



Per la 'sovrapposizione degli effetti' la $c(x, t)$ risultante è:

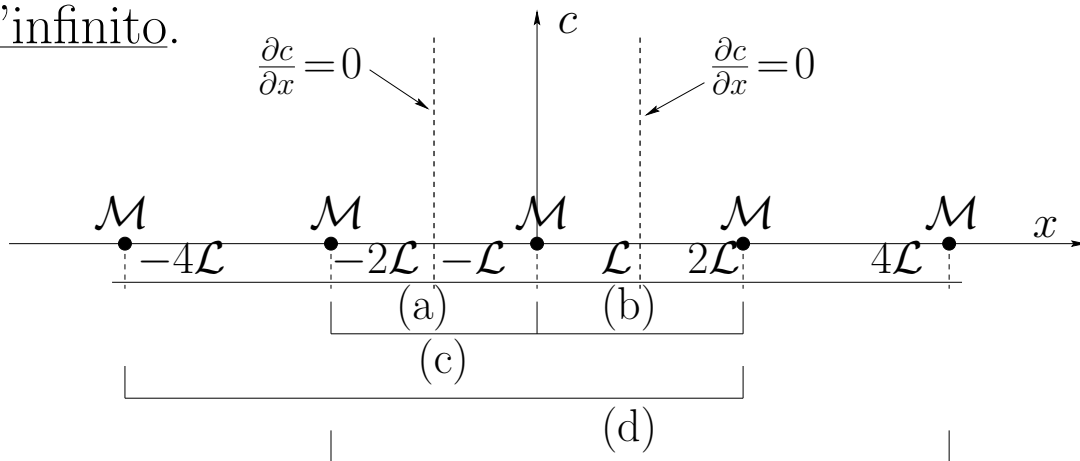
$$c(x, t) = \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{4\pi Dt}} \left[\underbrace{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}_{\text{sorgente reale in } x=0} + \underbrace{e^{-\frac{(x-2\mathcal{L})^2}{4Dt}}}_{\text{sorgente fittizia in } x=2\mathcal{L}} \right] \quad (3.9)$$

Se il dominio è limitato da 2 pareti, ad esempio in $x \pm \mathcal{L}$, si opera similmente:

1. per imporre $q_x = 0$ in $x = \pm \mathcal{L}$ si collocano 2 sorgenti fittizie rispettivamente in $x = 2\mathcal{L}$ (a) e $x = -2\mathcal{L}$ (b);
2. le sorgenti aggiuntive inducono del flusso di massa extra q_x^e alla parete opposta cioè rispettivamente a $x = -\mathcal{L}$ e $x = \mathcal{L}$.
 \implies si deve bilanciare q_x^e a $x = -\mathcal{L}$ indotto dalla sorgente immagine posta in $x = 2\mathcal{L}$ con un'altra sorgente fittizia in $x = -4\mathcal{L}$ (c).

Analogamente per bilanciare q_x^e attraverso $x = \mathcal{L}$ dovuto alla sorgente fittizia posta in $x = -2\mathcal{L}$ si deve introdurre un'altra sorgente in $x = 4\mathcal{L}$ (d);

3. anche queste ultime generano dei q_x^e e il processo va avanti all'infinito.



La soluzione complessiva è:

$$c(x, t) = \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{4\pi Dt}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x + 2n\mathcal{L})^2}{4Dt} \right]. \quad (3.10)$$

Nota: poichè l'effetto di ogni sorgente extra decade con la distanza come $e^{-(2n\mathcal{L})^2}$ l'effetto di sorgenti a 'grande n ' è trascurabile \implies bastano N sorgenti fittizie invece di infinite.

Si conclude estendendo il campo di validità della **Soluzione fondamentale** a problemi di diffusione in 2D e 3D.

3.4 La diffusione 2D

Nel caso 2D (piano) l'equazione di pura diffusione molecolare (2.3) diventa:

$$\frac{\partial c}{\partial z} = 0 \implies \frac{\partial c}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right), \quad [c] = ML^{-2}. \quad (3.11)$$

Ipotizzando di introdurre una massa \mathcal{M} di soluto in $(x, y, t) = (0, 0, 0)$ la condizione iniziale, in analogia al caso 1D (2.9), sarà:

$$c(x, y, 0) = \mathcal{M}\delta(x)\delta(y)$$

e, quindi, si ipotizza una soluzione a variabili separate:

$$c(x, y, t) = c_1(x, t)c_2(y, t), \quad [c_1] = [c_2] = M^{1/2}L^{-1}$$

che sostituita nella (3.11) porge:

$$\begin{aligned} c_1 \frac{\partial c_2}{\partial t} + c_2 \frac{\partial c_1}{\partial t} &= D \left(c_2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + c_1 \frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2} \right) \\ \implies c_2 \left(\frac{\partial c_1}{\partial t} - D \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} \right) + c_1 \left(\frac{\partial c_2}{\partial t} - D \frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Questa è soddisfatta se c_1 e c_2 sono **Soluzioni fondamentali** tipo (2.8) rispettivamente per diffusione in x e y :

$$c_1(x, t) = \frac{C_1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}, \quad c_2(y, t) = \frac{C_2}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{y^2}{4Dt}}$$

da cui la soluzione finale

$$\boxed{c(x, y, t) = \frac{C_1 C_2}{4\pi Dt} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{4Dt}} = \frac{\mathcal{M}}{4\pi Dt} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{4Dt}}} \quad (3.12)$$

che soddisfa la conservazione della massa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c dx dy = \mathcal{M}$$

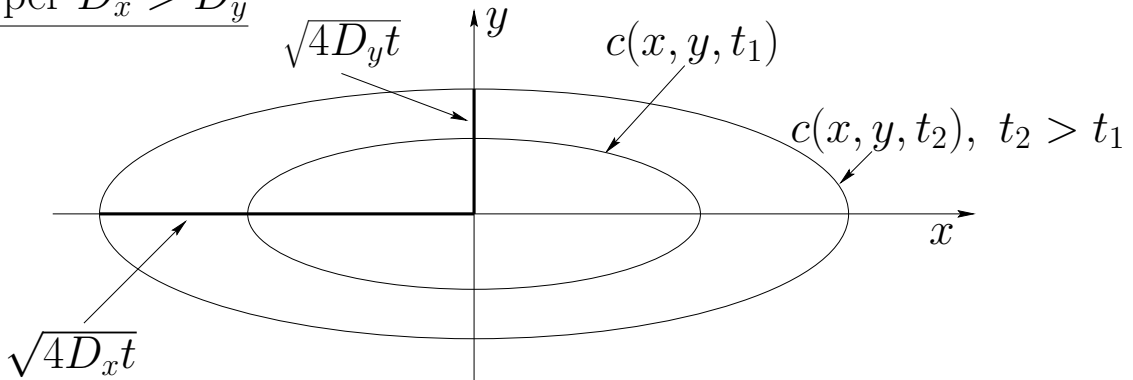
[Da dimostrare per esercizio.]

La (3.12) può essere generalizzata al caso di diffusività non isotropa (se ne vedrà la giustificazione parlando di Diffusione turbolenta) cioè per $D_x \neq D_y$:

$$c(x, y, t) = \frac{\mathcal{M}}{4\pi t \sqrt{D_x D_y}} e^{-\left[\left(\frac{x^2}{4D_x t}\right) + \left(\frac{y^2}{4D_y t}\right)\right]}. \quad (3.13)$$

In questo caso le linee di isoconcentrazione a t fissato sono delle ellissi i cui semiassi valgono $\sqrt{4D_x t}$ e $\sqrt{4D_y t}$.

Esempio per $D_x > D_y$



3.5 La diffusione 3D

Estendendo la (3.13) al caso 3D si ottiene:

$$c(x, y, z, t) = \frac{\mathcal{M}}{(4\pi t)^{3/2} \sqrt{D_x D_y D_z}} e^{-\left[\left(\frac{x^2}{4D_x t}\right) + \left(\frac{y^2}{4D_y t}\right) + \left(\frac{z^2}{4D_z t}\right)\right]} \quad (3.14)$$

e, in analogia ai casi 1D e 2D, la (3.14) può essere vista come l'evoluzione nel tempo di una concentrazione iniziale $c_0(\xi, \eta, \zeta)$

tale che

$$d\mathcal{M} = c_0(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$$

è la massa immessa istantaneamente nel generico punto (ξ, η, ζ) [si veda (3.2)-(3.3)]. Quindi, in analogia alla (3.4), si ottiene la soluzione al generica tempo t come:

$$c(x, y, z, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}} \sqrt{D_x D_y D_z}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} c_0(\xi, \eta, \zeta) e^{-\left[\frac{(x-\xi)^2}{4D_x t} + \frac{(y-\eta)^2}{4D_y t} + \frac{(z-\zeta)^2}{4D_z t}\right]} d\zeta. \quad (3.15)$$

Se, invece, la condizione assegnata impone l'immissione di una portata massica per unità di volume $\dot{\mathcal{M}} = \dot{\mathcal{M}}(\xi, \eta, \zeta, \tau)$, $[\dot{\mathcal{M}}] = ML^{-3}T^{-1}$ la soluzione è:

$$c(x, y, z, t) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{D_x D_y D_z}} \int_{-\infty}^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathcal{M}}(\xi, \eta, \zeta, \tau) e^{-\left[\frac{(x-\xi)^2}{4D_x(t-\tau)} + \frac{(y-\eta)^2}{4D_y(t-\tau)} + \frac{(z-\zeta)^2}{4D_z(t-\tau)}\right]} d\zeta.$$

Note:

- in questo caso, a differenza della (3.15) che rappresenta un'immissione istantanea, la dipendenza da $t^{\frac{3}{2}}$ compare come somma integrale su tutti i $d\tau$ compresi tra l'inizio dell'immissione $(-\infty)$ e il tempo attuale (t) ;
- come nella (3.15) al numeratore compare una grandezza di dimensioni M cioè $\dot{\mathcal{M}} d\xi d\eta d\zeta d\tau$;
- in tutti i casi 2D e 3D la presenza di contorni solidi viene modellata tramite il 'metodo delle immagini' come visto per il caso 1D.

4 LA DIFFUSIONE-CONVEZIONE

(moto laminare)

Si considera il mescolamento di una miscela in moto laminare con velocità media $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ [si trascura il soprasegno di definizione (1.3)].

Il processo di diffusione molecolare è sovrapposto al processo di trasporto o ‘convezione’ della miscela \implies si analizza la diffusione tramite un sistema di coordinate in moto con il fluido.

Poichè è $\mathbf{v} \neq 0$ si deve modificare l’equazione di conservazione della massa (2.1) in modo da considerare anche il flusso di massa convettivo [$\mathbf{q} = c\mathbf{v}$ dalla (1.4)] attraverso S :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V c dV + \underbrace{\int_S c\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS}_{\text{Flusso di massa convettivo}} + \underbrace{\int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS}_{\text{Flusso di massa diffusivo}} = 0$$

che, usando il ‘Teorema della divergenza’, diventa:

$$\int_V \left[\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{q} \right] dV = 0$$

e, per l’arbitrarietà di V :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\mathbf{v} + \mathbf{q}) = 0. \quad (4.1)$$

In altre parole il flusso di massa complessivo attraverso S è:

$$(c\mathbf{v} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}.$$

Sostituendo nella (4.1) la ‘Legge di Fick’ (1.5) e ipotizzando che la miscela sia incomprimibile ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) si ha:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c \cancel{\nabla \cdot \mathbf{v}} + \mathbf{v} \cdot \nabla c + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \xrightarrow{(1.5)} \boxed{\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = D \nabla^2 c} \quad (4.2)$$

La convezione ha un ruolo importante nei processi di mescolamento, ad esempio la convezione disuniforme induce il meccanismo di dispersione. Per ora si considera una convezione uniforme indotta dal campo

$$\mathbf{v} = (u, 0, 0), \quad \text{con } u = \text{cost.}$$

Quindi la (4.2) diventa:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D \nabla^2 c. \quad (4.3)$$

Si analizzano 3 casi particolari della (4.3).

4.1 Convezione uniforme e diffusione longitudinale

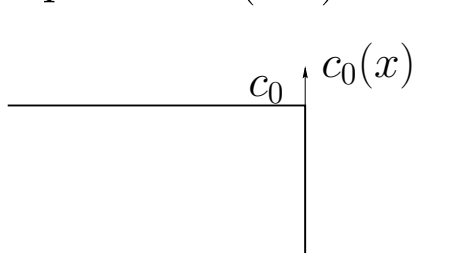
Nell'ipotesi

$$\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial z} = 0$$

la (4.3) diventa

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (4.4)$$

Se poi si utilizza come condizione iniziale quella di gradino di equazione (3.5)



$$c_0(x) = \begin{cases} c_0 = \text{cost.} & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

è possibile risolvere il problema usando un sistema di riferimento in moto con la miscela a velocità u :

$$\xi = x - ut, \quad \tau = t.$$

Quindi le relazioni tra le derivate diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{=1} \frac{\partial}{\partial \xi} + \underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial x}}_{=0} \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial t}}_{=-u} \frac{\partial}{\partial \xi} + \underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial t}}_{=1} \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} - u \frac{\partial}{\partial \xi} \end{array} \right.$$

da cui l'equivalente della (4.4) nelle variabili (ξ, τ) :

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} - u \frac{\partial c}{\partial \xi} + u \frac{\partial c}{\partial \xi} = D \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} \implies \boxed{\frac{\partial c}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2}} \quad (4.5)$$

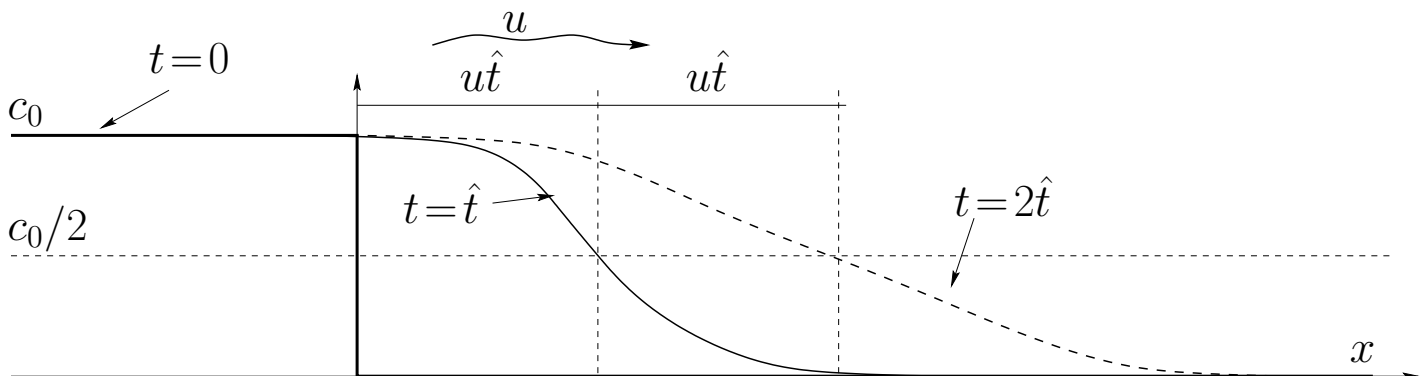
che è un'equazione di 'pura diffusione' tipo (2.4) con soluzione esattamente identica $[(x, t) \rightarrow (\xi, \tau)]$ alla (3.6):

$$c(\xi, \tau) = \frac{c_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\xi}{\sqrt{4D\tau}} \right) \right].$$

Infine, tornando alle variabili del sistema fisso:

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x - ut}{\sqrt{4Dt}} \right) \right]$$

che rappresenta un fronte che si propaga verso destra e, contemporaneamente 'si spaccia'.



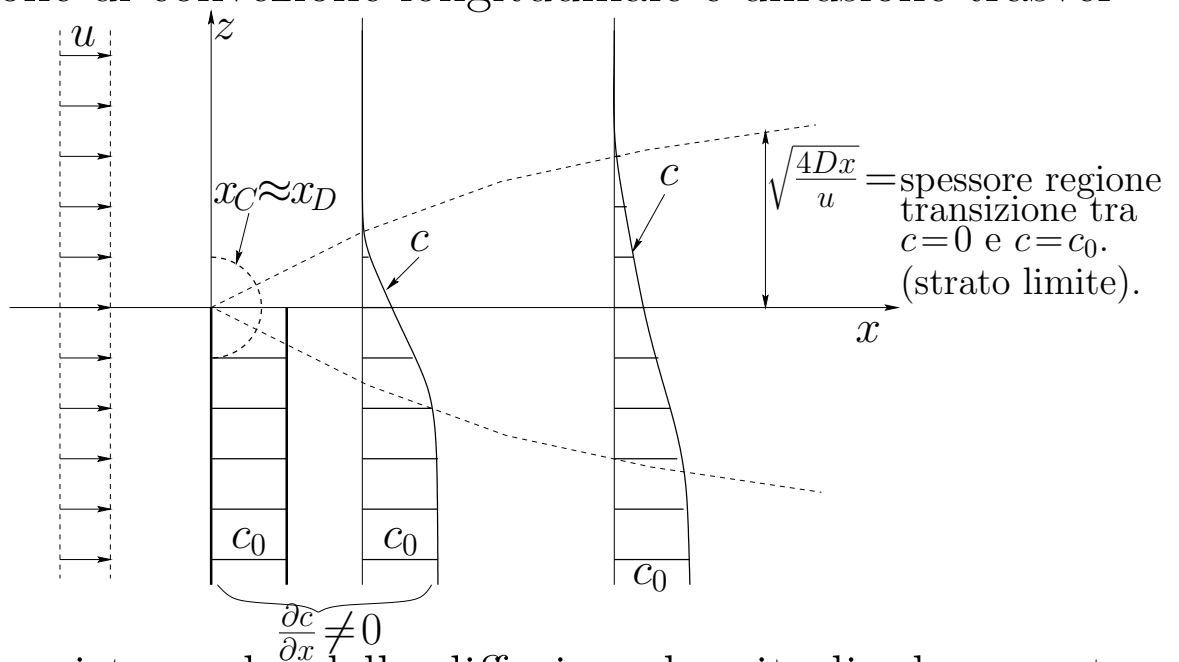
4.2 Convezione uniforme e diffusione trasversale

Imponendo il solo vincolo $\frac{\partial c}{\partial y} = 0$

e sostituendo la condizione di gradino (3.5) con le condizioni

$$c_0(0,z) = \begin{cases} c_0 = \text{cost.} & z \leq 0 \\ 0 & z > 0 \end{cases}, \underbrace{\lim_{z \rightarrow \infty} c(x,z) = 0, \lim_{z \rightarrow -\infty} c(x,z) = c_0}_{\text{stazionarie}} \quad (4.6)$$

si determina un gradiente di c in direzione z e, quindi, una sovrapposizione di convezione longitudinale e diffusione trasversale.



In realtà esiste anche della diffusione longitudinale causata dalla disuniformità di c in x . Questa, però, è trascurabile se la convezione è abbastanza intensa.

Infatti in un tempo prefissato \hat{t} (qui solo ‘scala temporale’ e non coordinata temporale per la stazionarietà del problema) il fluido si sposta convettivamente di $x_C = u\hat{t}$ mentre il soluto diffonde di una distanza $x_D = \sqrt{D\hat{t}}$. \implies la diffusione longitudinale è trascurabile rispetto alla convezione se:

$$x_C \gg x_D \xrightarrow{\hat{t} = x_C/u} x_C \gg \sqrt{\frac{Dx_C}{u}} \implies x_C \gg \frac{D}{u} \left(\approx \frac{10^{-9} \text{m}^2/\text{s}}{1 \text{m/s}} = 10^{-9} \text{m} \right) \quad (4.7)$$

cioè per \hat{t} tale che: $x_C \gg x_D \xrightarrow{x_C = u\hat{t}} u\hat{t} \gg \sqrt{D\hat{t}} \xrightarrow{\quad} \underline{\hat{t} \gg D/u^2}$.

Dalla (4.7) discende anche che

$$\sqrt{\frac{D}{ux_C}} \ll 1 \implies \sqrt{\frac{\nu}{ux_C}} \underbrace{\sqrt{\frac{D}{\nu}}}_{Sc^{-1/2}} \xrightarrow{(1.6)} \frac{1}{\sqrt{ReSc}} \ll 1.$$

Quindi per distanze/‘tempi’ sufficientemente grandi ($x \gg D/u$, $\hat{t} \gg D/u^2$) è possibile trascurare gli effetti di diffusione longitudinale e la (4.2) diventa:

$$\underbrace{\frac{\partial c}{\partial t}}_{\text{(moto stazionario)}} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D \left(\underbrace{\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}}_{(4.7)} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) \implies u \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad (4.8)$$

e utilizzando un opportuno sistema di riferimento mobile

$$\begin{cases} \xi = \frac{x}{u}, & \eta = z \\ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{=1/u}, & \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \eta} \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial z}}_{=1} = \frac{\partial}{\partial \eta} \end{cases}$$

si riconduce la (4.8) alla forma

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial \xi} = D \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2}} \quad (4.9)$$

in cui ξ è una variabile di ‘tipo-tempo’ come τ nella (4.5).

E, in analogia, al caso della sezione precedente:

$$c(\xi, \eta) = \frac{c_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{\sqrt{4D\xi}} \right) \right] \implies \boxed{c(x, z) = \frac{c_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{z}{\sqrt{4Dx/u}} \right) \right]}$$

che rappresenta uno strato limite di concentrazione con spessore $\sqrt{4Dx/u}$ crescente in x come $x^{1/2}$.

4.3 Convezione uniforme e diffusione 3D

4.3.1 La sorgente puntiforme

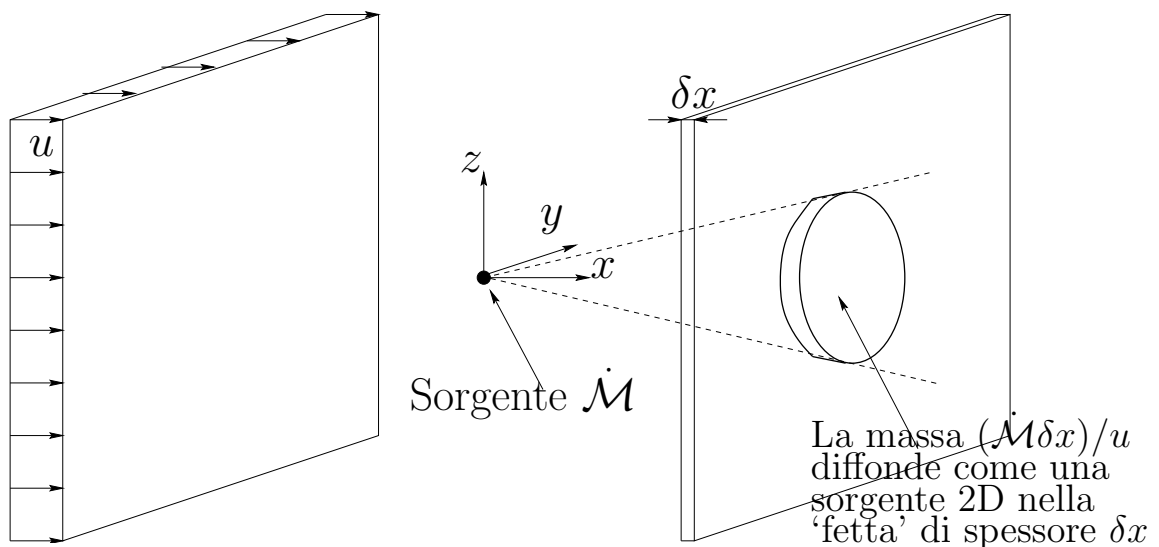
Il caso di una sorgente puntuale posta in $\mathbf{x} = 0$ e che scarica del soluto con portata massica $\dot{\mathcal{M}} = \text{cost.}$ in un fluido in moto a velocità u è rappresentato dalla (4.3):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right).$$

Questa può essere semplificata trascurando il termine inerziale ($\dot{\mathcal{M}} = \text{cost.}$ è una condizione stazionaria) e la diffusione longitudinale ('distanze/tempi grandi'):

$$u \frac{\partial c}{\partial x} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) \xrightarrow{\xi = x/u} \frac{\partial c}{\partial \xi} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) \quad (4.10)$$

la cui soluzione è riconducibile a quella di una sorgente istantanea in 2D [si vedano (3.11)-(3.12)].



Una 'fetta di fluido' di spessore δx in moto a velocità u attraverso la sorgente si carica di una massa $\dot{\mathcal{M}}\delta\xi$ essendo $\delta\xi = \text{tempo impiegato ad attraversare la sorgente} = \delta x/u$.

\implies la massa $(\dot{\mathcal{M}}\delta x)/u$ di soluto immessa a $\xi = 0$ nella ‘fetta di fluido’ diffonde come una sorgente 2D nella ‘fetta’ stessa con modalità imposte dalla (4.10).

\implies la concentrazione superficiale sarà quella di pura diffusione in 2D [si veda equazione (3.12)] cioè:

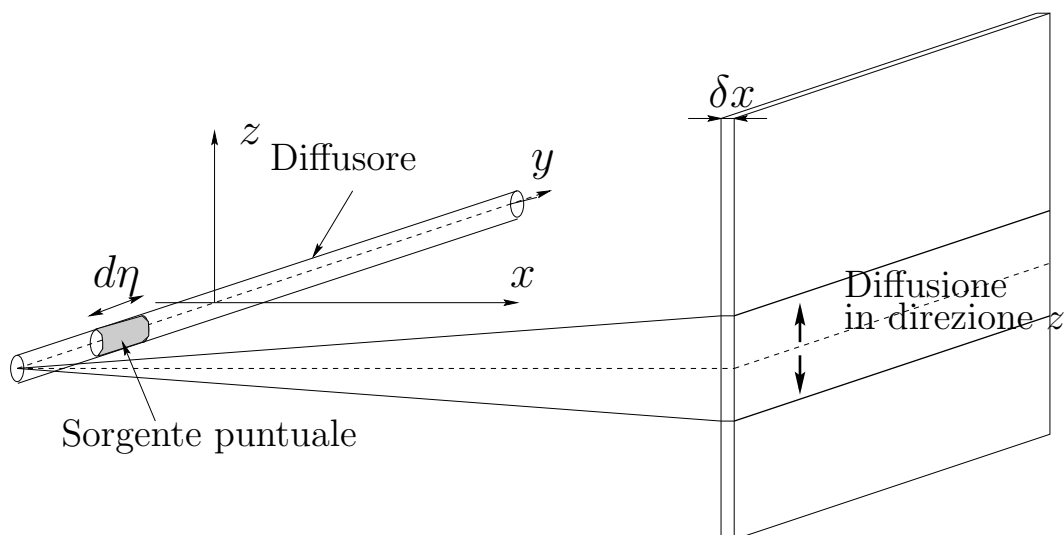
$$c_{A\text{reale}}(y, z, \xi) = \frac{\dot{\mathcal{M}}\delta\xi}{4\pi D\xi} e^{-\frac{(y^2+z^2)}{4D\xi}}$$

da cui si ottiene la concentrazione volumetrica $c \equiv c_{A\text{reale}}/\delta x$:

$$c(x, y, z) = \frac{1}{\delta x} \frac{(\dot{\mathcal{M}} \delta x)/u}{4\pi D x/u} e^{-\frac{(y^2+z^2)u}{4Dx}} = \frac{\dot{\mathcal{M}}}{4\pi Dx} e^{-\frac{(y^2+z^2)u}{4Dx}}. \quad (4.11)$$

4.3.2 La sorgente lineare

Nei casi di interesse pratico i ‘diffusori’ sono schematizzati come una distribuzione lineare e uniforme di sorgenti puntuali.



In questo caso il problema si risolve direttamente tramite la (4.11). Infatti se $\dot{m}d\eta dt$ è la massa immessa nel tempo dt

dalla sorgente infinitesima $d\dot{\mathcal{M}}$ ($d\dot{\mathcal{M}} = \dot{m}d\eta$) la concentrazione generata da tale sorgente localizzata in $y = \eta$ è

$$dc = \frac{d\mathcal{M}}{4\pi Dx} e^{-\frac{((y-\eta)^2+z^2)u}{4Dx}} = \frac{\dot{m}d\eta}{4\pi Dx} e^{-\frac{((y-\eta)^2+z^2)u}{4Dx}}$$

e, integrando sulla lunghezza del diffusore (sovrapposizione degli effetti):

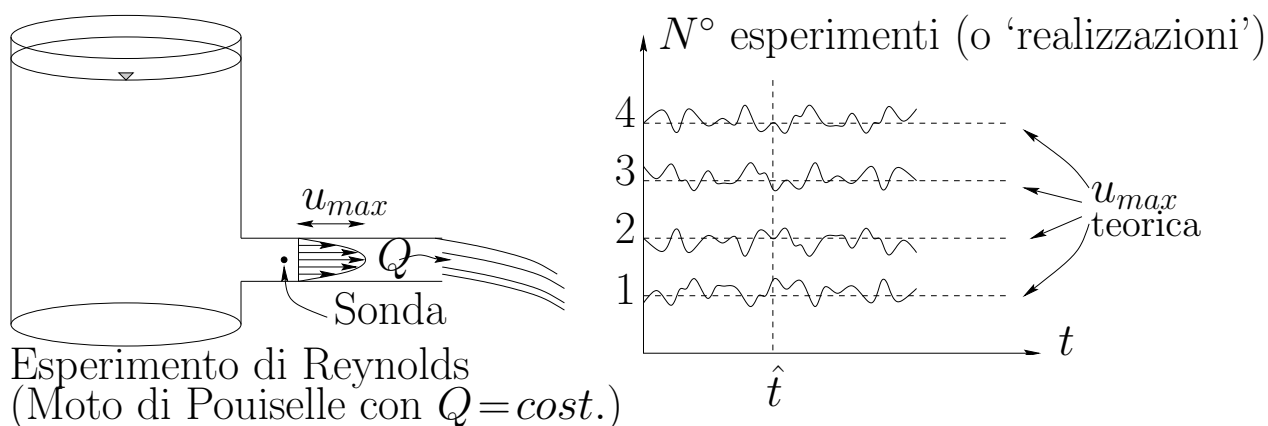
$$\begin{aligned} c &\equiv \int dc = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\dot{m}d\eta}{4\pi Dx} e^{-\frac{((y-\eta)^2+z^2)u}{4Dx}} = \\ &= \frac{\dot{m}}{4\pi Dx} e^{-\frac{z^2u}{4Dx}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\eta)^2u}{4Dx}} d\eta \stackrel{(Y \equiv (y-\eta)/\sqrt{4Dx/u}, d\eta = -\sqrt{4Dx/ud}Y)}{=} \\ &= \frac{\dot{m}}{4\pi Dx} e^{-\frac{z^2u}{4Dx}} \underbrace{\sqrt{\frac{4Dx}{u}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Y^2} dY}_{=\sqrt{\pi}} = \frac{\dot{m}}{\sqrt{4\pi Dxu}} e^{-\frac{z^2u}{4Dx}}. \quad (4.12) \end{aligned}$$

5 LA DIFFUSIONE TURBOLENTA: RICHIAMI DI TURBOLENZA

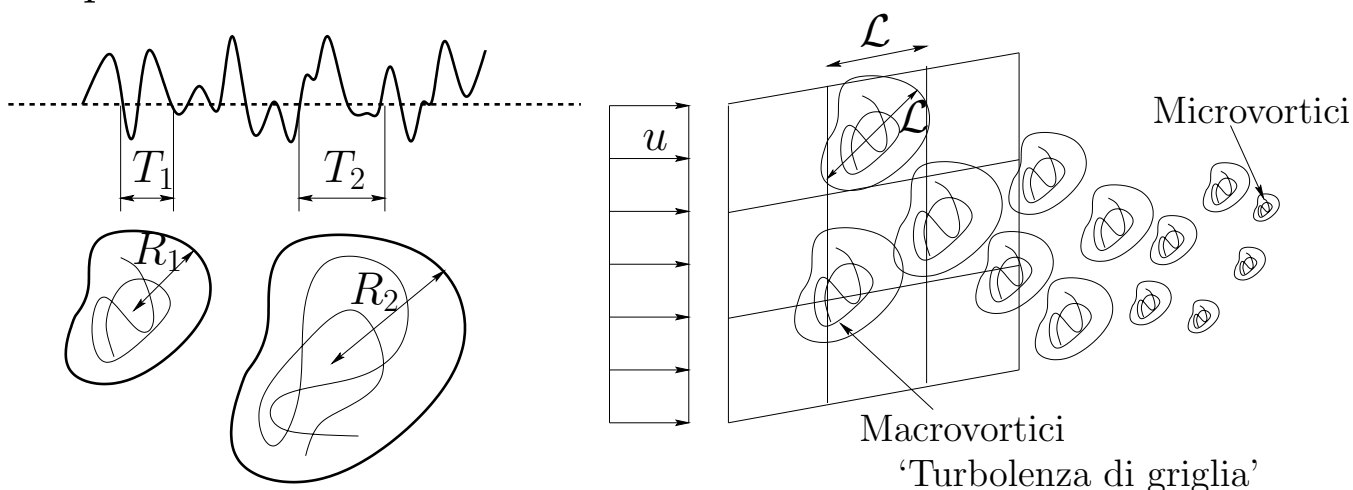
La diffusione molecolare è importante nel caso di moti laminari. Ma la gran parte dei moti di fluidi naturali avviene in regime turbolento \implies la diffusione turbolenta è più importante di quella molecolare. Le 2 differiscono qualitativamente ma, in opportune condizioni, si può usare per la diffusione turbolenta lo stesso formalismo già usato per la diffusione molecolare.

5.1 Proprietà dei moti turbolenti

(i) **impredicibilità:** andamento casuale di \mathbf{v} e p .



(ii) **moto con molte scale spaziali/temporali:** sovrapposizione di una distribuzione continua di vortici.



(iii) accentuazione di trasporto/mescolamento. I

vortici turbolenti di diverse scale ‘rimiscolano’ il fluido trasportando massa, quantità di moto ed energia molto più efficacemente che in un moto laminare.

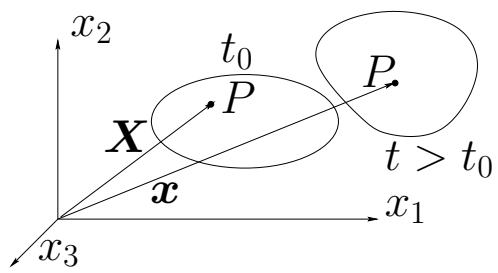
Osservazioni:

- i microvortici hanno tempi caratteristici (tempi di rotazione) molto minori dei macrovortici \implies sono statisticamente indipendenti dalla macroturbolenza e dal moto medio;
- la microturbolenza è isotropa mentre la macroturbolenza è anisotropa perchè forzata dal moto medio.



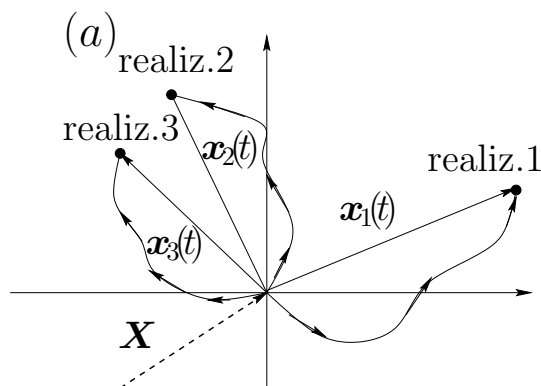
Vista l'impredicibilità dei moti turbolenti è necessario ricorrere ad una 'descrizione media' o 'descrizione statistica' di tali moti.

La traiettoria di una 'particella fluida' $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t, t_0)$ [nella descrizione lagrangiana del moto si identificano le particelle fluide con la loro coordinata iniziale $\mathbf{X} = \mathbf{x}(t_0)$] è descritta dall'equazione o, nota \mathbf{v} , $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \implies \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau) d\tau$ (5.1)

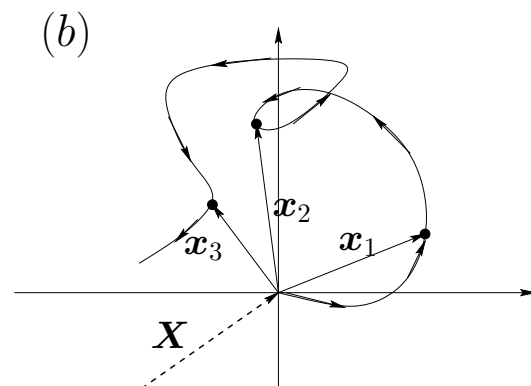


In un moto turbolento la coordinata \mathbf{x} è una **funzione aleatoria** o **casuale**. Infatti:

- fissati (\mathbf{X}, t, t_0) , \mathbf{x} è una **funzione aleatoria** della diverse realizzazioni [funzione aleatoria di n con $n =$ indice della realizzazione, figura (a)];
- fissata n e (\mathbf{X}, t_0) , \mathbf{x} è una **funzione aleatoria** di t [bassa correlazione tra le \mathbf{x} a tempi diversi, figura (b)].



Particelle rilasciate in \mathbf{X} a t_0 e osservate in t per 3 diverse realizzazioni.



Particella rilasciata in \mathbf{X} a t_0 e osservata in t : $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t) - \mathbf{X}$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(2t) - \mathbf{X}$, ...

5.2 L'operazione di media

Si è, quindi, soliti utilizzare 2 tipi di media:

- La media di insieme o probabilistica:** si mediano allo stesso istante t i valori ottenuti dalle N realizzazioni;
- La media temporale:** per 1 singola realizzazione si mediano gli spostamenti della particella ad istanti t successivi.

In generale le 2 medie differiscono ma coincidono se il **processo è stazionario ed ergodico** (definito nel seguito).

Per semplicità si considerano le singole componenti della (5.1):

$$x_i = x_i(\mathbf{X}, t_0, t)$$

come variabili di un processo stocastico e si definisce con

$$p(x_i|\mathbf{X}, t_0, t)dx_i \quad (5.2)$$

la probabilità (adimensionale) che una particella fluida rilasciata in \mathbf{X} a $t = t_0$ si trovi al generico tempo t in un punto P di coordinata x_i compresa tra x_i e $x_i + dx_i$.

La funzione $p(x_i|\mathbf{X}, t_0, t)$ che compare nella (5.2) è la **densità di probabilità** del processo x_i .

La conoscenza della sola p non basta a descrivere compiutamente il processo stocastico. È necessario conoscere anche la **probabilità congiunta** che la coordinata x_i assuma un valore nell'intervallo $[x_i^{(1)}, x_i^{(1)} + dx_i^{(1)}]$ al tempo t_1 , un valore in $[x_i^{(2)}, x_i^{(2)} + dx_i^{(2)}]$ al tempo t_2 , ... un valore in $[x_i^{(N)}, x_i^{(N)} + dx_i^{(N)}]$ al tempo t_N per N qualsiasi.

Si definisce con $p(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}|\mathbf{X}, t_0, t_1, t_2) dx_i^{(1)} dx_i^{(2)}$

la **probabilità congiunta** che $x_i(\mathbf{X}, t_0, t_1) \in [x_i^{(1)}, x_i^{(1)} + dx_i^{(1)}]$ e che $x_i(\mathbf{X}, t_0, t_2) \in [x_i^{(2)}, x_i^{(2)} + dx_i^{(2)}]$.

5.3 Definizioni

- **Media di insieme:**

$$\langle x_i \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x_i p(x_i|\mathbf{X}, t_0, t) dx_i; \quad (5.3)$$

- **Momento di ordine k :**

$$\langle x_i^k \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x_i^k p(x_i | \mathbf{X}, t_0, t) dx_i; \quad (5.4)$$

- **Auto-correlazione:**

$$\begin{aligned} \langle x_i^{(1)} x_i^{(2)} \rangle &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i^{(1)} x_i^{(2)} p(x_i^{(1)}, x_i^{(2)} | \mathbf{X}, t_0, t_1, t_2) dx_i^{(1)} dx_i^{(2)} \\ &= B_{ii}(\mathbf{X}, t_0, t_1, t_2) \end{aligned} \quad (5.5)$$

correlazione del secondo ordine tra stesse componenti di \mathbf{x}

a tempi diversi t_1, t_2 cioè il **valore atteso** che

$x_i(\mathbf{X}, t_0, t_1) \in [x_i^{(1)}, x_i^{(1)} + dx_i^{(1)}]$ e $x_i(\mathbf{X}, t_0, t_2) \in [x_i^{(2)}, x_i^{(2)} + dx_i^{(2)}]$;

- **Cross-correlazione:**

$$\begin{aligned} \langle x_i x_j \rangle &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j p(x_i, x_j | \mathbf{X}, t_0, t) dx_i dx_j \\ &= B_{ij}(\mathbf{X}, t_0, t) \end{aligned} \quad (5.6)$$

correlazione del secondo ordine tra componenti diverse di

\mathbf{x} allo stesso tempo t , cioè il **valore atteso** che

$x_i(\mathbf{X}, t_0, t) \in [x_i, x_i + dx_i]$ e $x_j(\mathbf{X}, t_0, t) \in [x_j, x_j + dx_j]$;

- **Processo stocastico stazionario:** tutte le correlazioni sono indipendenti da traslazioni τ lungo l'asse dei tempi ma dipendono solo dagli intervalli tra t_1, t_2, \dots, t_k .

Esempio

$$k=2 \quad B_{ii}(\mathbf{X}, t_0, t_1, t_2) = B_{ii}(\mathbf{X}, t_0 + \tau, t_1 + \tau, t_2 + \tau)$$

$$k=1 \quad \langle x_i \rangle(t) = \langle x_i \rangle(t + \tau) \implies \frac{\partial \langle x_i \rangle}{\partial t} \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle x_i \rangle(t + \tau) - \langle x_i \rangle(t)}{\tau} = 0$$

- **Processo stocastico omogeneo:** analogamente, tutte le correlazioni sono indipendenti da traslazioni $\hat{\boldsymbol{x}}$ della coordinata spaziale \boldsymbol{x} .
- le proprietà statistiche della distribuzione di concentrazione c si definiscono in analogia formale a quelle del vettore posizione \boldsymbol{x} . Quindi, si definisce

$$p(c|\boldsymbol{x}, t)dc$$

la probabilità (adimensionale) che nel punto \boldsymbol{x} , al tempo t ci sia una concentrazione di soluto compresa in $[c, c + dc]$;

- **Media di c :**

$$C(\boldsymbol{x}, t) \equiv \langle c(\boldsymbol{x}, t) \rangle = \int_0^\infty cp(c|\boldsymbol{x}, t)dc;$$

Nota: in generale $C = C(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}, t_0, t)$ ma per **turbolenza stazionaria** e **omogenea** risulta:

$$\frac{\partial C}{\partial t_0} = 0, \quad \nabla_{\boldsymbol{X}} C = 0$$

da cui la posizione $t_0 = 0$ e $\boldsymbol{X} = 0$.

Nel seguito si farà ampio uso della media cosiddetta **decomposizione di Reynolds**:

$$\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{v} \rangle + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}', \quad p = \langle p \rangle + p' = P + p' \quad (5.7)$$

dove \boldsymbol{v}', p' sono gli scarti dai valori medi \boldsymbol{V}, P che, per definizione hanno media nulla: $\langle \boldsymbol{v}' \rangle = 0, \quad \langle p' \rangle = 0.$ (5.8)

Questo può essere dimostrato una volta introdotte le proprietà dell'operatore 'media di insieme' $\langle \cdot \rangle$:

$$1. \langle\langle a \rangle\rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n \right) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M A = A \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M}{M} = \langle a \rangle$$

$$2. \langle a + \lambda b \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (a_n + \lambda b_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n + \lambda \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N b_n = \langle a \rangle + \lambda \langle b \rangle$$

Da cui, applicando l'operatore $\langle \cdot \rangle$ alla (5.7):

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{V} + \mathbf{v}' \rangle \stackrel{(5.9)}{=} \mathbf{V} + \langle \mathbf{v}' \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}' \rangle \implies \langle \mathbf{v}' \rangle = 0$$

e, analogamente, per $\langle p' \rangle = 0$;

$$3. \langle ab \rangle = \langle (\langle a \rangle + a') (\langle b \rangle + b') \rangle = \langle \langle a \rangle \langle b \rangle \rangle + \langle \langle a \rangle b' \rangle + \langle a' \langle b \rangle \rangle + \langle a' b' \rangle =$$

$$= \langle a \rangle \langle b \rangle + \langle a \rangle \langle b' \rangle + \langle a' \rangle \langle b \rangle + \langle a' b' \rangle = \langle a \rangle \langle b \rangle + \langle a' b' \rangle$$

$$4. \left\langle \frac{\partial a}{\partial x} \right\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\partial a_n}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n \right) = \frac{\partial \langle a \rangle}{\partial x}. \quad (5.9)$$

5.4 Le equazioni dei moti turbolenti

Si ricordano le equazioni del problema del moto turbolento.

5.4.1 L'equazione di continuità $\rho = \text{cost.}$

$$\boxed{\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0} \quad \text{e anche} \quad \boxed{\frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = 0}. \quad (5.10)$$

5.4.2 L'equazione della q.d.m. (N-S \implies Reynolds)

Si ottiene applicando all'equazione di N-S prima la decomposizione di Reynolds e, quindi, l'operazione di media:

$$\boxed{\rho \frac{dV_i}{dt} = \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2} - \underbrace{\frac{\partial (\rho \langle v'_i v'_j \rangle)}{\partial x_j}}_{\text{(EXTRA!)}}}. \quad (5.11)$$

Essa è molto simile all'equazione di N-S, applicata al moto medio (V_i, P) invece che a quello locale e istantaneo (v_i, p_i) , a parte la presenza del termine extra.

Il termine extra complica molto la soluzione del problema del moto perchè ora le 4 equazioni scalari (continuità+3N-S) non sono sufficienti a descrivere le 10 incognite $(\underbrace{V_i}_{(3)}, \underbrace{P}_{(1)}, \underbrace{\rho \langle v'_i v'_j \rangle}_{(6)})$ \implies il problema è insolubile.

È possibile ottenere una soluzione solo aggiungendo altre equazioni che descrivano l'evoluzione dei termini extra \implies

Problema di chiusura.

5.4.3 L'equazione di trasporto dell'energia cinetica turbolenta

Si ottiene moltiplicando scalarmente per \mathbf{v}' l'equazione di Reynolds, mediando, dividendo per $\rho = \text{cost.}$ e ricordando la definizione $k \equiv \frac{1}{2} \langle (v')^2 \rangle$:

$$\boxed{\frac{dk}{dt} = \underbrace{-\langle v'_i v'_j \rangle \frac{\partial V_i}{\partial x_j}}_{(I)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\langle \frac{v'_j v_i'^2}{2} \rangle + \langle \frac{v'_j p'}{\rho} \rangle \right]}_{(II)} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2}}_{(III)} - \underbrace{\nu \left\langle \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle}_{(IV)}}_{(0)} \quad (5.12)$$

la quale afferma che la variazione di k seguendo le particelle fluide (0) è dovuta a:

(I) = trasferimento di energia dal moto medio a quello turbolento, rappresenta un contributo di produzione di k ;

(II) = ridistribuzione di k all'interno di un volume fluido perchè il termine è espresso quale divergenza di un tensore;

(III) = diffusione viscosa di k ;

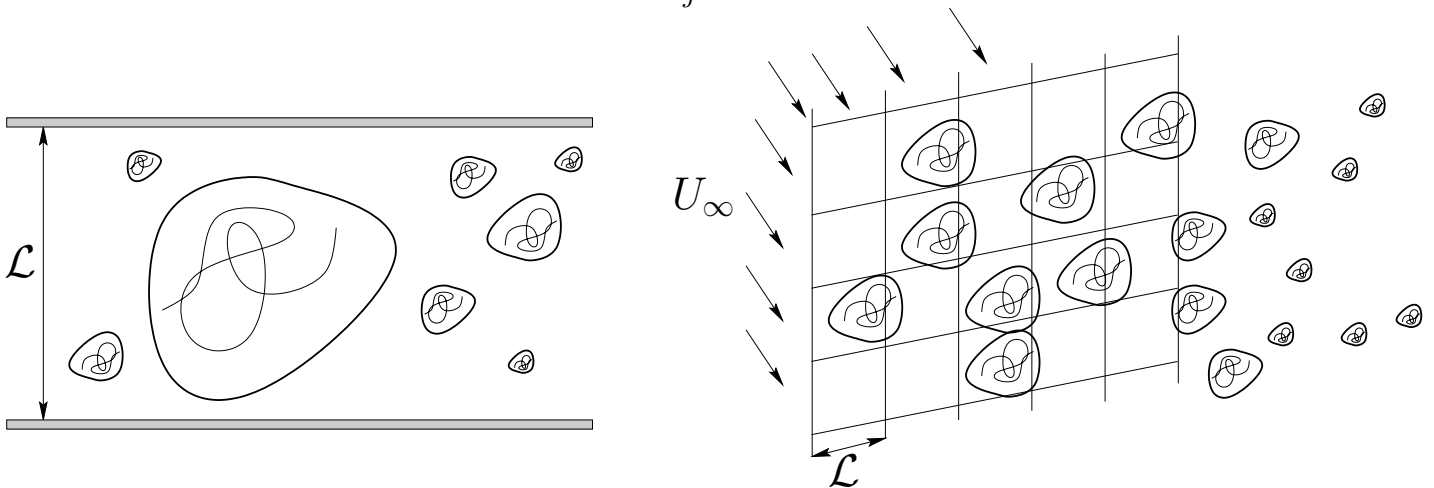
(IV) = dissipazione viscosa di k (il termine è sempre negativo). Questo contributo viene solitamente definito come

$$\varepsilon \equiv \nu \left\langle \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle.$$

5.4.4 Cenni sulla ‘cascata energetica’ nei moti turbolenti

Si è già detto che i moti turbolenti sono caratterizzati da **vortici turbolenti o strutture** a scale spaziali/temporali molto diverse. Questi hanno anche un ruolo diversificato dal punto di vista energetico. Molto qualitativamente:

(i) i vortici di dimensioni maggiori (‘scala integrale del moto’ \mathcal{L}) permettono lo scambio di energia tra il moto medio e la turbolenza [si veda $\langle v'_i v'_j \rangle \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$ in (5.12)];

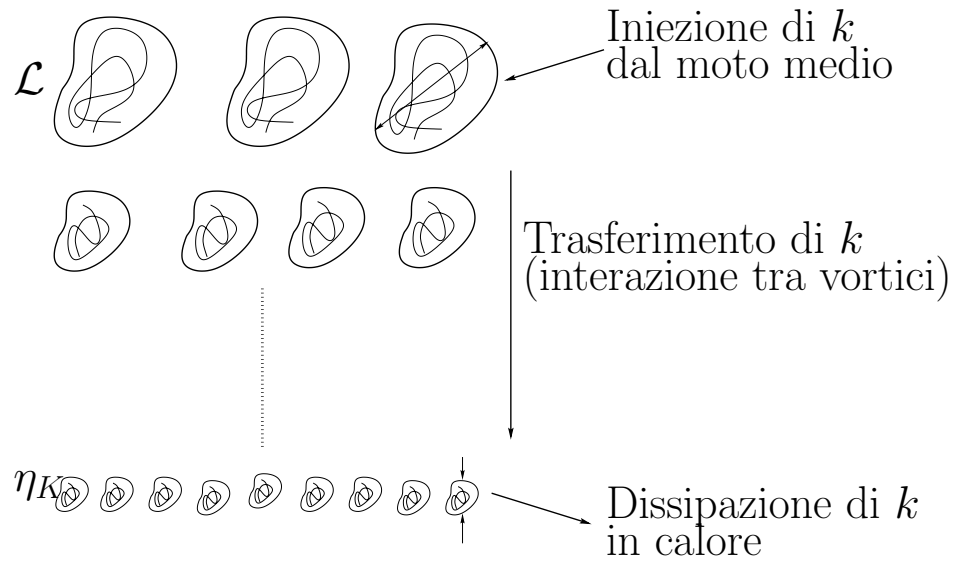


(ii) i vortici alle scale minori sono molto influenzati dalle azioni viscosse. A tale scala, detta ‘scala di Kolmogorov’ η_K si ha trasformazione di energia cinetica in calore cioè una dissipazione di k in favore di energia termica.

Sempre in maniera qualitativa è possibile affermare che:

- la gran parte di (I) è dovuta ai vortici a scala integrale \mathcal{L} ;
- la gran parte di (II) è dovuta ai vortici di scala intermedia;
- la gran parte di (III) , (IV) è dovuta ai vortici di scala η_K .

Cioè l'energia estratta dai macrovortici (I) viene trasferita dai vortici a scala intermedia (II) per essere dissipata dai microvortici $(IV) \implies$ **cascata energetica**.



Da quanto detto η_K deve dipendere dalla viscosità cinematica ν e dalla velocità di dissipazione dell'energia cinetica per unità di massa ε cioè:

$$\eta_K = \eta_K(\nu, \varepsilon) \quad \text{con} \quad \varepsilon \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{\mathcal{M}} \right) \implies [\varepsilon] = \left[\frac{d}{dt} (v_i)^2 \right] = L^2 T^{-3}$$

ed, essendo $[\nu] = L^2 T^{-1}$, si hanno le seguenti scale di lunghezza η_K , di tempo τ_K e di velocità $\eta_K \tau_K^{-1}$ (scale di Kolmogorov):

$$\eta_K = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad \tau_K = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \eta_K \tau_K^{-1} = (\nu \varepsilon)^{\frac{1}{4}} \quad (5.13)$$

Una descrizione più quantitativa dei meccanismi coinvolti nella cascata energetica si può ottenere considerando **turbolenza omogenea** cioè per cui $\frac{\partial \langle a'b' \rangle}{\partial x_i} = 0, \forall a', b'$.

In tal caso risulta

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle \frac{1}{2} v_j' v_i'^2 \right\rangle = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\langle v_j' p' \rangle}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2} = 0$$

e quindi la (5.12) si semplifica e diventa:

$$\boxed{\frac{\partial k}{\partial t} = \underbrace{-\rho \langle v_i' v_j' \rangle \frac{\partial V_i}{\partial x_j}}_{(I) \text{ Produzione}} - \underbrace{\mu \left\langle \left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle}_{(IV) \text{ Dissipazione}}} \quad (5.14)$$

[derivando in x_k si può anche dimostrare che $\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) = 0 \implies$ gradienti di velocità uniformi].

Ipotizzando, inoltre, una soluzione del tipo

$$\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\lambda}_n, t) e^{i \boldsymbol{\lambda}_n \cdot \mathbf{x}}, \quad |\boldsymbol{\lambda}_n| = \frac{2\pi}{L_n}$$

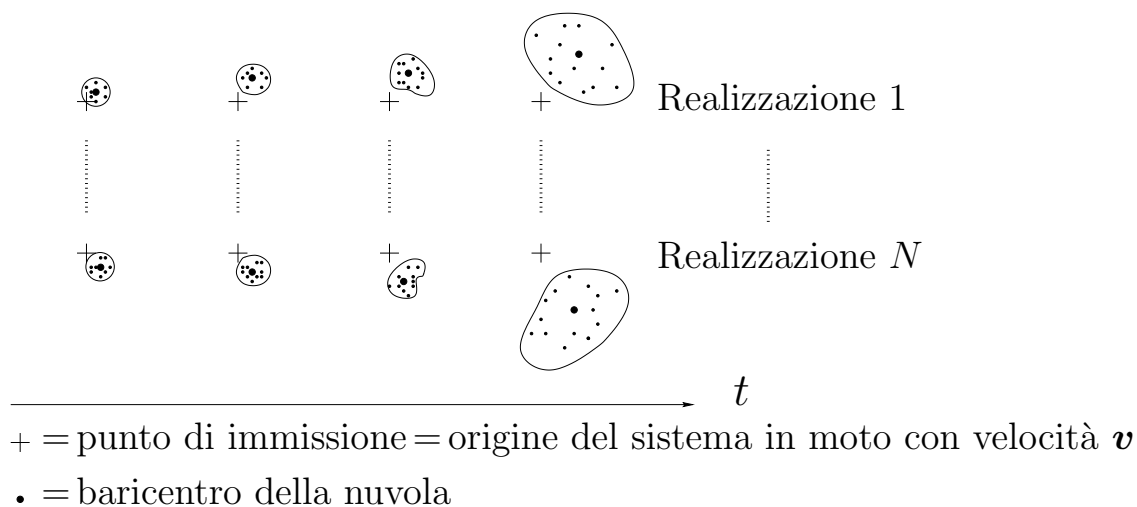
si può mostrare, per esempio, che il termine dissipativo (IV) di (5.12) è proporzionale a $|\boldsymbol{\lambda}_n|^2$ cioè all'inverso della dimensione dei vortici. Questo mostra, ovviamente, che (IV) è massimo alle scale più piccole η_K .

[Dimostrare per esercizio].

6 LA DIFFUSIONE TURBOLENTA: LE NUVOLE DI TRACCIANTE

A questo punto si considera l'evoluzione di una **nuvola di tracciante/soluto** immessa in un punto spaziale di una regione interessata da moto turbolento.

Si studia tale evoluzione usando un sistema di riferimento in moto con la velocità media \mathbf{v} (costante in \mathbf{x} e t) del fluido. Ipotizzando, inoltre, un processo caratterizzato da **turbolenza omogenea** (statistiche esplicitamente indipendenti da traslazioni in \mathbf{x}) e **stazionaria** (statistiche indipendenti da traslazioni in t) si realizzano N eventi del processo di evoluzione:



Su ognuna delle N diverse configurazioni spaziali della nuvola la turbolenza agisce in modo che:

- la microturbolenza induce delle distorsioni della nuvola \implies diversa forma delle nuvole;
- la macroturbolenza, dovuta ai vortici più grandi della nu-

vola stessa, trasporta convettivamente la nuvola
 \implies diverso moto dei baricentri.

È, quindi, possibile utilizzare 2 diversi processi di media:

- (i) **La media di insieme:** in ogni punto spaziale e a t fissato si mediano le caratteristiche delle nuvole di ogni realizzazione \implies **Nuvola Media**
- (ii) **La media con sovrapposizione dei baricentri:** a t prefissato si sovrappongono i baricentri delle N nuvole (1 per ogni realizzazione) e, quindi, si effettua la media di insieme \implies **Media delle Nuvole.**

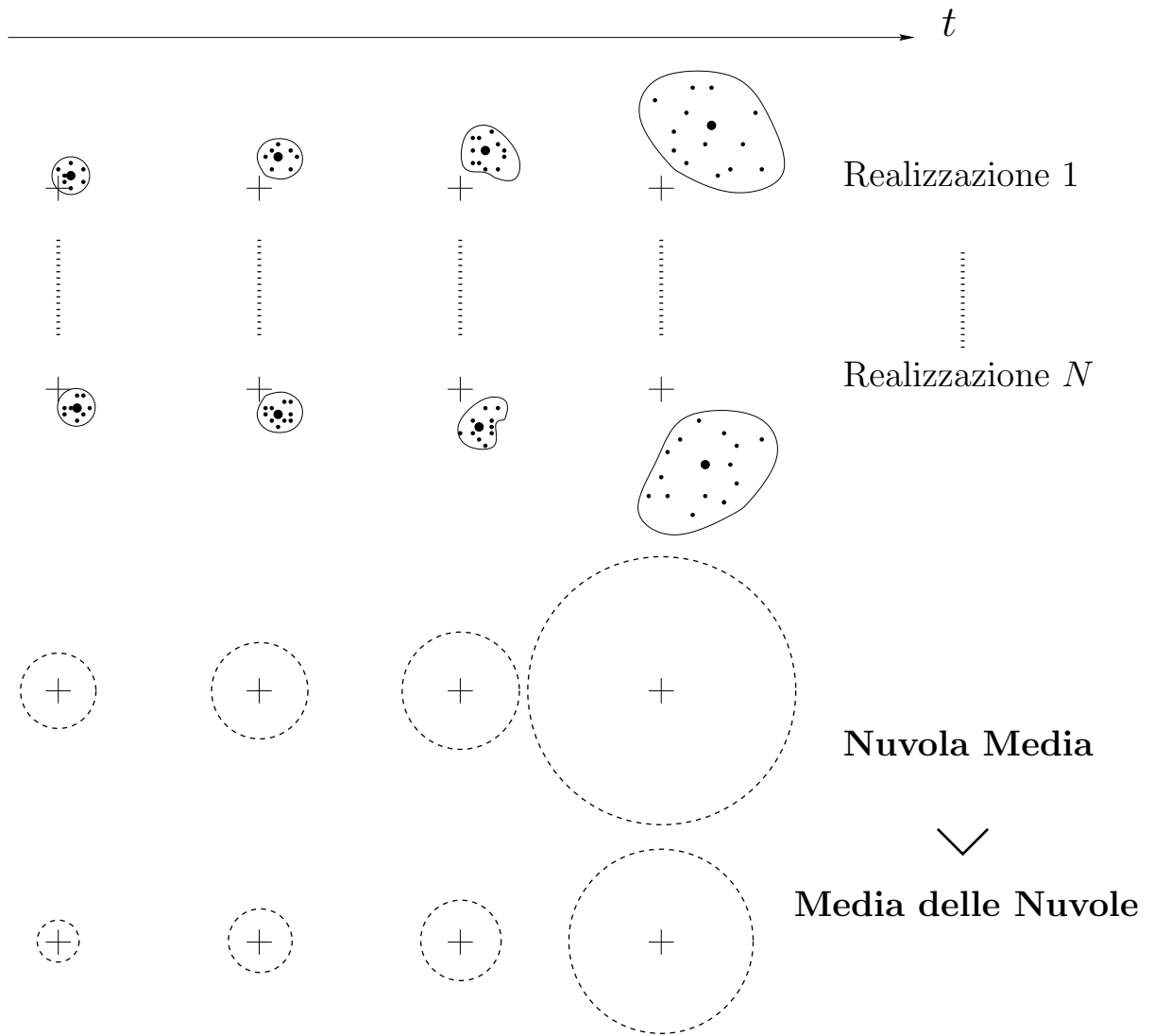
Nota: La **Media delle Nuvole** ha dimensione paragonabile a quella delle nuvole di ogni singola realizzazione!

6.1 Caratterizzazione della Nuvola Media e della Media delle Nuvole

Proprietà statistiche della nuvola per singola realizzazione

- **Massa:**
$$\mathcal{M} \equiv \iiint_{-\infty}^{\infty} c(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2 dx_3;$$
- **Baricentro:**
$$\bar{x}_i \equiv \frac{1}{\mathcal{M}} \iiint_{-\infty}^{\infty} x_i c(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2 dx_3;$$
- **Varianza:**
$$\sigma_{x_i}^2 \equiv \frac{1}{\mathcal{M}} \iiint_{-\infty}^{\infty} (x_i - \bar{x}_i)^2 c(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2 dx_3.$$

(6.1)



Proprietà statistiche dell'insieme delle nuvole

- **Baricentro della Nuvola Media:**

$$\langle \bar{x}_i \rangle \equiv \frac{1}{\mathcal{M}} \iiint_{-\infty}^{\infty} x_i C(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2 dx_3; \quad (6.2)$$

- **Varianza della Nuvola Media:**

$$\Sigma_{x_i}^2 \equiv \frac{1}{\mathcal{M}} \iiint_{-\infty}^{\infty} (x_i - \langle \bar{x}_i \rangle)^2 C(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (6.3)$$

Applicando l'operatore $\langle \cdot \rangle$ ($= \int_0^\infty \cdot p(c|\mathbf{x}, t) dc$) a $\sigma_{x_i}^2$ si ottiene una relazione tra la media delle varianze delle nuvole $\langle \sigma_{x_i}^2 \rangle$

e la varianza della Nuvola Media $\Sigma_{x_i}^2$. Infatti si può dimostrare che:

$$\underbrace{\Sigma_{x_i}^2}_{\text{(var. Nuvola Media)}} = \underbrace{\langle \sigma_{x_i}^2 \rangle}_{\text{(media var. singole nuvole)}} + \underbrace{\langle (\bar{x}_i - \langle \bar{x}_i \rangle)^2 \rangle}_{\text{(Scarto baricentri singole nuvole rispetto Nuvola Media)}} \quad (6.4)$$

È, quindi, possibile definire la:

- **dimensione caratteristica $l(t)$ di ogni singola nuvola**

$$l(t) \equiv \left[\frac{1}{3} (\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \sigma_{x_3}^2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.5)$$

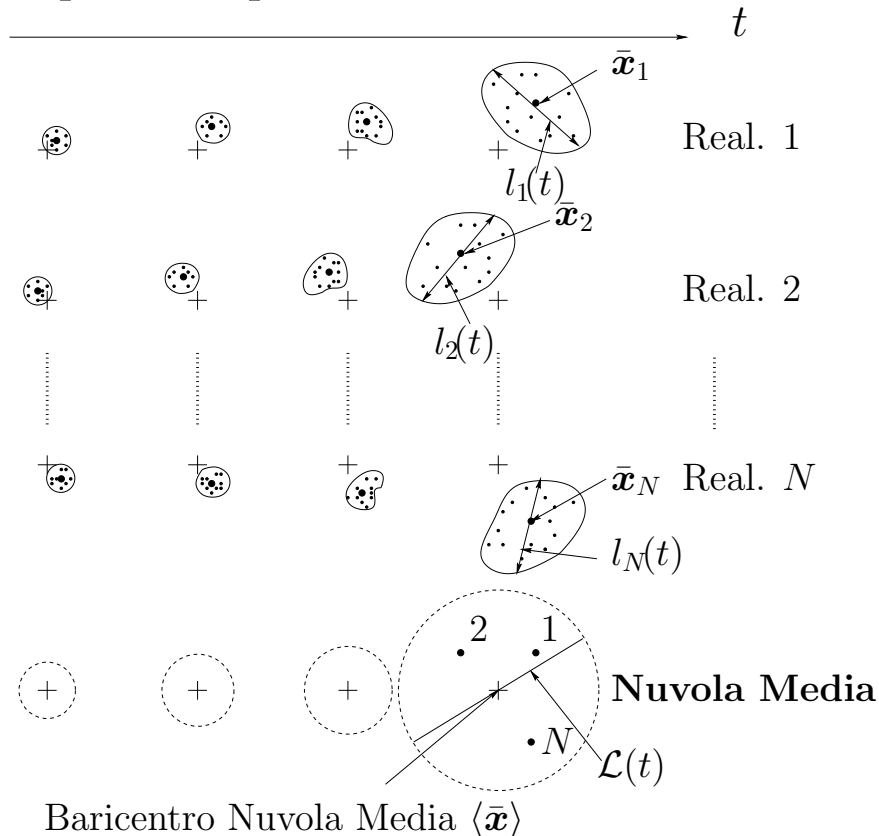
- **dimensione caratteristica $\mathcal{L}(t)$ della Nuvola Media**

$$\mathcal{L}(t) \equiv \left[\frac{1}{3} (\Sigma_{x_1}^2 + \Sigma_{x_2}^2 + \Sigma_{x_3}^2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.6)$$

da cui, facendo uso della (6.4):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(t) &\equiv \frac{1}{3} (\Sigma_{x_1}^2 + \Sigma_{x_2}^2 + \Sigma_{x_3}^2) = \frac{1}{3} (\langle \sigma_{x_1}^2 \rangle + \langle \sigma_{x_2}^2 \rangle + \langle \sigma_{x_3}^2 \rangle) + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \langle (\bar{x}_i - \langle \bar{x}_i \rangle)^2 \rangle \\ &= \langle l^2(t) \rangle + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \underbrace{\langle (x_i - \langle \bar{x}_i \rangle)^2 \rangle}_{(> 0)}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Questa esprime formalmente il fatto che la dimensione della Nuvola Media è maggiore della media delle dimensioni delle singole nuvole a causa dello scostamento dei baricentri delle singole nuvole rispetto a quello della Nuvola Media.



7 LA ‘TEORIA DI TAYLOR’ SULLA DIFFUSIONE TURBOLENTA

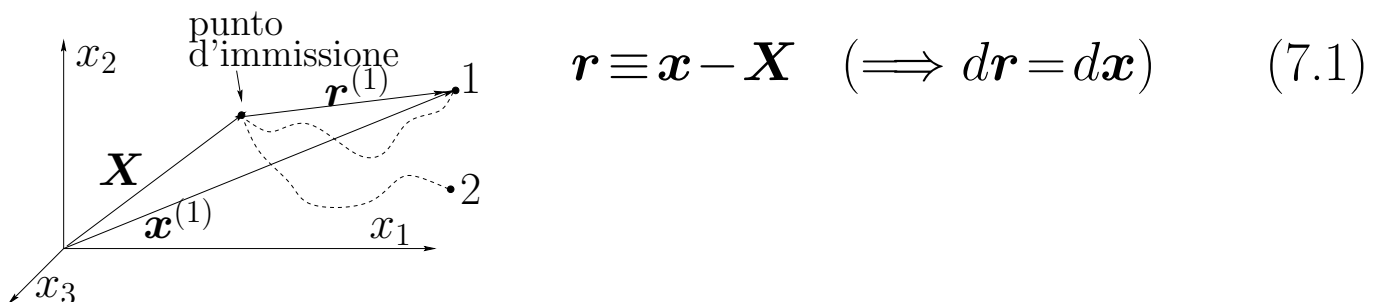
Ha come finalità principale determinare, tramite opportune ipotesi, le proprietà di $\mathcal{L}(t)$.

Dopo aver studiato separatamente le proprietà (cinematiche) delle particelle fluide e quelle (dinamiche) delle nuvole di traccianti si studia il trasporto di massa che genera le nuvole tramite l’analisi delle proprietà di particelle cariche di soluto.

Si considera l’immissione all’istante t_0 nel punto \mathbf{X} di N particelle fluide ognuna con massa m di soluto.

\implies la massa totale di soluto immessa è $\mathcal{M} = Nm$.

Si definisce il vettore spostamento \mathbf{r} tale che:



$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (\implies d\mathbf{r} = d\mathbf{x}) \quad (7.1)$$

Trascurando la diffusione molecolare (molto minore di quella turbolenta) la massa m di soluto associata ad ogni particella rimane con essa durante il moto. In \mathbf{x} la $C(\mathbf{x}, t)$ cambia perchè:

- cambia la massa totale \mathcal{M} al punto di immissione;
 - cambia in \mathbf{x} il numero di particelle che, ciascuna, porta m .
- Cioè $C(\mathbf{x}, t)$ è proporzionale tramite \mathcal{M} alla probabilità che ogni particella partita da \mathbf{X} a t_0 sia in \mathbf{x} a t cioè che abbia subito uno spostamento \mathbf{r} : $C(\mathbf{x}, t) = \mathcal{M}p(\mathbf{r}|\mathbf{X}, t_0, t)$. (7.2)

In queste condizioni è possibile legare la media, nel senso di (5.3) e quindi puramente cinematica, di \mathbf{r} alla definizione di $\langle \bar{x}_i \rangle$ [si veda (6.2)] che contiene informazioni su C (dinamiche).

Per fare ciò è necessario il seguente risultato ($dx_i = dr_i$).

Sia $p(\mathbf{r}|\mathbf{X}, t_0, t) = p(r_1, r_2, r_3|\mathbf{X}, t_0, t)$ la probabilità condizionata che $r_1 \in [r_1, r_1 + dr_1]$ e $r_2 \in [r_2, r_2 + dr_2]$ e $r_3 \in [r_3, r_3 + dr_3]$. Allora la probabilità che $\mathbf{r} \in [r_i, r_i + dr_i] \times (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$ è

$$\int_{r_i}^{r_i + dr_i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(s, r_j, r_k|\mathbf{X}, t_0, t) ds dr_j dr_k \equiv \int_{r_i}^{r_i + dr_i} p(r_i|\mathbf{X}, t_0, t) dr_i, \quad i \neq j \neq k$$

ossia

$$p(r_i|\mathbf{X}, t_0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{r}|\mathbf{X}, t_0, t) dr_j dr_k, \quad i \neq j \neq k. \quad (7.3)$$

Da cui è possibile legare la media cinematica di \mathbf{r}

$$\langle r_i \rangle \equiv_{(5.3)} \int_{-\infty}^{\infty} r_i p(r_i|\mathbf{X}, t_0, t) dr_i = \iiint_{-\infty}^{\infty} r_i p(\mathbf{r}|\mathbf{X}, t_0, t) dr_1 dr_2 dr_3 \quad (7.4)$$

alla definizione dinamica (6.2) di $\langle \bar{x}_i \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \bar{x}_i \rangle &\equiv \frac{1}{\mathcal{M}} \iiint_{-\infty}^{\infty} x_i C dx_1 dx_2 dx_3 \stackrel{(7.2)}{=} \iiint_{-\infty}^{\infty} x_i p(r_i|\mathbf{X}, t_0, t) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &\stackrel{(7.1)}{=} \iiint_{-\infty}^{\infty} r_i p(r_i|\mathbf{X}, t_0, t) dr_1 dr_2 dr_3 + X_i = \langle r_i \rangle + X_i. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Quindi, essendo

$$r'_i \equiv r_i - \langle r_i \rangle \stackrel{(7.1)-(7.5)}{=} (x_i - X_i) - (\langle \bar{x}_i \rangle - X_i) = x_i - \langle \bar{x}_i \rangle \text{ con } \langle r'_i \rangle = 0$$

segue dalla definizione (6.3) di varianza della Nuvola Media che:

$$\Sigma_{x_i}^2 = \frac{1}{\mathcal{M}} \iiint_{-\infty}^{\infty} r_i'^2 C(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \stackrel{(7.2)}{=} \iiint_{-\infty}^{\infty} r_i'^2 p(\mathbf{r}|\mathbf{X}, t_0, t) d\mathbf{r} \quad (7.6)$$

per cui la dimensione $\mathcal{L}^2(t)$ della Nuvola Media è [si veda la definizione (6.6)]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(t) &= \frac{1}{3} \iiint_{-\infty}^{\infty} (r_1'^2 + r_2'^2 + r_3'^2) p(\mathbf{r}|\mathbf{X}, t_0, t) d\mathbf{r} \stackrel{(7.3)}{=} \\ &= \frac{1}{3} \left[\int_{-\infty}^{\infty} r_1'^2 p(r_1|\mathbf{X}, t_0, t) dr_1 + \int_{-\infty}^{\infty} r_2'^2 p(r_2|\mathbf{X}, t_0, t) dr_2 \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} r_3'^2 p(r_3|\mathbf{X}, t_0, t) dr_3 \right] \stackrel{(5.4)}{=} \frac{1}{3} \langle r_1'^2 + r_2'^2 + r_3'^2 \rangle. \quad (7.7) \end{aligned}$$

Questo risultato, valido se tutte le particelle sono immesse in \mathbf{X} , può essere generalizzato al caso di una distribuzione iniziale di $C(\mathbf{x}, t_0)$ cioè da una nuvola iniziale di volume V_0 . Infatti immaginando di sovrapporre tante sorgenti puntuali poste in $\mathbf{X} \in V_0$ la (7.2) può essere scritta (sovrapposizione degli effetti): $C(\mathbf{x}, t) = \int_{V_0} C(\mathbf{X}, t_0) p(\mathbf{r}|\mathbf{X}, t_0, t) d\mathbf{X}$.

Quindi sostituendo nella (7.6), invertendo l'ordine di integrazione e cambiando opportunamente l'origine del dominio di integrazione si ottiene:

$$\Sigma_{x_i}^2(t) = \frac{1}{\mathcal{M}} \iiint_{-\infty}^{\infty} r_i'^2 \left[\int_{V_0} C(\mathbf{X}, t_0) p(\mathbf{r}|\mathbf{X}, t_0, t) d\mathbf{X} \right] d\mathbf{x} = \langle r_i'^2 \rangle + \Sigma_{X_i}^2(t_0) \quad (7.8)$$

che permette, in congiunzione alla definizione (6.6), di determinare $\mathcal{L}^2(t)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^2(t) &\equiv \frac{1}{3} (\Sigma_{x_1}^2(t) + \Sigma_{x_2}^2(t) + \Sigma_{x_3}^2(t)) = \\ &= \frac{1}{3} (\Sigma_{X_1}^2(t_0) + \Sigma_{X_2}^2(t_0) + \Sigma_{X_3}^2(t_0)) + \frac{1}{3} \langle r_1'^2 + r_2'^2 + r_3'^2 \rangle = \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{= \mathcal{L}^2(t_0)} \\ &= \mathcal{L}^2(t_0) + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \langle r_i'^2 \rangle.\end{aligned}\tag{7.9}$$

Quindi la dimensione della nuvola media al tempo t dipende dalla sua dimensione iniziale $\mathcal{L}(t_0)$ e della media degli scostamenti quadratici delle particelle.

In qualsiasi caso [(7.7)-(7.9)] è necessario calcolare la quantità $\langle r_i'^2 \rangle$.

Questo può essere fatto analiticamente solo nel caso di **turbolenza omogenea e stazionaria** per cui

$$\langle \mathbf{v}(t; \mathbf{X}, t_0) \rangle = \text{cost.}$$

Inoltre, usando un riferimento in moto con velocità $\langle \mathbf{v} \rangle = \text{cost.}$ risulta:

$$\langle \mathbf{v}(t; \mathbf{X}, t_0) \rangle = 0\tag{7.10}$$

che permette di trascurare gli effetti convettivi ed evidenziare quelli dovuti alla diffusione turbolenta.

Con queste ipotesi il vettore \mathbf{r}' è:

$$r_i'(t) = \int_0^{\tau} v_i'(s; \mathbf{X}, t_0) ds \quad \text{con } \tau \equiv t - t_0 \text{ e } t_0 = \text{tempo inizio osservazione}\tag{7.11}$$

dove, per la (7.10), gli scarti di velocità valgono:

$$v'_i(\tau; \mathbf{X}, t_0) \equiv v_i(\tau; \mathbf{X}, t_0) - \langle v_i \rangle(\tau; \mathbf{X}, t_0) = v_i(\tau; \mathbf{X}, t_0).$$

È ora possibile definire il **tensore di cross-correlazione degli spostamenti** $S_{ij}(t)$ [si veda (5.6)] e il **tensore di correlazione lagrangiana delle velocità** \hat{R}_{ij}^L relativi al moto di una singola particella.

Il primo è semplicemente

$$S_{ij}(t) \equiv \langle r'_i r'_j \rangle(t) \stackrel{(7.11)}{=} \left\langle \int_0^\tau v'_i(s_1) ds_1 \int_0^\tau v'_j(s_2) ds_2 \right\rangle = \int_0^\tau \int_0^\tau \underbrace{\langle v'_i(s_1) v'_j(s_2) \rangle}_{=\hat{R}_{ij}^L} ds_1 ds_2 \quad (7.12)$$

dove in S_{ij} la media è effettuata allo stesso tempo t mentre in \hat{R}_{ij}^L componenti (i, j) e istanti (s_1, s_2) possono essere diversi.

Nell'ipotesi di **turbolenza stazionaria** la media non dipende dall'origine dei tempi ma solo dalla differenza $(\tau_2 - \tau_1)$.

Quindi si definisce:

$$R_{ij}^L(\tau_2 - \tau_1) \equiv \frac{\overbrace{\langle v'_i(\tau_1; \mathbf{X}, t_0) v'_j(\tau_2; \mathbf{X}, t_0) \rangle}^{=\hat{R}_{ij}^L}}{\left[\langle v_i'^2(\mathbf{X}, t_0) \rangle \langle v_j'^2(\mathbf{X}, t_0) \rangle \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (7.13)$$

cioè la **funzione di correlazione lagrangiana normalizzata** nota anche come **coefficiente di correlazione**.

Sostituendo la (7.13) nella (7.12) si ottiene, utilizzando un'opportuna trasformazione di variabili:

$$S_{ij}(t) \equiv \langle r'_i r'_j \rangle(t) = \underbrace{\left[\langle v_i'^2(\mathbf{X}, t_0) \rangle \langle v_j'^2(\mathbf{X}, t_0) \rangle \right]^{\frac{1}{2}}}_{(=\text{cost.})} \int_0^\tau (\tau - s) [R_{ij}^L(s) + R_{ji}^L(s)] ds. \quad (7.14)$$

Si analizzano 2 limiti asintotici della (7.14) nell'ipotesi semplificativa che $i = j = 1$:

(i) 'Tempi piccoli' dopo il rilascio ($t \rightarrow t_0$)

In questo caso la velocità della particella è molto correlata con se stessa cioè $R_{11}^L \approx 1$ e la (7.14) diventa:

$$S_{11}(t) \equiv \langle r_1'^2 \rangle \approx 2 \langle v_1'^2(t_0) \rangle \int_0^\tau (\tau - s) ds = 2 \langle v_1'^2(t_0) \rangle \left[\tau s - \frac{s^2}{2} \right]_0^\tau = \langle v_1'^2(t_0) \rangle t^2$$

cioè per 'tempi piccoli' $\langle r_1'^2 \rangle \propto t^2$; (7.15)

(ii) 'Tempi grandi' dopo il rilascio ($t \rightarrow \infty$)

In questo caso il moto è pochissimo correlato con quello iniziale cioè $R_{11}^L \approx 0$. Se però $\int_0^\infty R_{11}^L(s) ds$ e $\int_0^\infty s R_{11}^L(s) ds$ sono limitati allora esistono tali integrali e:

$$\begin{aligned} S_{11}(t) \equiv \langle r_1'^2 \rangle &= \lim_{t \rightarrow \infty} 2 \langle v_1'^2(t_0) \rangle \int_0^\tau (\tau - s) R_{11}^L ds = \\ &\approx_{(\langle v_i'^2(t_0) \rangle = \text{cost.})} 2 \langle v_1'^2(t_0) \rangle \left[\tau \int_0^\infty R_{11}^L(s) ds - \int_0^\infty s R_{11}^L(s) ds \right] \\ &= 2 \langle v_1'^2(t_0) \rangle T_{x_1}^L \tau + \text{cost.} \end{aligned} \quad (7.16)$$

dove
$$T_{x_1}^L \equiv \int_0^\infty R_{11}^L(s) ds.$$

In generale la media tra i 3 valori:

$$T_{x_i}^L \equiv \int_0^\infty R_{ii}^L(s) ds, \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.17)$$

è detta **scala temporale lagrangiana** T^L .

Nota: per $t \rightarrow \infty$ risulta $\langle r_1'^2 \rangle \propto t$ e non $\langle r_1'^2 \rangle \propto t^2$.

I regimi asintotici ($t \rightarrow t_0, \infty$) possono essere meglio definiti in funzione di T^L che rappresenta il tempo necessario affinché una particella 'perda memoria della sua velocità iniziale'.

Più in dettaglio le (7.15) e (7.16) possono essere riscritte in forma differenziale:

$$\frac{d\langle r_i'^2 \rangle}{dt} = 2\langle v_1'^2(t_0) \rangle \tau \quad \text{per } t \ll T^L \quad (7.18)$$

$$\frac{d\langle r_i'^2 \rangle}{dt} = 2\langle v_1'^2(t_0) \rangle T_{x_i}^L \quad \text{per } t \gg T^L. \quad (7.19)$$

Ricordando che la **Soluzione fondamentale** di un processo di diffusione molecolare (2.15) ha varianza σ^2 tale che

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = 2D = \text{cost.} \quad \text{cioè indipendente dal tempo}$$

si usa l'analogia tra la (2.15) e la (7.19) per:

- definire una **diffusività turbolenta** $D_{x_i}^T$ analoga alla diffusività molecolare D e tale che:

$$D_{x_i}^T \equiv \frac{1}{2} \frac{d\langle r_i'^2 \rangle}{dt} = \langle v_i'^2(t_0) \rangle T_{x_i}^L. \quad (7.20)$$

Note:

1. mentre D è funzione della coppia solvente-soluto

$$D_{x_i}^T (\propto \langle v_i'^2 \rangle) \text{ è funzione del moto;}$$

2. è evidente che $D_{x_i}^T$ non dipende da t perchè:

$$(a) T_{x_i}^L = \int_0^\infty R_{ii}^L(s) ds \text{ non dipende da } t;$$

$$(b) \langle v_i'^2 \rangle = \langle v_i'(\mathbf{X}, t_0) v_i'(\mathbf{X}, t_0) \rangle \text{ non dipende da } t;$$

- studiare la diffusione turbolenta con un'equazione simile a quella usata per studiare la diffusione molecolare [si vedano (2.3) e (4.2)] dove $D_{x_i}^T$ sostituisca la D .

Si conclude valutando la dimensione $\mathcal{L}(t)$ della Nuvola Media nei 2 regimi asintotici considerati:

(i) 'Tempi piccoli' dopo il rilascio ($t \ll T^L$)

Dalle (7.9) e (7.15), ricordando che $\tau \equiv t - t_0$:

$$\mathcal{L}^2(t) \underset{(7.9)}{=} \mathcal{L}^2(t_0) + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \langle r_i'^2 \rangle = \mathcal{L}^2(t_0) + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \langle v_i'^2(t_0) \rangle (t - t_0)^2; \quad (7.21)$$

(ii) 'Tempi grandi' dopo il rilascio ($t \gg T^L$)

Dalle (7.9) e (7.16), ricordando che $\tau \equiv t - t_0$ e considerando che per $t \rightarrow \infty$ $\langle r_i'^2 \rangle$ cresce indefinitamente con t per cui $\mathcal{L}(t_0)$ diventa trascurabile si determina:

$$\mathcal{L}^2(t) = \mathcal{L}^2(t_0) + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \langle r_i'^2 \rangle \approx \frac{2}{3} \sum_{i=1}^3 \left(\langle v_i'^2(t_0) \rangle T_{x_i}^L \right) (t - t_0); \quad (7.22)$$

Oltre alla **scala temporale lagrangiana** è possibile definire una **scala spaziale lagrangiana** L^L cioè la distanza che una particella deve percorrere per 'perdere memoria della sua velocità iniziale' come media delle:

$$L_{x_i}^L \equiv \sqrt{\langle v_i'^2 \rangle} T_{x_i}^L, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.23)$$

Quindi per 'tempi grandi' ($t \gg T^L$) o grandi distanze ($\mathcal{L} \gg L^L$) è possibile utilizzare lo **Schema diffusivo 'alla Fick'**

(si chiarirà meglio in seguito) che prevede la rappresentazione del fenomeno di diffusione turbolenta tramite un'equazione simile a quella usata per descrivere la diffusione molecolare in cui però D è sostituita da:

$$D_{x_i}^T = \langle v_i'^2 \rangle T_{x_i}^L \stackrel{(7.23)}{=} \sqrt{\langle v_i'^2 \rangle} L_{x_i}^L \quad (7.24)$$

cioè da una diffusività turbolenta prodotto di una scala di velocità $\sqrt{\langle v_i'^2 \rangle}$ per una scala di lunghezza $L_{x_i}^L$.

Per stimare l'entità di $D_{x_i}^T$ si utilizzano dei valori tipici di intensità della turbolenza e di $L_{x_i}^L$. Per esempio in un moto fluviale: $\mathcal{O}(\sqrt{\langle v_i'^2 \rangle}) = (10^{-2} - 10^{-1})m/s$, $\mathcal{O}(L_{x_i}^L) = 1m$
 $\implies \mathcal{O}(D_{x_i}^T) = 10^{-2}m^2/s \gg 10^{-9}m^2/s = \mathcal{O}(D)$.

8 L'EQUAZIONE DI CONVEZIONE - DIFFUSIONE TURBOLENTA

L'analisi della diffusione turbolenta ha evidenziato 2 diversi regimi funzione della dimensione della nuvola di tracciante (l - \mathcal{L}) rispetto alla dimensione della macroturbolenza (scala lagrangiana L^L). Quest'ultima è la dimensione della macroturbolenza ed è paragonabile alla dimensione della regione di moto (profondità di fiumi, laghi, mari,...).

Si tratta ora di individuare le metodologie pratiche più opportune per descrivere il processo di convezione-diffusione nei 2 suddetti regimi.

8.1 'Tempi grandi' dopo il rilascio (ovvero $\mathcal{L} > L^L$)

In questo caso la microturbolenza (isotropa) non influisce sul mescolamento quanto la macroturbolenza (anisotropa).

Quest'ultima trasporta convettivamente la nuvola \implies diverso moto dei baricentri delle nuvole \implies si usa la media di insieme e si studia l'evoluzione della Nuvola Media.

Poichè la (7.19) suggerisce l'uso di una diffusività turbolenta costante, ovvero indipendente da t , si valuta come poterla utilizzare in un'equazione di convezione-diffusione tipo:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = D \nabla^2 c \quad \text{ovvero} \quad (\nabla \cdot \mathbf{v} = 0) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\mathbf{v}) = D \nabla^2 c. \quad (8.1)$$

Per determinare la forma applicativa dello **'schema diffusivo alla Fick'** si opera come segue:

- si definisce la seguente 'decomposizione di Reynolds':

$$c \equiv \langle c \rangle + c' = C + c' \quad \text{dove} \quad \langle c' \rangle = 0 \quad (8.2)$$

$$v_j \equiv \langle v_j \rangle + v'_j = V_j + v'_j \quad \text{dove} \quad \langle v'_j \rangle = 0 \quad (8.3)$$

e si osserva che la correlazione $\langle cv_j \rangle$ diventa:

$$\langle cv_j \rangle = \langle \langle (C + c') (V_j + v'_j) \rangle \rangle = CV_j + \langle c' v'_j \rangle;$$

- si media la (8.1) che diventa:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial (CV_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j^T}{\partial x_j} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x_j^2} \quad \text{dove} \quad q_j^T \equiv \langle c' v'_j \rangle = \langle (c - C)(v_j - V_j) \rangle \quad (8.4)$$

è la j-esima componente del **flusso turbolento di c**;

- si definisce un opportuno **legame costitutivo per q_j^T** .

Infatti la definizione $q_j^T = \langle c' v'_j \rangle$ è del tutto analoga a quella delle tensioni di Reynolds $T_{ij}^R \equiv -\rho \langle v'_i v'_j \rangle$.

Come l'equazione di Reynolds non è solubile finchè non si istituisce un **legame costitutivo** tra T_{ij}^R e il moto medio (problema di chiusura), così non si può risolvere la (8.4) se non si determina un legame tra q_j^T e le variabili medie.

Per **turbolenza omogenea e stazionaria** [$V_j = 0$ per la (7.10)] tale legame si fonda sulla 'Teoria di Taylor' del Capitolo precedente che permette di istituire un legame analo-

go alla 'Legge di Fick' (1.5). In questo caso $q_j^T \propto \nabla C$ tramite una **diffusività turbolenta** indipendente da t [si vedano le (7.20)-(7.24)]:

$$\boxed{q_j^T = -D_{jk}^T \frac{\partial C}{\partial x_k} \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{q}^T = -\mathbf{D}^T \cdot \nabla C;} \quad (8.5)$$

- si sostituisce la (8.5) nella (8.4) che diventa:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(CV_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D \frac{\partial C}{\partial x_j} + D_{jk}^T \frac{\partial C}{\partial x_k} \right) \quad (8.6)$$

con $D_{jk}^T \equiv \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle r'_j r'_k \rangle = \langle v'_j v'_k \rangle T_{x_j x_k}^L = \sqrt{\langle v'_j v'_k \rangle} L_{x_j x_k}^L$ e $\frac{\partial D_{jk}^T}{\partial t} = 0$;

- si usa una rotazione per cui gli assi coordinati coincidono con gli **assi principali** del moto medio [tali che $\langle v'_j v'_k \rangle = 0$ per $j \neq k \implies D_{jk}^T = 0$] e si usa l'equazione di continuità del moto medio ($\partial V_j / \partial x_j = 0$) in modo che la (8.6) diventa:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V_j \frac{\partial C}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(D + D_{jj}^T) \frac{\partial C}{\partial x_j} \right]; \quad (8.7)$$

- si trascura la diffusione molecolare in quanto $D_{jj}^T \gg D$ per cui:

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t} + V_j \frac{\partial C}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D_{jj}^T \frac{\partial C}{\partial x_j} \right).} \quad (8.8)$$

8.2 'Tempi piccoli' dopo il rilascio (ovvero $\mathcal{L} < L^L$)

In questo caso la microturbolenza (isotropa) domina il mescolamento che avviene a scale più piccole della Nuvola Media \implies si usa la **media di insieme con sovrapposizione dei baricentri** e si studia la Media delle Nuvole.

Si definisce, quindi, una concentrazione media $\mathcal{C}(\boldsymbol{\chi}, t)$ ottenuta allineando i baricentri $\bar{\boldsymbol{x}}$ delle singole nuvole:

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\chi}, t) \equiv \langle c(\boldsymbol{\chi}, t) \rangle \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\chi} \equiv \boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}} \quad (8.9)$$

e si usa la seguente procedura per calcolare $\mathcal{C}(\boldsymbol{\chi}, t)$ a partire da $c(\boldsymbol{x}, t)$:

- si determina $c=c(\boldsymbol{\chi}, t)$ con il cambio di variabile $\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}$;
- si fanno coincidere tutti i baricentri (con l'origine);
- si effettua la media di insieme.

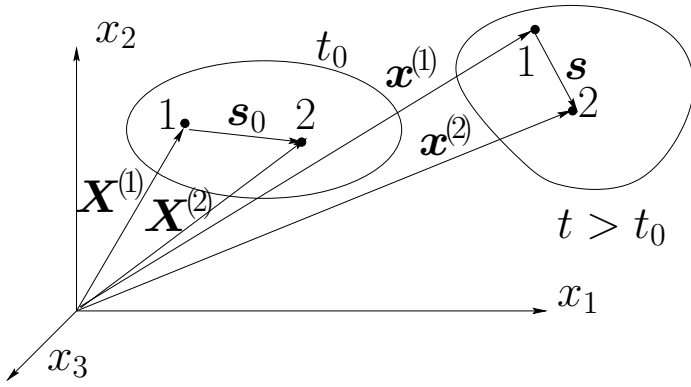
Per poter determinare un'equazione tipo (8.8) è necessario definire una diffusività turbolenta \mathbf{D}^T tramite un'equazione tipo (7.18). Bisogna però ricordare che per 'tempi piccoli':

- la diffusione turbolenta è molto influenzata dalla microturbolenza (isotropa);
- la diffusività turbolenta cresce nel tempo [si veda (7.18)], cioè al crescere della dimensione della singola nuvola $l(t)$.

\implies è necessario analizzare come il moto turbolento influisce sulla crescita di $\langle l^2(t) \rangle$ dove [si vedano le (6.1) e (6.5)]:

$$\langle l^2(t) \rangle \equiv \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \langle \sigma_{x_i}^2 \rangle, \quad \langle \sigma_{x_i}^2 \rangle \equiv \frac{1}{\mathcal{M}} \iiint_{-\infty}^{\infty} \chi_i^2 \mathcal{C}(\boldsymbol{\chi}, t) d\boldsymbol{\chi}. \quad (8.10)$$

Per fare questo si analizza il moto di una coppia di particelle '1' e '2' di posizione iniziale $\mathbf{X}^{(1)}$ e $\mathbf{X}^{(2)}$ e separazione iniziale $\mathbf{s}_0 = \mathbf{X}^{(2)} - \mathbf{X}^{(1)}$. Al generico tempo t le 2 particelle occuperanno le posizioni $\boldsymbol{x}^{(1)}$ e $\boldsymbol{x}^{(2)}$ con $\mathbf{s} = \boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{x}^{(1)}$.



Si definisce con $p(|\mathbf{s}|; s_0, t, t_0)$ la probabilità che una coppia di particelle distanti $s_0 = |\mathbf{s}_0|$ al tempo t_0 abbia distanza compresa tra s e $s+ds$ al tempo t .

Da cui discende la definizione di ‘distanza quadratica media’

$$\langle s^2 \rangle \equiv \int_0^\infty s^2 p(|\mathbf{s}| | s_0, t_0, t) ds.$$

Poichè in questo regime la separazione s è controllata dalla microturbolenza con scale caratteristiche [si veda (5.13)] dipendenti da ν e ε risulterà $\langle s^2 \rangle = f(s_0, \tau, \nu, \varepsilon)$ con $\tau \equiv t - t_0$

e applicando il ‘Teorema Π ’ con base dimensionale (τ, ε) ($[\varepsilon] = L^2 T^{-3}$) si ottiene:

$$\boxed{\frac{\langle s^2 \rangle}{\varepsilon \tau^3} = f\left(\frac{s_0}{\varepsilon^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{3}{2}}}, \frac{\nu}{\varepsilon \tau^2}\right)}. \quad (8.11)$$

Poichè la scala spaziale di Kolmogorov $\eta_K = (\nu^3/\varepsilon)^{\frac{1}{4}}$ è molto piccola (dell’ordine dei *mm* negli oceani) è possibile identificare un particolare regime di moto detto **regime intermedio** tale

che $\eta_K \ll s_0 \ll L^L$ e $\tau_K = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \ll \tau \ll T^L. \quad (8.12)$

Quindi, essendo:

- $s_0 \gg \eta_K$, la viscosità ν , che agisce solo a scale confrontabili con η_K , risulterà ininfluenza e trascurabile;
- $\tau > \tau_K$, è passato un tempo sufficientemente lungo dal rilascio che la separazione iniziale s_0 è dimenticata. [Diverso dal tempo necessario perchè una particella dimentichi la sua velocità iniziale].

la funzione f di equazione (8.11) diventa costante, per esempio C_1 , cioè:

$$f\left(\frac{s_0}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{3}{2}}}, \frac{\nu}{\varepsilon\tau^2}\right) = C_1 \implies \langle s^2 \rangle = C_1 \varepsilon \tau^3. \quad (8.13)$$

da cui, passando alle derivate temporali:

$$\frac{d\langle s^2 \rangle}{dt} = \frac{d\langle s^2 \rangle}{d\tau} = 3C_1 \varepsilon \tau^2 = \underset{\text{dalla (8.13)} \tau = \left(\frac{\langle s^2 \rangle}{C_1 \varepsilon}\right)^{1/3}}{=} 3C_1^{\frac{1}{3}} \varepsilon^{\frac{1}{3}} \langle s^2 \rangle^{\frac{2}{3}} \quad (8.14)$$

che mostra come il processo di diffusione turbolenta sia auto-alimentato perchè $\langle s^2 \rangle$ cresce in funzione di se stessa.

Nota la 'legge di crescita' (8.14) è possibile determinare la legge di crescita di $\langle \chi^2 \rangle$ e $\langle l^2 \rangle$. Infatti per tempi sufficientemente grandi [si veda (8.12)], per i quali la separazione iniziale è dimenticata ($\tau > \tau_K$), la distribuzione di $\langle s^2 \rangle$ è la stessa per tutte le coppie di particelle cioè:

$$\langle s_{(1-2)}^2 \rangle = \langle s_{(2-3)}^2 \rangle = \dots = \langle s_{(i-j)}^2 \rangle \quad \forall i, j$$

e, per l'omogeneità della turbolenza, coinciderà anche con la distribuzione di separazione $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ che una particella ha dal baricentro $\bar{\mathbf{x}}$ cioè con la distribuzione di χ^2 :

$$\langle s_{(i-j)}^2 \rangle = \langle \chi_{(i)}^2 \rangle = \langle \chi_{(j)}^2 \rangle \quad \forall i, j \implies \langle s^2 \rangle = \langle \chi^2 \rangle. \quad (8.15)$$

Inoltre, essendo per turbolenza omogenea ($\langle \boldsymbol{\chi} \rangle = 0$)

$$\begin{aligned} \langle \chi^2 \rangle &= \frac{1}{\mathcal{M}} \iiint_{-\infty}^{\infty} \chi^2 \mathcal{C}(\boldsymbol{\chi}, t) d\boldsymbol{\chi} = \frac{1}{\mathcal{M}} \iiint_{-\infty}^{\infty} (\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2) \mathcal{C}(\boldsymbol{\chi}, t) d\boldsymbol{\chi} = \\ &=_{(8.10)} \langle \sigma_{x_1}^2 \rangle + \langle \sigma_{x_2}^2 \rangle + \langle \sigma_{x_3}^2 \rangle =_{(8.10)} 3\langle l^2(t) \rangle. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Quindi la legge di crescita per $\langle l^2(t) \rangle$ si ottiene a partire dalla (8.14) e utilizzando i risultati (8.15)-(8.16):

$$\begin{aligned} \frac{d\langle s^2 \rangle}{dt} &= 3C_1^{\frac{1}{3}} \varepsilon^{\frac{1}{3}} \langle s^2 \rangle^{\frac{2}{3}} \xrightarrow{\langle s^2 \rangle = \langle \chi^2 \rangle} \frac{d\langle \chi^2 \rangle}{dt} = 3C_1^{\frac{1}{3}} \varepsilon^{\frac{1}{3}} \langle \chi^2 \rangle^{\frac{2}{3}} \\ \xrightarrow{\langle \chi^2 \rangle = 3\langle l^2 \rangle} \nearrow \frac{d\langle l^2 \rangle}{dt} &= \nearrow C_1^{\frac{1}{3}} \varepsilon^{\frac{1}{3}} (3\langle l^2 \rangle)^{\frac{2}{3}} \implies \boxed{\frac{d\langle l^2 \rangle}{dt} = C_2 \varepsilon^{\frac{1}{3}} \langle l^2 \rangle^{\frac{2}{3}}} \quad (8.17) \end{aligned}$$

dove $C_2 = 3^{\frac{2}{3}} C_1^{\frac{1}{3}}$.

Ora, in analogia a come operato per il regime di ‘tempi grandi’,

- si definisce una **diffusività turbolenta** tramite la (8.17) che è molto simile alla (7.19) in quanto esplicitamente indipendente da t . Si definisce, in analogia alla (7.20) la diffusività turbolenta scalare (per l’isotropia della microturbolenza):

$$\boxed{D^T \equiv \frac{1}{2} \frac{d\langle l^2 \rangle}{dt} \propto \langle l^2 \rangle^{\frac{2}{3}}.} \quad (8.18)$$

Questa è nota come ‘Legge di Richardson’ o ‘Legge 4/3’. Infatti Richardson la usò per stimare la diffusione di polveri vulcaniche in atmosfera. Tramite la (8.18) stimò D^T e ottenne un buon fit su un ampio intervallo ($10m \leq \langle l^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \leq 10^6m$);

- si usa tale definizione in un’equazione di diffusione per \mathcal{C} (la convezione, essenzialmente dovuta alla macroturbolenza, è trascurata) in cui l’isotropia è evidenziata dalla D^T scalare:

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \chi_1} \left(D^T \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \chi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \chi_2} \left(D^T \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \chi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \chi_3} \left(D^T \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \chi_3} \right). \quad (8.19)$$

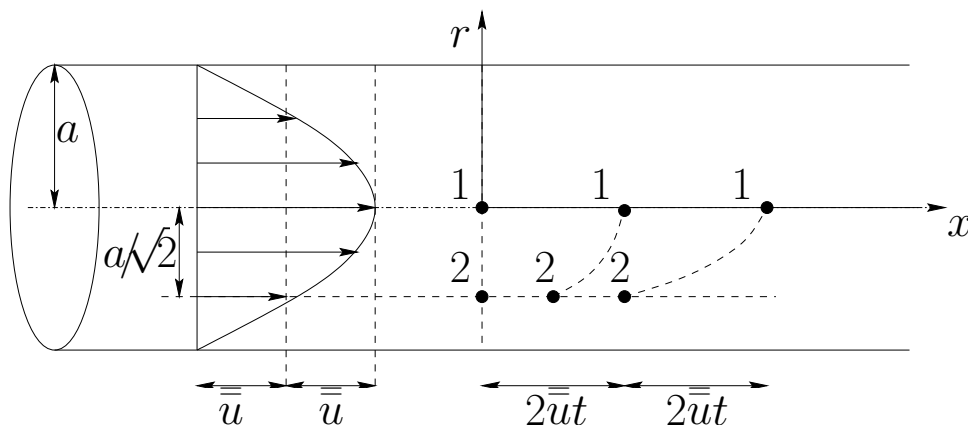
9 LA DISPERSIONE LAMINARE. LA TEORIA DI TAYLOR

La dispersione è il fenomeno di mescolamento in cui si combinano gli effetti di convezione longitudinale non-uniforme e di diffusione trasversale.

Osservazioni preliminari (Taylor):

- la non-uniformità della convezione è tale che la separazione tra 2 particelle immerse alla stessa sezione aumenti più velocemente rispetto a quella indotta dalla diffusione molecolare longitudinale. Con riferimento ad un moto laminare in un meato cilindrico di raggio a (moto di Poiseuille) risulta:

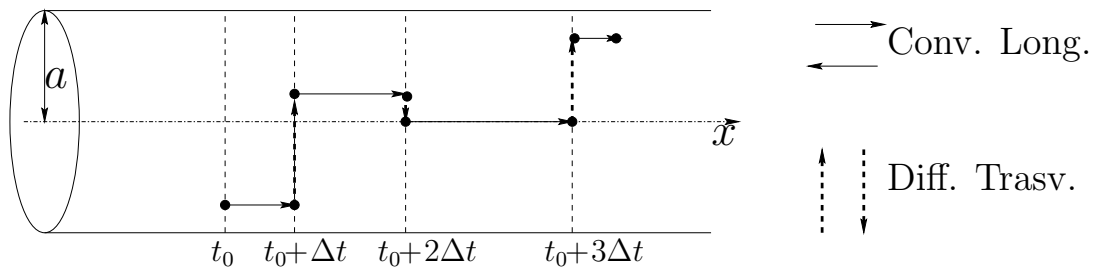
$$u(r) = 2\bar{u} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \text{ con } \bar{u} \equiv \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u d\Omega, \quad u(r=0) = 2\bar{u}, \quad u(r=a/\sqrt{2}) = \bar{u} \quad (9.1)$$



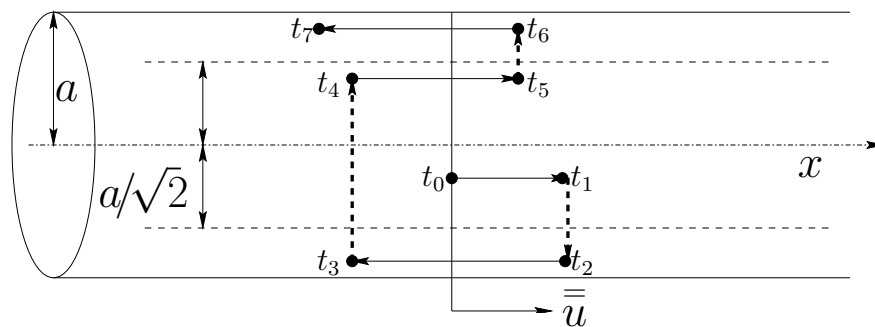
cioè la separazione cresce perchè

$$x(r, t) = u(r)t = 2\bar{u} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) t;$$

- la diffusione trasversale è tale che per tempi molto lunghi ogni particella ‘visita l’intera sezione Ω ’. \implies ‘sente’ l’azione convettiva non-uniforme presente in ogni punto.



Rispetto ad un sistema di riferimento in moto con velocità \bar{u} la particella di tracciante compie una successione di moti che possono essere avanti o indietro con eguale probabilità:



- l'effetto netto è un moto casuale detto 'random walk' (la casualità è dovuta alla diffusione) che sposta, per convezione, le particelle avanti o indietro rispetto alla sezione $x = \bar{u}t$. L'effetto è simile, ma molto più intenso, a quello della diffusione molecolare in direzione longitudinale.

\implies si ipotizza di usare un'equazione di tipo diffusivo [si veda (2.3)] con **coefficiente di dispersione** $K \gg D$ e funzione del campo di velocità;

- si stima K osservando le analogie a D_x^T cioè alla diffusività turbolenta longitudinale. Infatti sia K che D_x^T sono:
 1. molto maggiori di D ;
 2. funzioni del moto (D_x^T funzione del moto turbolento $u' = u - \langle u \rangle$; K funzione degli scarti $\tilde{u}' = u(r) - \bar{u}$).

Poichè per definizione [si veda anche (8.6)]:

$$D_x^T \equiv D_{11}^T = \langle v'_1 v'_1 \rangle T_{11}^L \approx \langle u'^2 \rangle T^L$$

per analogia si avrà:

$$K = \langle \tilde{u}'^2 \rangle T^L = \mathcal{O} \left(\begin{array}{cc} (\bar{u})^2 & \frac{a^2}{D} \\ \text{scala di } \langle \tilde{u}'^2 \rangle & \text{scala di } T^L \end{array} \right). \quad (9.2)$$

Nota: in questo caso T^L rappresenta il tempo necessario affinché una particella ‘visiti’ per diffusione l’intera sezione.

Il risultato intuitivo di (9.2) può essere ottenuto analiticamente tramite la ‘Teoria di Taylor sulla dispersione’.

9.1 La Teoria di Taylor sulla dispersione

Nell’ipotesi di moto laminare unidirezionale nel meato assial-simmetrico ($\partial/\partial\theta = 0$) di cui sopra l’equazione di convezione-diffusione (4.2) diventa:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u(r) \frac{\partial c}{\partial x} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right)$$

ed essendo noto il profilo $u(r)$ dalla (9.1) risulta:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + 2\bar{u} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \frac{\partial c}{\partial x} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right) \quad (9.3)$$

dove è ancora presente il termine di diffusione longitudinale che si mostrerà essere trascurabile.

Per semplicità si studia il processo usando un riferimento in moto con velocità \bar{u} cioè usando la trasformazione:

$$\xi = x - \bar{u}t, \quad \rho = r, \quad \tau = t \quad (9.4)$$

che comporta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{=1} \frac{\partial}{\partial \xi} + \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial x}}_{=0} \frac{\partial}{\partial \rho} + \underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial x}}_{=0} \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial r} = \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial r}}_{=0} \frac{\partial}{\partial \xi} + \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial r}}_{=1} \frac{\partial}{\partial \rho} + \underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial r}}_{=0} \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial t}}_{=-\bar{u}} \frac{\partial}{\partial \xi} + \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{=0} \frac{\partial}{\partial \rho} + \underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial t}}_{=1} \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \bar{u} \frac{\partial}{\partial \xi} \end{array} \right.$$

che sostituite nella (9.3) porgono:

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + \bar{u} \left(1 - 2 \frac{\rho^2}{a^2} \right) \frac{\partial c}{\partial \xi} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial c}{\partial \rho} \right). \quad (9.5)$$

Questa deve essere risolta con la condizione al contorno:

$$\frac{\partial c}{\partial \rho} = 0 \quad \text{per} \quad \rho = a. \quad (9.6)$$

Per semplificare l'analisi si determina l'ordine di grandezza dei termini della (9.5) utilizzando le seguenti scale:

a = Scala di lunghezza per variazioni trasversali (nota);

c^* = Scala delle variazioni di c (Δc);

λ = Scala di lunghezza per variazioni longitudinali (incognita);

τ^* = Scala di variazioni temporali (incognita).

E passando dall'equazione agli ordini di grandezza (O.d.G.):

$$\begin{array}{l} \text{Equazione} \quad \frac{\partial c}{\partial \tau} + \bar{u} \left(1 - 2 \frac{\rho^2}{a^2} \right) \frac{\partial c}{\partial \xi} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial c}{\partial \rho} \right) \\ \text{O.d.G.} \quad \frac{c^*}{\tau^*} \quad \bar{u} \frac{c^*}{\lambda} \quad D \frac{c^*}{\lambda^2} \quad D \frac{c^*}{a^2} \quad D \frac{c^*}{a^2} \end{array}$$

Si ricavano ora le scale incognite λ e τ^* imponendo che i primi 2 termini (inerziale e convettivo) abbiano stesso O.d.G. dei termini di diffusione trasversale (λ^2/a^2 volte maggiori di quelli di diffusione longitudinale):

$$\begin{cases} \frac{c^*}{\tau^*} = \frac{Dc^*}{a^2} \implies \tau^* = \frac{a^2}{D}; \\ \frac{\bar{u}c^*}{\lambda} = \frac{Dc^*}{a^2} \implies \lambda = \frac{a^2\bar{u}}{D}. \end{cases}$$

Con queste scale si definiscono le seguenti variabili adimensionali:

$$\mathcal{T} \equiv \frac{\tau}{\tau^*} = \frac{\tau D}{a^2}, \quad X \equiv \frac{\xi}{\lambda} = \frac{\xi D}{a^2\bar{u}}, \quad \eta \equiv \frac{\rho}{a} \quad (9.7)$$

con le quali la (9.5) diventa:

$$\frac{\partial c}{\partial \mathcal{T}} \frac{D}{a^2} + \bar{u} (1 - 2\eta^2) \frac{\partial c}{\partial X} \frac{D}{a^2\bar{u}} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial X^2} \frac{D^2}{a^4\bar{u}^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial c}{\partial \eta} \frac{1}{a^2} \right).$$

[Non è necessaria l'adimensionalizzazione di c perchè l'equazione di convezione-diffusione è lineare in c !]

Moltiplicando per a^2/D e introducendo il Numero di Peclet Pe tale che:

$$Pe \equiv \frac{\bar{u}a}{D} = \frac{\bar{u}a}{\nu} \frac{\nu}{D} \stackrel{(1.6)}{=} Re Sc$$

si ottiene

$$\frac{\partial c}{\partial \mathcal{T}} + (1 - 2\eta^2) \frac{\partial c}{\partial X} = \underbrace{\frac{D^2}{a^2\bar{u}^2}}_{= Pe^{-2}} \frac{\partial^2 c}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial c}{\partial \eta}.$$

Ma, essendo, $Re \gg 1$, $Sc \gg 1 \implies Pe^{-2} \ll 1$, si può trascurare il termine di diffusione longitudinale:

$$\frac{\partial c}{\partial \mathcal{T}} + (1 - 2\eta^2) \frac{\partial c}{\partial X} = \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial c}{\partial \eta}. \quad (9.8)$$

Taylor cercò una soluzione sulla base delle seguenti ipotesi:

$$c \equiv \bar{c} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial X} g(\eta) \quad \text{con} \quad \bar{c} = \bar{c}(X, \mathcal{T}) \equiv \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} c d\Omega; \quad (9.9)$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial X} \ll \bar{c} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial \mathcal{T}} \ll \frac{\partial \bar{c}}{\partial X}; \quad (9.10)$$

$$\implies \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial X^2} \ll \frac{\partial \bar{c}}{\partial X} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial X \partial \mathcal{T}} \ll \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial X^2} \ll \frac{\partial \bar{c}}{\partial X}. \quad (9.11)$$

Sostituendo la (9.9) nella (9.8) si ottiene:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \mathcal{T}} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial X \partial \mathcal{T}} g(\eta) + (1 - 2\eta^2) \left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial X} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial X^2} g(\eta) \right) = \frac{\partial \bar{c}}{\partial X} g''(\eta) + \frac{g'}{\eta} \frac{\partial \bar{c}}{\partial X}.$$

Quindi, dividendo per $\partial \bar{c} / \partial X$:

$$\frac{\frac{\partial \bar{c}}{\partial \mathcal{T}}}{\frac{\partial \bar{c}}{\partial X}} + g(\eta) \frac{\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial X \partial \mathcal{T}}}{\frac{\partial \bar{c}}{\partial X}} + (1 - 2\eta^2) \left(1 + g(\eta) \frac{\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial X^2}}{\frac{\partial \bar{c}}{\partial X}} \right) = g''(\eta) + \frac{g'(\eta)}{\eta}$$

ed utilizzando le (9.10) e (9.11):

$$g'' + \frac{g'}{\eta} = (1 - 2\eta^2). \quad (9.12)$$

Questa si integra in congiunzione alla condizione al contorno ottenuta dalla (9.6) per la specifica definizione (9.9) di c :

$$\left[\frac{\partial c}{\partial \rho} \right]_{\rho=a} = 0 \xrightarrow{(9.7)} \left[\frac{\partial c}{\partial \eta} \right]_{\eta=1} = 0 \xrightarrow{(9.9)} [g'(\eta)]_{\eta=1} = 0 \quad (9.13)$$

e alla condizione integrale

$$\int_0^1 g(\eta) \eta d\eta = 0 \quad (9.14)$$

che segue dalla definizione di \bar{c}

$$\begin{aligned}\bar{c} &\equiv \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} c d\Omega = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a c \rho d\rho d\theta \stackrel{(\partial c / \partial \theta = 0)}{=} \frac{2}{a^2} \int_0^a c \rho d\rho \\ &\stackrel{(\eta = \rho/a)}{=} 2 \int_0^1 c \eta d\eta = 2 \int_0^1 \left(\bar{c} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial X} g \right) \eta d\eta = \bar{c} + 2 \frac{\partial \bar{c}}{\partial X} \int_0^1 g \eta d\eta \\ &\implies \int_0^1 g(\eta) \eta d\eta = 0.\end{aligned}$$

Poichè il membro di sinistra della (9.12) si può scrivere come:

$$g'' + \frac{g'}{\eta} = \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} (\eta g')$$

la (9.12) diventa: $\frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} (\eta g') = (1 - 2\eta^2)$.

Quindi moltiplicando per η e integrando

$$\eta g' = \frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^4}{2} + C_1.$$

Dividendo per η si ottiene

$$g'(\eta) = \frac{\eta}{2} - \frac{\eta^3}{2} + \frac{C_1}{\eta}.$$

Ma dalla condizione al contorno (9.13) si ha

$$0 = g'(1) = \left[\frac{C_1}{\eta} \right]_{\eta=1} = C_1 \implies C_1 = 0$$

per cui

$$g'(\eta) = \frac{\eta}{2} (1 - \eta^2) \quad (9.15)$$

che può essere ancora integrata:

$$g(\eta) = \frac{\eta^2}{4} - \frac{\eta^4}{8} + C_2. \quad (9.16)$$

Ora la costante d'integrazione C_2 si determina dalla condizione integrale (9.14):

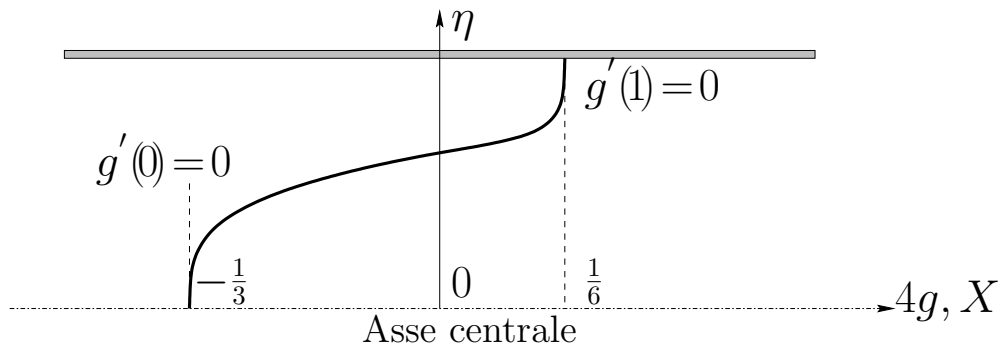
$$0 = \int_0^1 g \eta d\eta \stackrel{(9.16)}{=} \int_0^1 \left(\frac{\eta^3}{4} - \frac{\eta^5}{8} + C_2 \eta \right) d\eta = \frac{1}{16} - \frac{1}{48} + \frac{C_2}{2} \implies C_2 = -\frac{1}{12}.$$

Da cui la soluzione completa per $g(\eta)$:

$$g(\eta) = \frac{\eta^2}{4} - \frac{\eta^4}{8} - \frac{1}{12} \quad \text{ossia} \quad 4g(\eta) = \eta^2 - \frac{\eta^4}{2} - \frac{1}{3}. \quad (9.17)$$

Note Dalle espressioni di g' (9.15) e di g (9.17) si desume che:

- essendo $0 \leq \eta \leq 1 \implies g'(\eta) > 0 \quad \forall \eta \implies g$ è monotona crescente;
- $g'(0) = 0$ (in asse) e $g'(1) = 0$ (alla parete) $\implies g \perp$ parete;
- $4g(0) = -\frac{1}{3}$ (in asse) e $4g(1) = -\frac{1}{6}$ (alla parete).



Per determinare completamente la soluzione (9.9) si calcola \bar{c} mediando sulla sezione l'equazione di convezione-diffusione (9.8). Dalla definizione di \bar{f} si ottiene la forma adimensionale di tale media ricordando che $\eta = r/a$ e che $\Omega = \pi a^2$ diventa $\Omega = \pi$:

$$\bar{f} \equiv \frac{1}{\Omega} \int_0^{2\pi} \int_0^a f(x, r, t) r dr d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(X, \eta, \mathcal{T}) \eta d\eta d\theta = 2 \int_0^1 f \eta d\eta.$$

Quindi integrando la (9.8) su Ω porge:

$$\int_0^1 \frac{\partial c}{\partial \mathcal{T}} \eta d\eta + \int_0^1 (1 - 2\eta^2) \frac{\partial c}{\partial X} \eta d\eta = \int_0^1 \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} \eta d\eta + \int_0^1 \frac{\partial c}{\partial \eta} d\eta$$

e sostituendo la definizione (9.9) di c :

$$\int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial \mathcal{T}} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial X \partial \mathcal{T}} g \right) \eta + (1 - 2\eta^2) \left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial X} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial X^2} g \right) \eta - \frac{\partial \bar{c}}{\partial X} g'' \eta - \frac{\partial \bar{c}}{\partial X} g' \right] d\eta = 0.$$

Raccogliendo i termini in $\partial \bar{c} / \partial X$, $\partial^2 \bar{c} / \partial X^2$ e $\partial^2 \bar{c} / \partial X \partial \mathcal{T}$ si

$$\begin{aligned} \text{ottiene: } \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \mathcal{T}} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial X} \int_0^1 \left[(1 - 2\eta^2) \eta - g'' \eta - g' \right] d\eta + \\ + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial X^2} \int_0^1 (1 - 2\eta^2) g \eta d\eta + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial X \partial \mathcal{T}} \int_0^1 g \eta d\eta = 0. \end{aligned}$$

Ma il coefficiente di $\partial \bar{c} / \partial X$ è identicamente nullo per l'equazione per g (9.12) mentre il coefficiente di $\partial^2 \bar{c} / \partial X \partial \mathcal{T}$ è nullo per la condizione integrale (9.14). Quindi

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \mathcal{T}} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial X^2} \int_0^1 (1 - 2\eta^2) g \eta d\eta = 0$$

in cui, nota la soluzione g , è possibile calcolare il coefficiente di $\partial^2 \bar{c} / \partial X^2$:

$$\int_0^1 (1 - 2\eta^2) g \eta d\eta \stackrel{(9.17)}{=} \int_0^1 (1 - 2\eta^2) \left(\frac{\eta^2}{4} - \frac{\eta^4}{8} - \frac{1}{12} \right) \eta d\eta = -\frac{1}{96}.$$

Quindi si determina \bar{c} risolvendo un'equazione del tutto analoga all'equazione di pura diffusione molecolare (2.3):

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \mathcal{T}} = \frac{1}{48} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial X^2} \quad (9.18)$$

che ammette una soluzione identica alla **soluzione fondamentale** (2.8) dove $D = 1/48$:

$$\bar{c}(X, \mathcal{T}) = \frac{C_3}{\sqrt{\pi \mathcal{T} / 12}} e^{-\left(\frac{12X^2}{\mathcal{T}} \right)} \quad (9.19)$$

e dove la costante C_3 è funzione della massa \mathcal{M} immessa.

La soluzione completa del problema dispersivo si ottiene dalle (9.9), (9.17) e (9.19). [**Per esercizio**].

Si conclude l'analisi del processo di dispersione osservando che:

- il significato e l'entità di K si determinano dalla (9.18) scritta in forma dimensionale tramite l'uso delle (9.7):

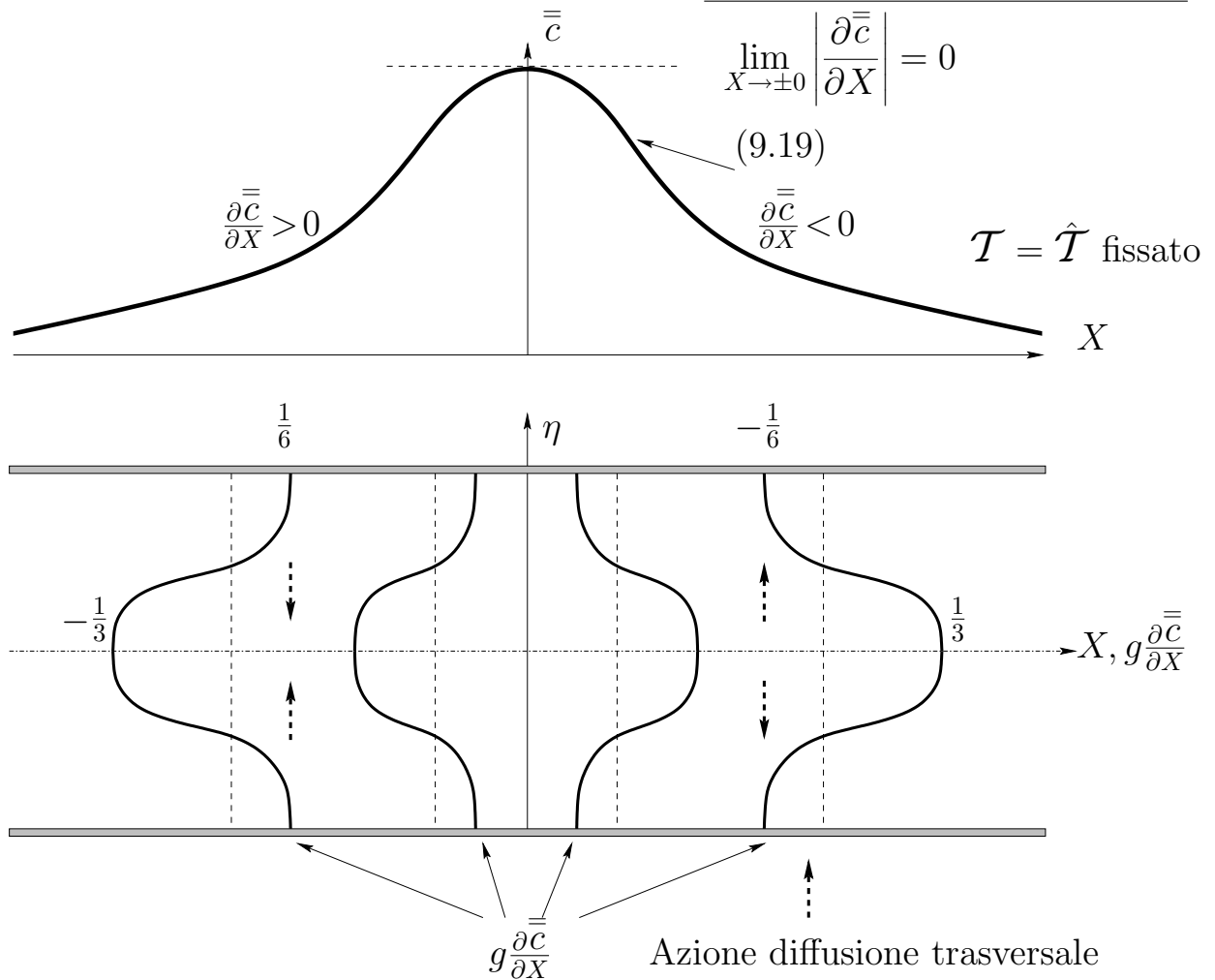
$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \tau} = \frac{1}{48} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial X^2} \xrightarrow{(9.7)} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \tau} \frac{a^2}{D} = \frac{1}{48} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \xi^2} \left(\frac{a^4 \bar{u}^2}{D^2} \right) \implies \boxed{\frac{\partial \bar{c}}{\partial \tau} = \frac{a^2 \bar{u}^2}{48 D} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \xi^2}} \quad (9.20)$$

che rappresenta un processo di diffusione longitudinale per \bar{c} (non c) osservato da un riferimento in moto a velocità \bar{u} e con **diffusività efficace** o **coefficiente di dispersione** che conferma la (9.2): $\boxed{K = a^2 \bar{u}^2 / 48 D}$; (9.21)

- il ruolo della diffusione trasversale è quello di modificare, riducendo, l'intensità della dispersione (allontanamento delle particelle di soluto) che si avrebbe per puri effetti convettivi. Infatti analizzando il termine $g(\eta) \partial \bar{c} / \partial X$ si osserva che a valle del picco di \bar{c} , dove $\partial \bar{c} / \partial X > 0$, $c = \bar{c} + g \partial \bar{c} / \partial X$ è maggiore alle pareti ($g = 1/6$) che in asse ($g = -1/3$). Viceversa avviene a monte del picco dove $\partial \bar{c} / \partial X < 0$. Quindi la diffusione trasversale ($\uparrow \downarrow$ in figura) opera in modo che:

a valle del picco riporta particelle di soluto dalle pareti, dove c'è maggior concentrazione, verso l'asse dove la convezione è più intensa. Cioè tende a riavvicinare le particelle di soluto che vengono allontanate per effetto convettivo;

a monte del picco allontana le particelle dall'asse, dove c'è maggior concentrazione, e le spinge verso le pareti dove la convezione è minore \implies si riduce la dispersione.



- si può ottenere una legge analoga alla ‘Legge di Fick’ (1.5) semplicemente calcolando il flusso di massa q_x attraverso una sezione $\Omega = \pi a^2$:
$$q_x \equiv \frac{\dot{\mathcal{M}}}{\Omega} = \frac{\dot{\mathcal{M}}}{\pi a^2}$$

per cui calcolando $\dot{\mathcal{M}}$ con le soluzioni (9.1) e (9.17)

$$\dot{\mathcal{M}} \equiv \int_{\Omega} c(u(r) - \bar{u}) d\Omega = 2\pi a^2 \int_0^1 c(u(\eta) - \bar{u}) \eta d\eta = \dots = -\frac{1}{48} \frac{\pi a^4 \bar{u}^2}{D} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi}$$

si ottiene

$$q_x \equiv \frac{\dot{\mathcal{M}}}{\pi a^2} = -\frac{a^2 \bar{u}^2}{48 D} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi} \stackrel{(9.21)}{=} -K \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi} \quad (9.22)$$

che rappresenta l'equivalente della (1.5) per la dispersione;

- per descrivere il processo di dispersione si può usare un'equazione di convezione-diffusione derivata dalla (9.20). Infatti usando le coordinate del sistema fisso [si veda la (9.4)] la (9.20) diventa:

$$\boxed{\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = K \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2}} \quad (9.23)$$

che differisce da una tipica equazione di convezione-diffusione perchè:

- qui compare \bar{c} invece di c ;
- nel termine convettivo compare \bar{u} invece di $u(r)$;
- al posto dei termini diffusivi compare il termine di dispersione longitudinale che è tanto maggiore quanto più K è maggiore di D . Usando valori tipici $D = 10^{-9} m^2/s$, $\bar{u} = 10^{-2} m/s$, $a = 10^{-2} m$ nella soluzione (9.21) per K si ottiene

$$K = \frac{a^2 \bar{u}^2}{48D} \approx 0.21 m^2/s$$

cioè 10^8 volte maggiore di D .

- si ricorda, infine, che la soluzione di Taylor è valida solo se le particelle hanno visitato tutta la sezione cioè per $t > a^2/D$ che, nel caso in questione è circa $10^5 s$ cioè 30 ore. In altre parole il transitorio è molto lungo.

Nota: con la stessa procedura è possibile ottenere soluzione al problema di dispersione turbolenta in un condotto cilindrico.

10 LA DISPERSIONE TURBOLENTA.

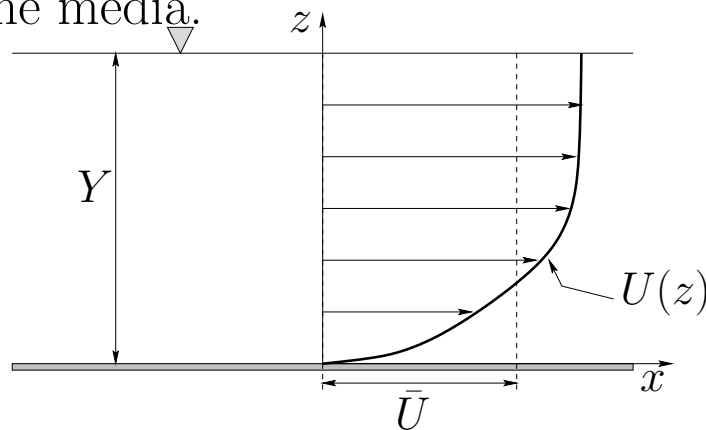
LA TEORIA DI ELDER

Si estende la ‘Teoria di Taylor sulla dispersione’ ad un moto turbolento che si sviluppa in un canale a superficie libera.

Tale estensione è immediata con i seguenti cambiamenti:

- la diffusività turbolenta verticale D_z^T sostituisce D ;
- il profilo verticale di velocità $u(z)$ è quello che si realizza in un canale.

Nel caso di moto piano ($\partial/\partial y = 0$), a superficie libera, $\langle \mathbf{v} \rangle = (U(z), 0, 0)$ è la velocità mediata sulla turbolenza e $C(x, z, t)$ la concentrazione media.



Analizzando la dispersione per ‘tempi lunghi’ ($t \gg T^L$) dopo il rilascio si usa un’equazione di convezione-diffusione (8.8) in cui la diffusività turbolenta non dipende da t . Per quanto già visto si trascura la diffusione longitudinale e, quindi:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U(z) \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z^T \frac{\partial C}{\partial z} \right). \quad (10.1)$$

Utilizzando un riferimento in moto con velocità media sulla profondità \bar{U} , cioè la trasformazione:

$$\xi = x - \bar{U}t, \quad \eta = \frac{z}{Y}, \quad \tau = t$$

in cui η è adimensionale ma le altre coordinate sono dimensionali e tale che

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \bar{U} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

l'equazione (10.1) diventa:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + [U(\eta) - \bar{U}] \frac{\partial C}{\partial \xi} = \frac{1}{Y^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(D_z^T \frac{\partial C}{\partial \eta} \right). \quad (10.2)$$

Seguendo l'approccio di Taylor, Elder cercò una soluzione tipo:

$$\bar{C} = \bar{C}(\xi, \tau), \quad C = \bar{C} + \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} Y g(\eta), \quad Y \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \ll \bar{C}, \quad \frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} \ll \bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi}.$$

Sostituendo nella (10.2) e trascurando i termini $\partial \bar{C} / \partial \tau$, $\partial^2 \bar{C} / \partial \xi \partial \tau$, $\partial^2 \bar{C} / \partial \xi^2$ si ottiene la seguente equazione semplificata [**dimostrare per esercizio**]:

$$[U(\eta) - \bar{U}] \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} = \frac{1}{Y} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(D_z^T \frac{dg}{d\eta} \right). \quad (10.3)$$

Si ipotizza che il moto turbolento sia tale per cui sussista 'l'analogia di Reynolds' basata sullo 'schema diffusivo di Fick':

$$\boxed{D_z^T = \nu_T = \kappa u_* Y \eta (1 - \eta)} \quad (10.4)$$

che, ovviamente, soddisfa la richiesta (8.6) per cui $D_z^T (= D_{33}^T)$ è indipendente da t ed è il prodotto di una scala di velocità turbolenta (u_*) per una scala di lunghezza (Y). Nella (10.4):

κ = 'costante di Von Karman' (≈ 0.4);

u_* = 'velocità di attrito' ($= \sqrt{\tau_0 / \rho}$ con τ_0 tensione al fondo).

Sostituendo la (10.4) nella (10.3) si ha:

$$[U(\eta) - \bar{U}] = \kappa u_* \frac{d}{d\eta} [\eta(1 - \eta)g']. \quad (10.5)$$

Il profilo di velocità congruente con la (10.4) è il profilo logaritmico tipico delle correnti turbolente:

$$U(\eta) = \frac{u_*}{\kappa} \ln\left(\frac{\eta}{\eta_r}\right) \underset{\text{(dimostrare per esercizio)}}{\approx} \bar{U} + \frac{u_*}{\kappa}(1 + \ln \eta) \quad (10.6)$$

dove η_r = distanza dalla parete a cui si impone la continuità con il profilo valido nello strato viscoso.

Sostituendo nella (10.5) si ottiene l'equazione risolvente per $g(\eta)$:

$$\frac{d}{d\eta} [\eta(1 - \eta)g'] = \frac{1}{\kappa^2}(1 + \ln \eta)$$

da integrare con le condizioni

$$\underbrace{[g']_{\eta=\eta_r}}_{\text{(condizione al contorno di fondo)}}, \quad \underbrace{\int_{\eta_r}^1 g d\eta}_{\text{(condizione integrale da def. di } \bar{C})} = 0 \quad .$$

Usando gli stessi passaggi visti nella 'Teoria di Taylor' si giunge alla soluzione

$$g(\eta) = \frac{1}{\kappa^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - \eta)^m}{m^2} - 0.648 \right].$$

Per determinare \bar{C} si media la (10.2) sulla profondità Y e il risultato è analogo a quello ottenuto da Taylor [si veda (9.20)]

[dimostrare per esercizio]:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} = \left[-\frac{u_* Y}{\kappa} \int_{\eta_r}^1 (1 + \ln \eta) g(\eta) d\eta \right] \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} = 5.86 u_* Y \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} = K \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} \quad (10.7)$$

con coefficiente di dispersione $K = 5.86 u_* Y$.

È ora possibile dimostrare la legittimità di aver trascurato la diffusione turbolenta longitudinale nella (10.2).

Ipotizzando turbolenza isotropa per cui $D_x^T = D_z^T$ [nel caso di anisotropia è al massimo $D_x^T \approx (2 - 3)D_z^T$]:

$$D_x^T = D_z^T = \kappa u_* Y \eta (1 - \eta) \quad (10.8)$$

e, reintroducendo la diffusione longitudinale nell'equazione per \bar{C} (10.7) ottenuta integrando sulla verticale si avrebbe

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} = \left(K + \bar{D}_x^T \right) \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2}$$

con

$$\bar{D}_x^T \equiv \frac{1}{Y} \int_{z_r}^Y D_x^T dz =_{(10.8)} \kappa u_* Y \int_{\eta_r}^1 \eta (1 - \eta) d\eta \approx \frac{1}{6} \kappa u_* Y = 0.067 u_* Y. \quad (10.9)$$

Da questa e dal valore di K si valuta l'intensità relativa della diffusione turbolenta longitudinale rispetto alla dispersione:

$$\frac{\bar{D}_x^T}{K} = \frac{0.067 u_* Y}{5.86 u_* Y} = 0.012$$

da cui è evidente che $\bar{D}_x^T \ll K$. Dalla (10.9) è anche evidente che $\bar{D}_z^T = 0.067 u_* Y$ (risultato utile nel seguito).

Caso a simmetria assiale (condotto cilindrico)

La soluzione di moto turbolento, dovuta a Taylor, si ottiene come quella di Elder.

Si riassumono le caratteristiche fondamentali:

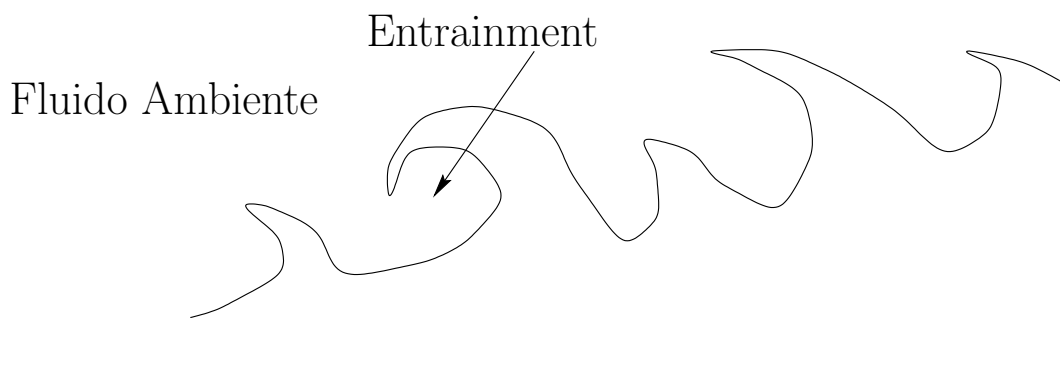
- $D_r^T = \nu_T = \frac{u_* a \eta}{du/d\eta}$ con $\eta \equiv r/a$;
- $U(\eta) = \bar{U} + \frac{u_*}{\kappa} \left[\frac{3}{2} + \ln(1 - \eta) \right]$;
- $K = 10.06 u_* a$, $\bar{D}_r^T = 0.05 u_* a$.

11 LA TURBOLENZA LIBERA

Si specificano le proprietà di una particolare forma di turbolenza che caratterizza il mescolamento di traccianti passivi nelle correnti fluide naturali:

Turbolenza Libera = turbolenza che evolve non limitata da contorni solidi.

- In generale la T.L. possiede le seguenti caratteristiche:
 1. evolve all'interno di un Fluido Ambiente con densità simile, e, solitamente, in moto irrotazionale;
 2. l'interfaccia tra il fluido in moto turbolento e il Fluido Ambiente è irregolare con indentazioni dello stesso ordine di grandezza dello spessore del moto turbolento;



3. evolve inglobando del Fluido Ambiente cioè mescolandosi con esso;
 4. la struttura del campo di moto cambia verso valle a causa di forzanti esterni (gradienti di pressione e/o temperatura) e per motivi inerenti alla turbolenza stessa.
- vista la complessità del fenomeno è necessario introdurre una serie di ipotesi ed approssimazioni.

Ipotesi

Se non esplicitamente specificato il contrario si considerano moti

1. di un fluido di densità costante ($\rho = \text{cost.}$);

2. bidimensionali (piani o assialsimmetrici):

$$\mathbf{V} = [U(x, y), V(x, y), 0], \text{ ovvero } \mathbf{V} = [U(x, r), V(x, r), 0] \quad (11.1)$$

3. mediamente stazionari ($\partial \mathbf{V} / \partial t = 0$);

4. evolvono lentamente procedendo verso valle cioè:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \ll \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}, \text{ ovvero } \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \ll \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial r} \quad (11.2)$$

5. non forzati dall'esterno cioè in assenza di gradienti di pressione e temperatura.

Scale

Le equazioni dinamiche (in particolare l'equazione di Reynolds 5.11) possono essere semplificate determinando l'entità dei termini fondamentali sulla base delle seguenti scale:

$$U_0 = \text{scala delle velocità in direzione longitudinale (distante)}, \quad (11.3a)$$

$$U_m = \text{scala delle variazioni di velocità in direzione longitudinale,} \quad (11.3b)$$

(locale),

$$\tilde{l} = \text{scala di lunghezza in direzione trasversa}$$

$$= \text{distanza dall'asse a cui } U \text{ è una frazione prefissata di } U_m, \quad (11.3c)$$

$$\tilde{L} = \text{scala di lunghezza in direzione longitudinale}$$

$$= \text{distanza per cui si ha una significativa variazione di } U. \quad (11.3d)$$

I moti che corrispondono a queste caratteristiche sono classificati come **Getti**, **Scie** e **Strati di Transizione**.

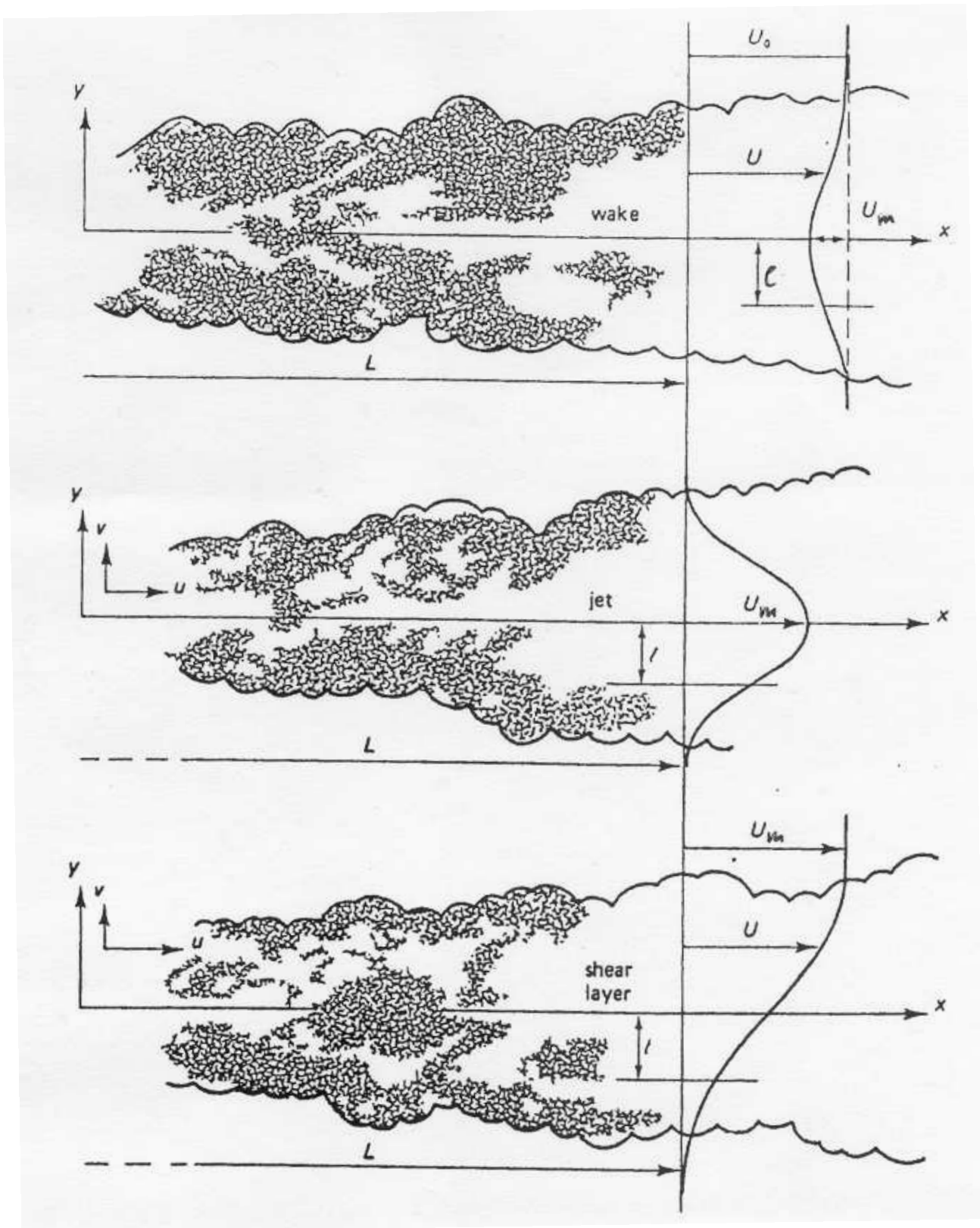


Figura 11.1: Descrizione grafica di moti 2D a turbolenza libera. Dall'alto verso il basso una **Scia**, un **Getto** e uno **Strato di Transizione**. Adattamento da Tennekes & Lumley (1972).

Da quanto sopra è possibile riassumere le informazioni sulle scale di velocità:

$$U = \mathcal{O}(U_0), \quad U_m \ll U_0, \quad \text{per le } \mathbf{Scie} \quad (11.4a)$$

$$(U_m = \mathbf{difetto\ di\ velocità}),$$

$$U = \mathcal{O}(U_m), \quad U_0 = 0, \quad \text{per i } \mathbf{Getti\ e\ gli\ Strati}, \quad (11.4b)$$

$$\implies U = \mathcal{O}(\tilde{U}) \quad \text{dove} \quad \tilde{U} = \begin{cases} U_0 & \text{per le } \mathbf{Scie} \\ U_m & \text{per i } \mathbf{Getti\ e\ gli\ Strati}. \end{cases} \quad (11.4c)$$

Utilizzando l'equazione di continuità (caso assialsimmetrico) è ora possibile definire la scala V_m per le variazioni di V :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rV)}{\partial r} = 0 \quad (11.5)$$

$$\implies \frac{V_m}{\tilde{l}} = \mathcal{O}\left(\frac{U_m}{\tilde{L}}\right) \implies \boxed{V_m = \mathcal{O}\left(U_m \frac{\tilde{l}}{\tilde{L}}\right)}. \quad (11.6)$$

Rimangono solo da introdurre le scale relative alle fluttuazioni turbolente di velocità e alla pressione media:

$$\langle v'_i v'_j \rangle = \mathcal{O}(q^2), \quad P = \mathcal{O}(\tilde{P}) \quad (11.7)$$

che nel seguito verranno meglio specificate.

Con le scale sopra definite si analizza l'ordine di grandezza di ogni contributo delle equazioni di Reynolds nel limite asintotico di **regione sottile** cioè nel limite $\tilde{l}/\tilde{L} \rightarrow 0$ o più praticamente $\tilde{l}/\tilde{L} \ll 1$

L'evidenza sperimentale mostra che

$$\frac{\tilde{l}}{\tilde{L}} = \text{cost.} \quad \text{dove} \quad \text{cost.} = \mathcal{O}(10^{-2}). \quad (11.8)$$

11.1 Le equazioni semplificate per i moti mediamente 2D

Data la sua importanza pratica consideriamo il caso di simmetria assiale.

La componente trasversale dell'equazione di Reynolds

Utilizzando le ipotesi $\rho = \text{cost.}$ e $\partial V / \partial t = 0$ si ha:

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - \nu \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{V}{r^2} \right] + \frac{\partial \langle u' v' \rangle}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle v'^2 \rangle)}{\partial r} = 0 \quad (11.9)$$

e passando agli ordini di grandezza:

$$\left[\frac{\tilde{U} U_m \tilde{l}}{\tilde{L}^2} \right] \left[\frac{1 (U_m \tilde{l})^2}{\tilde{l} \tilde{L}} \right] \left[\frac{\tilde{P}}{\rho \tilde{l}} \right] \left[\frac{U_m \tilde{l}}{\tilde{L}^3} \right] \left[\frac{1 U_m \tilde{l}}{\tilde{l}^2 \tilde{L}} \right] \left[\frac{U_m \tilde{l} 1}{\tilde{L} \tilde{l}^2} \right] \left[\frac{q^2}{\tilde{L}} \right] \left[\frac{q^2}{\tilde{l}} \right] \quad (11.10)$$

se ora si moltiplica per $\tilde{l} / \tilde{U} U_m$ si ottiene

$$\left[\frac{\tilde{l}^2}{\tilde{L}^2} \right] \left[\frac{U_m \tilde{l}^2}{\tilde{U} \tilde{L}^2} \right] \left[\frac{\tilde{P}}{\rho \tilde{U} U_m} \right] \left[\frac{1 \tilde{l}^2}{R_{\tilde{L}} \tilde{L}^2} \right] \left[\frac{1}{R_{\tilde{L}}} \right] \left[\frac{1}{R_{\tilde{L}}} \right] \left[\frac{q^2 \tilde{l}}{\tilde{U} U_m \tilde{L}} \right] \left[\frac{q^2}{\tilde{U} U_m} \right] \quad (11.11)$$

dove si è utilizzato il Numero di Reynolds

$$R_{\tilde{L}} = \frac{\tilde{U} \tilde{L}}{\nu}. \quad (11.12)$$

Considerando ora i limiti asintotici $R_L \rightarrow \infty$, $\tilde{l} / \tilde{L} \rightarrow 0$ e il fatto che $U_m \leq \tilde{U}$ si ottiene l'equazione semplificata

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle v'^2 \rangle)}{\partial r} = 0 \quad \text{ovvero} \quad \boxed{\frac{\partial (P/\rho)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle v'^2 \rangle)}{\partial r} = 0} \quad (11.13)$$

se i termini convettivi sono trascurabili rispetto a quelli di tensione di Reynolds cioè se:

$$\boxed{\lim_{\tilde{l}/\tilde{L} \rightarrow 0} \frac{(\tilde{l}/\tilde{L})^2}{(q^2/\tilde{U} U_m)} = 0} \quad (11.14)$$

che, in seguito, mostreremo essere sempre verificata.

È, quindi, possibile integrare in direzione radiale la componente r dell'equazione di Reynolds semplificata:

$$\begin{aligned} & \int_r^\infty \frac{\partial(P/\rho)}{\partial s} ds = - \int_r^\infty \frac{1}{s} \frac{\partial(s\langle v'^2 \rangle)}{\partial s} ds \\ \implies & \frac{P_\infty}{\rho} - \frac{P(x, r)}{\rho} = -\langle v'^2 \rangle_\infty + \langle v'^2 \rangle(x, r) - \int_r^\infty (\langle v'^2 \rangle/s) ds \\ \implies & \frac{P(x, r)}{\rho} = \frac{P_\infty}{\rho} - \langle v'^2 \rangle(x, r) + I_{v'^2}(x, r) \quad \text{con } I_{v'^2} = \int_r^\infty (\langle v'^2 \rangle/s) ds \quad (11.15) \end{aligned}$$

e dove

$$P_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} P(x, r) \quad \text{e} \quad \langle v'^2 \rangle_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} \langle v'^2 \rangle(x, r) = 0.$$

Questo valore di pressione può ora essere sostituito nella componente $-x$ dell'equazione di Reynolds in cui compare nella forma $\partial P/\partial x$;

È però necessario analizzare il significato del contributo $\partial P_\infty/\partial x$ la cui presenza ha due implicazioni:

1. si ha un termine di forzante esterno. Ma si è ipotizzato di analizzare casi non forzati;
2. se tale termine forzante non è identicamente nullo è necessario introdurre una seconda scala di lunghezza (\tilde{L}_2) per le variazioni longitudinali di P (in analogia ad \tilde{L}):

Per i 2 motivi di cui sopra si pone

$$\frac{\partial P_\infty}{\partial x} = 0 \quad (11.16)$$

La componente longitudinale dell'equazione di Reynolds

Nella componente longitudinale:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \nu \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{U}{r^2} \right] + \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle u'v' \rangle)}{\partial r} = 0 \quad (11.17)$$

è possibile sostituire il valore di P appena ottenuto:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} - \nu \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{U}{r^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} (\langle u'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle + I_{v',2}) + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle u'v' \rangle)}{\partial r} = 0 \quad (11.18)$$

e passando agli ordini di grandezza:

$$\left[\frac{\tilde{U} U_m}{\tilde{L}} \right] \left[\frac{U_m \tilde{l} U_m}{\tilde{L} \tilde{l}} \right] \left[\frac{\nu U_m}{\tilde{L}^2} \right] \quad \left[\frac{\nu U_m}{\tilde{l}^2} \right] \quad \left[\frac{q^2}{\tilde{L}} \right] \quad \left[\frac{q^2}{\tilde{l}} \right] \quad (11.19)$$

ed, infine, moltiplicando per $\tilde{l}^2 / \tilde{U} U_m L$ si ottiene

$$\left[\frac{\tilde{l}^2}{\tilde{L}^2} \right] \left[\frac{U_m \tilde{l}^2}{\tilde{U} \tilde{L}^2} \right] \left[\frac{1}{R_{\tilde{L}}} \frac{\tilde{l}^2}{\tilde{L}^2} \right] \quad \left[\frac{1}{R_{\tilde{L}}} \right] \quad \left[\frac{q^2 \tilde{l}^2}{\tilde{U} U_m \tilde{L}^2} \right] \quad \left[\frac{q^2 \tilde{l}}{\tilde{U} U_m \tilde{L}} \right] \quad (11.20)$$

dove si è utilizzato il Numero di Reynolds (11.12).

Considerando ora i limiti asintotici $R_{\tilde{L}} \rightarrow \infty$, $\tilde{l}/\tilde{L} \rightarrow 0$ e il fatto che $U_m \leq \tilde{U}$ si nota che il bilancio avviene tra il primo termine convettivo e il secondo di tensione di Reynolds per cui:

$$\frac{\tilde{l}^2}{\tilde{L}^2} = \mathcal{O} \left(\frac{q^2 \tilde{l}}{\tilde{U} U_m \tilde{L}} \right) \quad \text{ossia} \quad \boxed{\frac{q^2}{\tilde{U} U_m} = \mathcal{O} \left(\frac{\tilde{l}}{\tilde{L}} \right)}. \quad (11.21)$$

Questa conferma la (11.14) e, contenendo \tilde{U} , deve essere specificata per i 2 casi distinti Scie e Getti+Strati.

Il caso di Getti+Strati

Poichè $\tilde{U} = U_m$ (si veda 11.4c) l'equazione che determina l'intensità relativa della turbolenza in funzione delle scale di lunghezza diventa:

$$\frac{q^2}{U_m^2} = \mathcal{O}\left(\frac{\tilde{l}}{\tilde{L}}\right) \implies \frac{q}{U_m} = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\tilde{l}}{\tilde{L}}}\right) \quad (11.22)$$

per cui i due termini convettivi della componente $-x$ dell'equazione di Reynolds (11.18) (si veda anche 11.20) sono dello stesso o.d.g. e i termini viscosi sono trascurabili rispetto alle

tensioni di Reynolds per
$$\frac{1}{R_{\tilde{L}}} \ll \frac{q^2}{\tilde{U}U_m\tilde{L}} = \frac{\tilde{l}^2}{\tilde{L}^2}. \quad (11.23)$$

In definitiva l'equazione approssimata diventa:

$$\boxed{U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle u'v' \rangle)}{\partial r} = 0.} \quad (11.24)$$

Nel caso specifico dei Getti si ottiene una variabile conservata di fondamentale importanza. Moltiplicando per r l'equazione del moto e utilizzando l'equazione di continuità si ha la seguente **forma conservativa**:

$$\frac{\partial (rU^2)}{\partial x} + \frac{\partial (rUV)}{\partial r} + \frac{\partial (r \langle u'v' \rangle)}{\partial r} = 0 \quad (11.25)$$

che può essere direttamente integrata su $0 < r < \infty$ ricordando che per definizione $\lim_{r \rightarrow \infty} U = \lim_{r \rightarrow \infty} V = \lim_{r \rightarrow \infty} \langle u'v' \rangle = 0$:

$$0 = \int_0^\infty \left\{ \frac{\partial (rU^2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} [(rUV) + (r \langle u'v' \rangle)] \right\} dr = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty rU^2 dr \implies \boxed{\frac{\partial M}{\partial x} = 0} \quad (11.26)$$

dove $M \equiv \int_\Omega \rho U^2 d\Omega = 2\pi\rho \int_0^\infty rU^2 dr =$ flusso di q.d.m. del Getto.

Il caso delle Scie

Prove sperimentali mostrano che $q = \mathcal{O}(U_m)$ ed essendo per definizione $\tilde{U} = U_0$ la (11.21) porge:

$$\frac{q}{U_0} = \mathcal{O}\left(\frac{\tilde{l}}{\tilde{L}}\right) \quad \text{e anche} \quad \frac{U_m}{U_0} = \mathcal{O}\left(\frac{\tilde{l}}{\tilde{L}}\right). \quad (11.27)$$

Essendo, inoltre, $\tilde{U} = U_0 \gg U_m$, il secondo termine convettivo nella (11.18) è trascurabile rispetto al primo per cui l'equazione approssimata diventa:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle u'v' \rangle)}{\partial r} = 0. \quad (11.28)$$

Inoltre, nell'ipotesi di forzanti esterni nulli, $\partial U_0 / \partial x = 0$ e l'equazione del moto può anche essere scritta come:

$$\boxed{U \frac{\partial (U - U_0)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle u'v' \rangle)}{\partial r} = 0.} \quad (11.29)$$

Analogamente a quanto fatto per i Getti si può integrare tale equazione e mostrare che il flusso di **difetto di q.d.m.**:

$$M \equiv \int_{\Omega} \rho U (U - U_0) d\Omega = 2\pi\rho \int_0^{\infty} r U (U - U_0) dr \quad (11.30)$$

si conserva procedendo verso valle cioè $\frac{\partial M}{\partial x} = 0$.

[Dimostrare per esercizio].

12 LA SOLUZIONE AUTOSIMILARE

Misure sperimentali mostrano che per i moti a T.L. sia la velocità longitudinale (U) che le tensioni di Reynolds ($\langle u'v' \rangle$) non dipendono dalla coordinata longitudinale (x) se opportunamente riscalati. Da cui la ricerca di soluzione autosimilare.

Autosimilarità = proprietà del moto per cui si può descrivere il moto stesso tramite funzioni indipendenti dalla coordinata longitudinale.

Es. Sia $P(x, r)$ una qualsiasi proprietà di un moto 2D e si introducano le scale $P_0(x)$ e $\tilde{l}(x)$ caratteristiche rispettivamente di $P(x, r)$ ed r e tali che: $\eta \equiv \frac{r}{\tilde{l}(x)}$, (12.1a)

$$\tilde{P}(x, \eta) \equiv \frac{P(x, r)}{P_0(x)} = \frac{P(x, \eta\tilde{l}(x))}{P_0(x)}. \quad (12.1b)$$

Se la proprietà scalata \tilde{P} è indipendente esplicitamente da x cioè se esiste $\tilde{P}(\eta)$ tale che $\tilde{P}(x, \eta) = \tilde{P}(\eta)$ allora si dice che $P(x, r)$ è **autosimilare** e: $P(x, r) = P_0(x)\tilde{P}(\eta)$. (12.2)

- È importante definire opportunamente le scale l e P_0 che, solitamente, dipendono da x come potenze del tipo x^n ;
- la validità dell'ipotesi autosimilare si determina usando soluzioni tipo (12.1) nelle equazioni ed esaminando la consistenza dei risultati;
- una **soluzione autosimilare** è caratterizzata da m scale di grandezza con $m =$ dimensione del problema (ad esempio \tilde{l} e P_0 per moto 2D).

12.1 Il caso dei Getti

Prima di analizzare in dettaglio la soluzione autosimilare per il caso dei Getti assialsimmetrici esaminiamo alcune caratteristiche del moto:

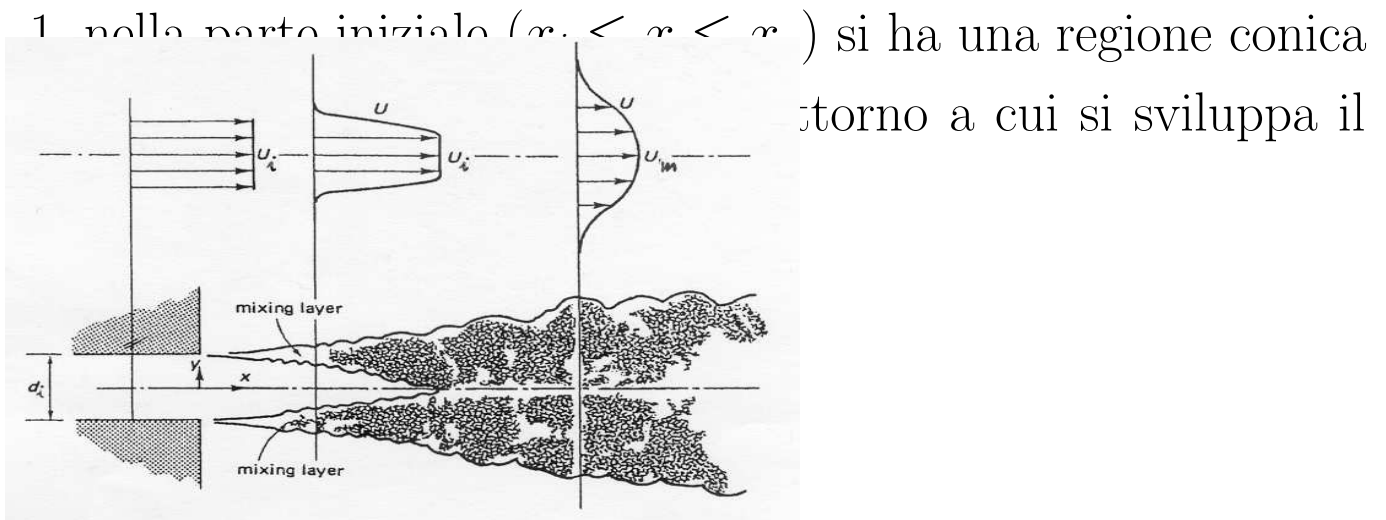


Figura 12.1: Il Getto può ammettere soluzione autosimilare a partire dal punto $x = x_a$ posto a valle della Adattamento da Tennekes & Lumley (1972).

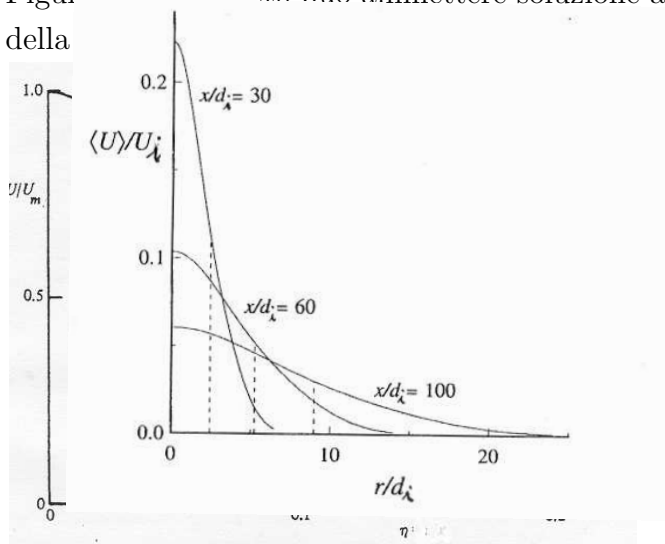


Figura 12.2: Soluzione autosimilare per U : (a) confronto tra valori osservati e di soluzione autosimilare di $U/U_m(x)$; (b) evoluzione del profilo di velocità U/U_i a diverse sezioni a valle di x_a . Adattamenti da Townsend (1976) e Pope (2000).

La costruzione di una soluzione autosimilare comporta una serie di ipotesi che si evidenzieranno nel seguito.

Per il caso dei Getti assialsimmetrici si parte dalla (11.24).

In essa compaiono le seguenti variabili dipendenti U , V e $\langle u'v' \rangle$ e, in analogia alle (12.1), si cerca una soluzione del tipo:

$$U(x, r) = U_m(x)f(\eta), \quad -\langle u'v' \rangle(x, r) = q^2(x)g(\eta), \quad \eta = \frac{r}{l(x)} \quad (12.3)$$

mentre la soluzione per V si otterrà dall'equazione di continuità (11.5).

Si noti che la soluzione di cui sopra prevede 3 scale per un moto 2D.

\implies **Ipotesi I:** Affinchè esista soluzione autosimilare deve essere:

$$q \propto U_m \quad \text{ossia} \quad \frac{q}{U_m} = \text{cost.} \quad (12.4)$$

cioè l'intensità della turbolenza deve essere proporzionale a quella del moto medio e il loro rapporto non dipendere da funzioni di x .

In questo caso è quindi possibile riscrivere la (12.3) come una vera soluzione autosimilare:

$$U(x, r) = U_m(x)f(\eta), \quad -\langle uv \rangle(x, r) = U_m^2(x)g(\eta), \quad \eta = \frac{r}{\tilde{l}(x)} \quad (12.5)$$

cioè utilizzando le sole 2 scale $\tilde{l}(x)$ e $U_m(x)$.

Una conseguenza dell'ipotesi (12.4) è che anche le scale di lunghezza sono proporzionali tra loro. Infatti ricordando che per i Getti vale la (11.22):

$$\frac{q}{U_m} = \mathcal{O} \left(\sqrt{\frac{\tilde{l}}{\tilde{L}}} \right), \quad \text{ma } q \propto U_m \implies \boxed{\tilde{l} \propto \tilde{L} \propto x} \quad (12.6)$$

confermata anche dalla evidenza sperimentale (si veda 11.8).

Come suggerito dalla procedura per costruire una soluzione autosimilare bisogna sostituire la soluzione prescelta nella equazione (11.24) e verificare la bontà dei risultati.

Per fare ciò si deve prima determinare la forma della soluzione per $V(x, r)$ utilizzando l'equazione di continuità (11.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rV)}{\partial r} = 0 &\implies \int_0^r \frac{\partial(sV)}{\partial s} ds = - \int_0^r \left(s \frac{\partial U}{\partial x} \right) ds \\ \implies [sV]_0^r = - \int_0^r \left(s \frac{\partial U}{\partial x} \right) ds &\implies V(x, r) = - \frac{1}{\eta \tilde{l}} \int_0^\eta \left(\eta \tilde{l} \frac{\partial U}{\partial x} \right) \tilde{l} d\eta \end{aligned}$$

ed utilizzando la soluzione di U :

$$V(x, r) = - \frac{\tilde{l}}{\eta} \left[\frac{dU_m}{dx} \int_0^\eta f \eta d\eta - \frac{U_m}{\tilde{l}} \frac{d\tilde{l}}{dx} \int_0^\eta f' \eta^2 d\eta \right] \quad (12.7)$$

dove $f' \equiv df/d\eta$.

Sostituendo nella componente x dell'equazione del moto (11.24) le soluzioni (12.5) e (12.7), moltiplicando per \tilde{l}/U_m^2 e raccogliendo i termini contenenti rispettivamente $\frac{\tilde{l}}{U_m} \frac{dU_m}{dx}$ e $\frac{d\tilde{l}}{dx}$ si giunge alla:

$$\frac{\tilde{l}}{U_m} \frac{dU_m}{dx} \left[f^2 - \frac{f'}{\eta} \int_0^\eta f \eta d\eta \right] - \frac{d\tilde{l}}{dx} \left[\eta f f' - \frac{f'}{\eta} \int_0^\eta f' \eta^2 d\eta \right] - \left[\frac{g}{\eta} + g' \right] = 0. \quad (12.8)$$

Si ottiene quindi un'equazione integro-differenziale in cui le parentesi quadre contengono funzioni solo di η e sono moltiplicate da funzioni solo di x .

L'equazione può essere semplificata nel contributo proporzionale a $\frac{d\tilde{l}}{dx}$ in quanto:

$$\int_0^\eta f' \eta^2 d\eta = [f \eta^2]_0^\eta - \int_0^\eta 2f \eta d\eta = \eta^2 f - \int_0^\eta 2f \eta d\eta, \quad (12.9)$$

Quindi si ottiene:

$$\frac{\tilde{l}}{U_m} \frac{dU_m}{dx} \left[f^2 - \frac{f'}{\eta} \int_0^\eta f \eta d\eta \right] - \frac{d\tilde{l}}{dx} \left[\frac{2f'}{\eta} \int_0^\eta f \eta d\eta \right] = \frac{g}{\eta} + g'. \quad (12.10)$$

Per poter calcolare le soluzioni autosimilari $f(\eta)$ e $g(\eta)$ è necessario imporre che l'equazione contenga solo funzioni di η cioè che le funzioni di x che moltiplicano le parentesi quadre siano in realtà delle costanti:

$$\frac{\tilde{l}}{U_m} \frac{dU_m}{dx} = \text{cost.}, \quad \frac{d\tilde{l}}{dx} = \text{cost.} \quad (12.11)$$

È facile mostrare che i vincoli (12.11) sono soddisfatti per

$$\tilde{l}(x) = Ax, \quad U_m(x) = Bx^n, \quad \forall n. \quad (12.12)$$

Per poter esprimere compiutamente la dipendenza da x è necessario calcolare l'esponente n e le costanti A e B tramite

Nel caso dei Getti si usa il vincolo (11.26) di invarianza della q.d.m. con x .

Poichè $\partial M/\partial x = 0$ ed ipotizzando un profilo uniforme di velocità U_i di ingresso $M_i = M(x_i) = \rho U_i^2 \Omega_i = \rho U_i^2 (\pi d_i^2/4)$ si ottiene:

$$M_i = M(x) \quad \forall x > x_a,$$

$$\implies \rho U_i^2 \Omega_i = 2\pi \rho \int_0^\infty r U^2 dr = 2\pi \rho l^2 U_m^2 \int_0^\infty \eta f^2 d\eta$$

ed essendo $\tilde{l} = Ax$

$$\implies U_m(x) = C U_i \sqrt{\Omega_i} x^{-1}, \quad \text{dove } C = \frac{1}{A \sqrt{2\pi} \int_0^\infty \eta f^2 d\eta}.$$

(12.13)

È quindi chiaro che nel caso di Getti assialsimmetrici:

1. $n = -1$ cioè la velocità in asse U_m decade come $1/x$;
2. le costanti B e C dipendono dalla costante A e dalla forma specifica del profilo in η della soluzione cioè da $f(\eta)$ in quanto al denominatore di C compare $\int_0^\infty \eta f^2 d\eta$.

Cioè la dipendenza da x può essere completamente definita solo quando anche $f(\eta)$ è nota.

Si torna, quindi, alla soluzione della (12.10) con la consapevolezza che le parentesi quadre sono ora moltiplicate dalle costanti:

$$\frac{\tilde{l}}{U_m} \frac{dU_m}{dx} = \frac{(Ax)}{Bx^{-1}} (-Bx^{-2}) = -A, \quad \frac{d\tilde{l}}{dx} = A \quad (12.14)$$

$$\begin{aligned} \implies -A \left[f^2 - \frac{f'}{\eta} \int_0^\eta f \eta d\eta \right] - A \left[\frac{2f'}{\eta} \int_0^\eta f \eta d\eta \right] &= \frac{g}{\eta} + g' \\ \implies -A \left[f^2 + \frac{f'}{\eta} \int_0^\eta f \eta d\eta \right] &= \frac{g}{\eta} + g', \end{aligned} \quad (12.15)$$

Questa non può essere risolta finchè vi compaiono due funzioni incognite cioè $f(\eta)$ e $g(\eta)$. Ricordando che la prima rappresenta il profilo di U e la seconda quella di $\langle u'v' \rangle$ (vedi 12.5) si capisce che bisogna introdurre un vincolo tra le 2 grandezze.

\implies **Ipotesi II:** esiste un equilibrio locale delle turbolenza per cui si può utilizzare una “Chiusura Turbolenta alla Boussinesq”:

$$-\langle u'v' \rangle = \nu_T \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \text{dove } \nu_T = \text{viscosità turbolenta} \quad (12.16)$$

Passando alla soluzione autosimilare per U e $\langle u'v' \rangle$:

$$U_m^2 g(\eta) = \nu_T \frac{U_m f'}{\tilde{l}}, \implies \boxed{g = f' \frac{\nu_T}{U_m \tilde{l}} = \frac{f'}{R_{\tilde{l}_T}}} \quad (12.17)$$

dove $R_{\tilde{l}_T} \equiv \frac{U_m \tilde{l}}{\nu_T}$ è il Numero di Reynolds turbolento del Getto.

Sostituendo nella equazione (12.15) si ottiene:

$$-A \left[f^2 + \frac{f'}{\eta} \int_0^\eta f \eta d\eta \right] = \frac{f'}{\eta R_{\tilde{l}_T}} + \frac{d}{d\eta} \left(\frac{f'}{R_{\tilde{l}_T}} \right). \quad (12.18)$$

Si deve ora introdurre l'**Ipotesi III** richiedendo che anche $R_{\tilde{l}_T}$ non dipenda da x . Dalle osservazioni sperimentali risulta $R_{\tilde{l}_T} \cong \text{cost.}$

$$\alpha^2 \left[f^2 + \frac{f'}{\eta} \int_0^\eta f \eta d\eta \right] + \frac{f'}{\eta} + f'' = 0, \quad \text{dove } \alpha^2 = AR_{\tilde{l}_T}. \quad (12.19)$$

Si mostra per diretta sostituzione che una soluzione di tale equazione è la **funzione a campana**:

$$f(\eta) = 2 \left(1 + \frac{\alpha^2 \eta^2}{4} \right)^{-2} \quad (12.20)$$

e sostituendo tale soluzione nella definizione di U si ottiene:

$$U(x, r) = 2U_m(x) \left(1 + \frac{\alpha^2 \eta^2}{4} \right)^{-2} = U_a \left(1 + \frac{\alpha^2 \eta^2}{4} \right)^{-2} \quad \text{cioè } U_a = 2U_m. \quad (12.21)$$

Si mostra, infine, che fissare il valore di α equivale a dare una **definizione operativa** di $\tilde{l}(x)$ che era stata genericamente definita (equazione 11.3c) come la distanza dall'asse a cui U è una frazione prefissata di U_a .

Per semplicità si pone $\alpha^2 = 1$ per cui alla distanza $r = \tilde{l}(x) (\eta = 1)$ dall'asse la velocità è: $U(x, \eta = 1, \alpha = 1) = U_a(x) \left(1 + \frac{1}{4} \right)^{-2} = 0.64 U_a(x)$.

Il problema si chiude calcolando A e C da informazioni

1. sperimentali: $R_{\tilde{l}_T} \cong 15 \implies A = \alpha^2 / R_{\tilde{l}_T} = 1 / R_{\tilde{l}_T} \cong 0.067$;
2. teoriche: con la (12.20) si ha $\sqrt{2\pi \int_0^\infty \eta f^2 d\eta} = \sqrt{16\pi/3} \implies C \cong 3.65$;

per cui

$$\tilde{l}(x) \cong 0.067x, \quad U_a(x) \cong 2CU_i \frac{L_M}{x} = 7.3U_i \frac{L_M}{x} \quad \text{con } L_M \equiv \sqrt{\Omega_i} = \sqrt{\pi/4} d_i \quad (12.22)$$

Il confronto della soluzione esatta (12.20) con il profilo trasversale di tipo gaussiano mostra una grande somiglianza:

$$f(r) = \exp \left[- \left(\frac{r}{l_G(x)} \right)^2 \right], \quad \text{ossia} \quad f(\eta) = \exp [-\eta^2] \quad \text{con} \quad \eta \equiv \frac{r}{l_G(x)} \quad (12.23)$$

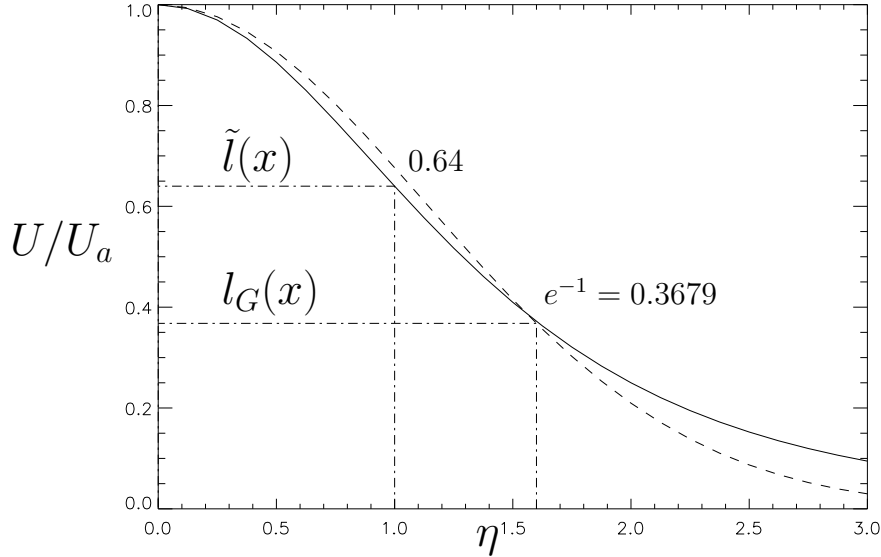


Figura 12.3: Soluzione esatta (—) di equazione (12.20) e approssimazione gaussiana (---) di equazione (12.23).

\implies per comodità d'ora in poi si userà l'approssimazione gaussiana che ha proprietà ben note. Questo comporta qualche aggiustamento ai coefficienti che esprimono la dipendenza da x .

$l_G(x)$ si definisce operativamente come la distanza dall'asse a cui:

$$U(r = l_G) = U_a f(r = l_G) = U_a f(\eta = 1) = U_a e^{-1} = 0.3679 U_a$$

$$\implies l_G = 1.6 \tilde{l} \text{ e, quindi, } l_G(x) = 0.107 x, \quad U_a(x) \cong 7 U_i \frac{L_M}{x} \quad (12.24)$$

$$Q \equiv \int_{\Omega} U d\Omega = 2\pi \int_0^{\infty} r U dr = 2\pi U_a l_G^2 \int_0^{\infty} \eta f d\eta = \pi U_a l_G^2 = 0.25 Q_i \frac{x}{L_M} \quad (12.25)$$

Anche se $U \sim x^{-1}$ risulta $Q \sim x$, per l'incremento di sezione $l_G \sim x \implies$ inglobamento di Fluido Ambiente (**Entrainment**).

12.2 Il bilancio energetico

Le relazioni esistenti tra moto medio e turbolenza possono essere chiarite con considerazioni di tipo energetico. In particolare è molto utile analizzare i meccanismi di trasporto dell'energia cinetica turbolenta.

Questi sono descritti dalla (5.12) qui riportata per convenienza

$$\underbrace{\frac{dk}{dt}}_{(0)} = - \underbrace{\langle v'_i v'_j \rangle \frac{\partial V_i}{\partial x_j}}_{(I)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\langle \frac{v'_j v_i'^2}{2} \rangle + \langle \frac{v'_j p'}{\rho} \rangle \right]}_{(II)} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2}}_{(III)} - \underbrace{\nu \left\langle \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle}_{(IV)}$$

Prima di passare all'analisi dei vari contributi descritti in sezione 5.4.3 conviene fare uno studio degli O.d.G. dei termini in maniera analoga a quello fatto per le equazioni di Reynolds.

Ricordando le scale già utilizzate si ha la seguente equazione per gli O.d.G. in cui si riporta per ogni gruppo l'ordine del termine maggiore:

$$\underbrace{\left[\frac{\tilde{U} q^2}{\tilde{L}} \right]}_{(0)} \quad \underbrace{\left[\frac{\tilde{U} q^2}{\tilde{l}} \right]}_{(I)} \quad \underbrace{\left[\frac{q^3}{\tilde{l}} \right]}_{(II)} \quad \underbrace{\left[\frac{\nu q^2}{\tilde{l}^2} \right]}_{(III)} \quad \underbrace{[?]}_{(IV)} \quad (12.26)$$

e, moltiplicando per $\tilde{l}/(\tilde{U} q^2)$:

$$\underbrace{\left[\frac{\tilde{l}}{\tilde{L}} \right]}_{(0)} \quad \underbrace{[1]}_{(I)} \quad \underbrace{\left[\frac{q}{\tilde{U}} \right]}_{(II)} \quad \underbrace{\left[\frac{1}{R_{\tilde{l}}} \right]}_{(III)} \quad \underbrace{[?]}_{(IV)} \quad (12.27)$$

dove

$$R_{\tilde{l}} \equiv \frac{\tilde{U} \tilde{l}}{\nu} \quad \text{e} \quad \frac{q}{\tilde{U}} = \left[\left(\frac{\tilde{l}}{\tilde{L}} \right)^\beta \right] \quad \text{con } \beta > 0 \quad (\beta = 1/2 \text{ per i Getti}). \quad (12.28)$$

Nelle equazioni qui sopra non si è specificato l'O.d.G. del termine dissipativo. Questo si deriva per gradi, iniziando dalla valutazione del bilancio in (12.27) nei limiti $\tilde{l}/\tilde{L} \rightarrow 0$ e $R_{\tilde{l}} \rightarrow \infty$;

In tali condizioni asintotiche solo il termine di produzione (II) è di $\mathcal{O}(1)$. Quindi affinché la (12.27) sia bilanciata anche il termine dissipativo deve essere dello stesso O.d.G. e, quindi:

$$\mathcal{P} + \varepsilon = 0, \quad \text{dove} \quad \mathcal{P} \equiv \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \langle v_i v_j \rangle, \quad \varepsilon \equiv \nu \left\langle \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle \quad (12.29)$$

con **equilibrio** tra produzione \mathcal{P} e dissipazione ε [anche (5.14)].

La congettura che $\mathcal{O}(\varepsilon) = q^3/\tilde{l}_T$ sembra in contraddizione con una valutazione naive secondo cui l'O.d.G. di ε dovrebbe contenere ν cioè $R_{\tilde{l}}$. Viceversa tale congettura:

1. è stata verificata sperimentalmente (Sreenivasan, 1984). Si è osservato che in condizioni di T.L. il gruppo adimensionale $\varepsilon \tilde{l}_T / q^3$ è indipendente da $R_{\tilde{l}}$;
2. è logica se si considera il processo di **cascata energetica** per cui l'energia meccanica è estratta dal moto medio alla scala integrale \tilde{l}_T e trasferita a strutture sempre più piccole fino ad essere dissipata alla scala viscosa. Quindi, l'energia dissipata è proporzionale all'energia turbolenta [$\mathcal{O}(q^2)$] che fluisce lungo la cascata energetica alla frequenza q/\tilde{l}_T di rotazione dei vortici maggiori.

Per avere un'idea più completa di tutti i meccanismi dinamici è necessario includere nel bilancio energetico anche i termini che sono $\mathcal{O}(\tilde{l}/\tilde{L})$ e $\mathcal{O}[\sqrt{(\tilde{l}/\tilde{L})}]$ più piccoli dei termini \mathcal{P} e ε , in particolare i termini di trasporto (0) e (II). In condizioni mediamente stazionarie ed usando l'equazione di continuità:

$$\underbrace{U \frac{\partial k}{\partial x}}_{\mathcal{C}_1} + \underbrace{V \frac{\partial k}{\partial r}}_{\mathcal{C}_2} + \underbrace{\langle u'v' \rangle \frac{\partial U}{\partial r}}_{\mathcal{P}_1} + \underbrace{(\langle u'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle) \frac{\partial U}{\partial x}}_{\mathcal{P}_2} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[\langle v' \frac{u'^2 + v'^2}{2} \rangle + \frac{\langle v'p' \rangle}{\rho} \right] \right\}}_{\mathcal{T}} + \varepsilon = 0. \quad (12.30)$$

È ora possibile descrivere il bilancio di equazione (12.30) in termini delle soluzioni autosimilari della sezione 12.1.

Per poter far ciò è necessario ricavare una serie di risultati:

1. la soluzione autosimilare di V corrispondente alla soluzione gaussiana $U = U_a e^{-\eta^2}$ si deriva dall'equazione di continuità (11.5):

$$V(x, r) = \frac{U_a(x)A}{2\eta} \left[-1 + (1 + 2\eta^2)e^{-\eta^2} \right]; \quad (12.31)$$

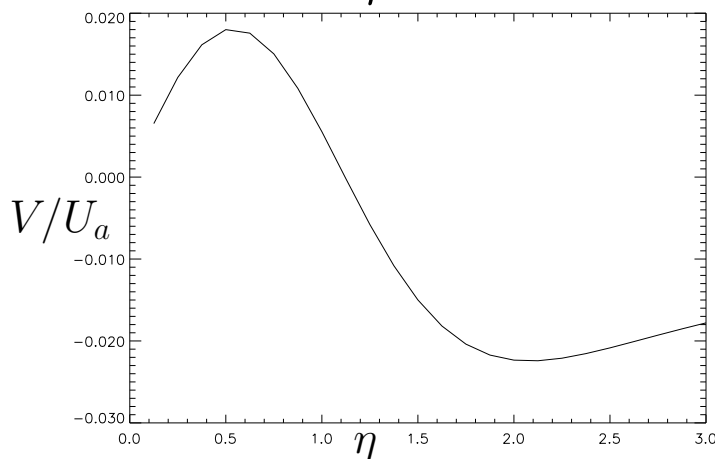


Figura 12.4: Soluzione autosimilare per V di equazione (12.31).

2. dalle definizioni di $f(\eta)$ e $U_a(x)$ risulta:

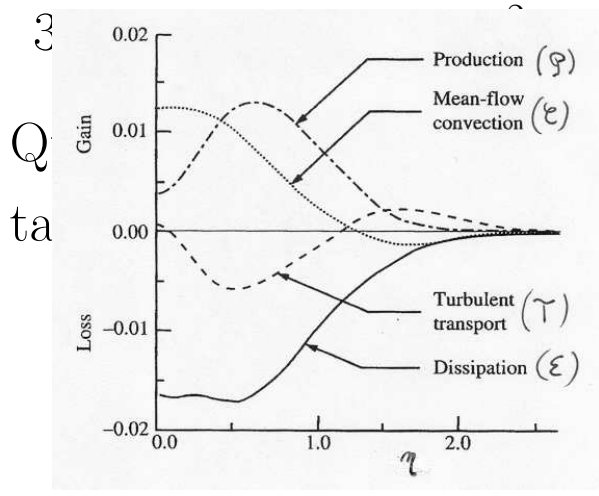
$$f(\eta) = e^{-\eta^2} \implies f' = -2\eta f \quad \text{e} \quad f'' = -2f(1 - 2\eta^2) \quad (12.32a)$$

$$U_a(x) = 7U_i L_M x^{-1} \implies \frac{dU_a}{dx} = -\frac{U_a}{x}; \quad (12.32b)$$

È ora possibile determinare la struttura autosimilare dei termini di (12.30). Tale struttura è riportata nella tabella di Appendice II. Si noti che il valore di ε si trova per differenza.

Si possono, quindi, ricavare per via teorica alcune informazioni:

1. poichè \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 e \mathcal{C}_1 decadono come f^2 per $\eta \gg 1$ mentre \mathcal{C}_2 e \mathcal{T} sono proporzionali ad f , distante dall'asse, cioè in corrispondenza dell'interfaccia con il Fluido Ambiente il bilancio è tra \mathcal{C}_2 e \mathcal{T} ;
2. per $\eta \sim 1$, l'unico termine $\mathcal{O}(1)$ cioè non proporzionale ad $A \ll 1$ è \mathcal{P}_1 che, approssimativamente, bilancia ε , come anche descritto dall'equazione di bilancio all'ordine $\mathcal{O}(1)$ [si veda (12.29)], mentre \mathcal{C} bilancia approssimativamente \mathcal{T} ;



molto minore di \mathcal{P}_2 cioè $\mathcal{P} \sim \mathcal{P}_2$.

sono confermate dai dati sperimentali

2.5:

Figura 12.5: Il bilancio tra i termini di (12.30). Le grandezze sono normalizzate con U_a e l_G (adattamento da Panchapakesan & Lumley, 1993).

Si può anche notare che ε è distribuita su tutta la regione turbolenta mentre \mathcal{P} è massima in corrispondenza della regione dove la deformazione $(\partial U / \partial r)$ è massima cioè per $\eta \sim 1$.

13 ENTRAINMENT, MIXING E TRASPORTO DI MASSA

Il bilancio energetico appena analizzato suggerisce anche informazioni relative al **Mescolamento** del fluido del Getto con il Fluido Ambiente.

Infatti si è mostrato che all'interfaccia ($\eta \gg 1$) uno dei termini dominanti è \mathcal{C}_2 cioè $V \frac{\partial k}{\partial r}$. La natura di tale trasporto convettivo è funzione della forma di V (vedi equazione 12.31) illustrata in figura 12.4.

Vicino all'interfaccia con il Fluido Ambiente $V \neq 0$ mentre $U \sim 0$. Inoltre in tale regione $V < 0$ indicando che il Fluido Ambiente fluisce nel Getto \implies **Entrainment**.

Inoltre la posizione media dell'interfaccia è stazionaria e k viene trasportata dal centro verso l'esterno ad una velocità tale da mantenere questa condizione.

Riassumendo alcune caratteristiche dell'**Entrainment**:

- (a) la portata del Getto cresce come x (vedi 12.25),
- (b) $V < 0$ vicino all'interfaccia;
- (c) il trasporto di k avviene ad una velocità opportuna per cui la posizione media dell'interfaccia è stazionaria.

Vista l'importanza del moto dell'interfaccia per la dinamica del Getto se ne analizzano alcuni dettagli.

13.1 L'interfaccia con il Fluido Ambiente

Si propone una descrizione semplificata e intuitiva del moto dell'interfaccia trascurando complicazioni formali inutili in questa sede.

I moti di T.L. mostrano fenomeni di **intermittenza** alla regione esterna ($\eta \gg 1$): nel segnale di una sonda posta in $(x, \eta) = (\hat{x}, \hat{\eta})$ si alternano bruscamente periodi di quiescenza a periodi di forti oscillazioni.

Più precisamente se si misurasse la **funzione di intermittenza** $I(\hat{x}, \hat{\eta}, t)$:

$$I(\hat{x}, \hat{\eta}, t) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } (\hat{x}, \hat{\eta}) \text{ è nella regione turbolenta} \\ 0 & \text{se } (\hat{x}, \hat{\eta}) \text{ è nella regione irrotazionale} \end{cases} \quad (13.1)$$

si otterrebbe un risultato simile a quello di figura 13.1b.

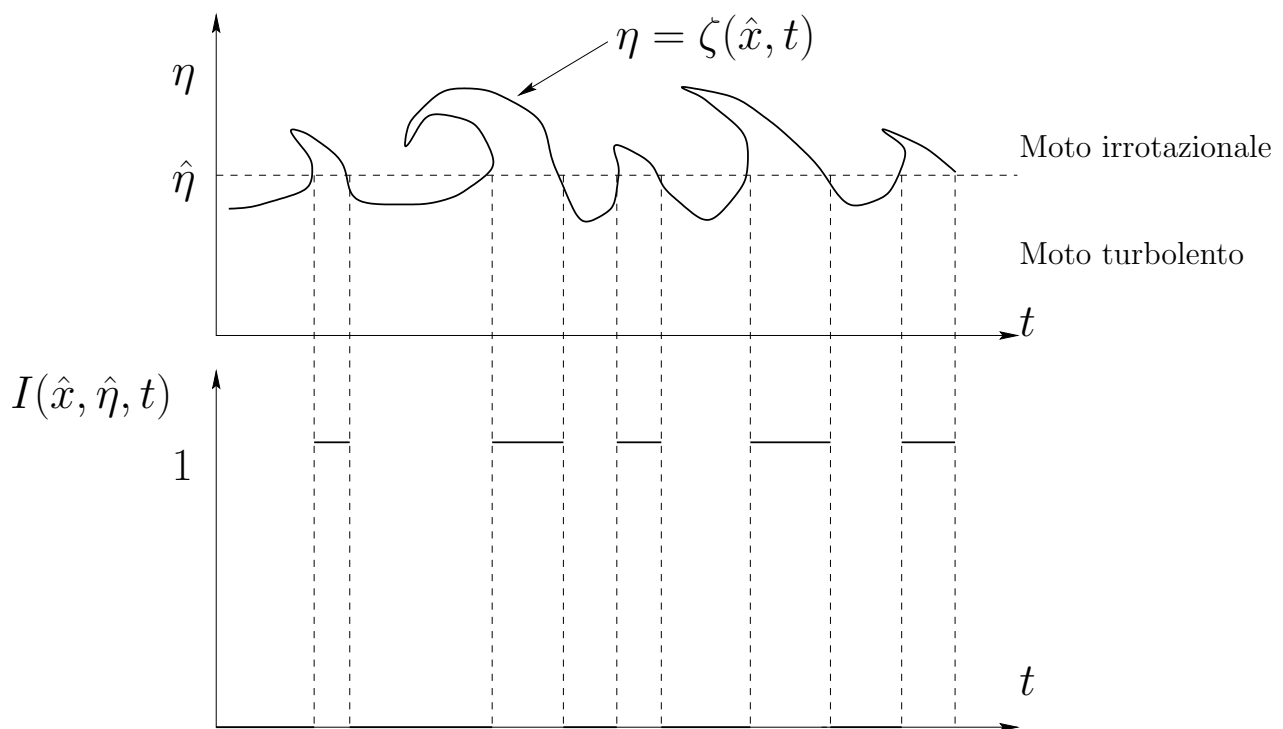


Figura 13.1: Rappresentazione schematica di un moto intermittente: (a) posizione dell'interfaccia nel tempo ad un punto spaziale $x = \hat{x}$ prefissato, (b) funzione di intermittenza corrispondente.

Se ad ogni distanza $\hat{\eta}$ dall'asse si media $I(\hat{x}, \hat{\eta}, t)$ su \hat{T} sufficientemente grande si ottiene la frazione temporale di \hat{T} che $(\hat{x}, \hat{\eta})$ risiede nella regione turbolenta: $\langle I \rangle_{\hat{T}}(\hat{x}, \hat{\eta}) = \frac{1}{\hat{T}} \int_0^{\hat{T}} I(\hat{x}, \hat{\eta}, t) dt$. Analogamente per N realizzazioni equivalenti la media di insieme $\langle I \rangle(\hat{x}, \hat{\eta}, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N I_n(\hat{x}, \hat{\eta}, t)$ è la frequenza con cui al tempo t il moto in $(\hat{x}, \hat{\eta})$ è turbolento.

Per fenomeni mediamente stazionari, come quelli da noi considerati:

$$\gamma(x, \eta) \equiv \langle I \rangle_{\hat{T}}(x, \eta) = \langle I \rangle(x, \eta) \quad (13.2)$$

è il **fattore di intermittenza** cioè la probabilità che il moto in (x, η) sia turbolento ossia il tempo che (x, η) risiede in una regione turbolenta.

Corrsin & Kistler (1954) hanno mostrato che se $\langle \zeta(x) \rangle$ è la posizione media dell'interfaccia il fattore di intermittenza per moti a T.L. è:

$$\gamma(x, \eta) = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\eta - \langle \zeta(x) \rangle}{\sqrt{2}\sigma(x)} \right) \right] \quad (13.3)$$

[con $\sigma(x)^2 = \text{varianza dello spostamento dell'interfaccia rispetto a } \langle \zeta(x) \rangle$].

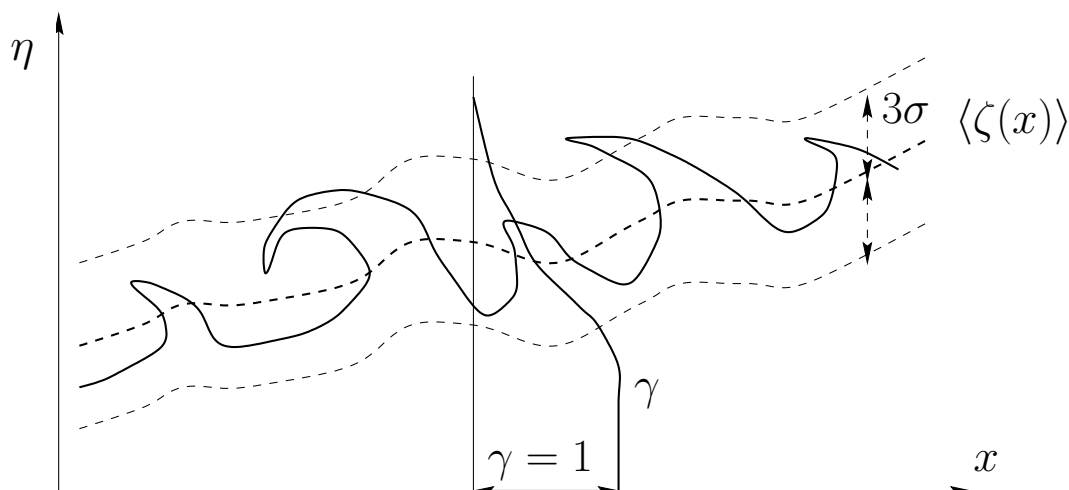


Figura 13.2: Fattore di intermittenza in un moto a T.L.

Da quanto visto mentre l_G misura l'estensione della regione turbolenta mentre σ misura l'estensione della regione su cui oscilla l'interfaccia.

Il rapporto σ/l_G è lo spessore relativo della 'corrugazione' della superficie libera. Esso varia molto in funzione delle caratteristiche del moto ($\sigma/l_G \cong 0.80$ per le Scie e $\sigma/l_G \cong 0.45$ per i Getti) ed è un indice dell'**Entrainment** all'interfaccia.

Sembra esistere una contraddizione tra il fatto che $(\sigma/l_G)_{Scie\ ass.} > (\sigma/l_G)_{Getti\ ass.}$ e il fatto che $dQ_{Scie\ ass.}/dx = 0$ (si veda anche Appendice I) mentre $dQ_{Getti\ ass.}/dx > 0$.

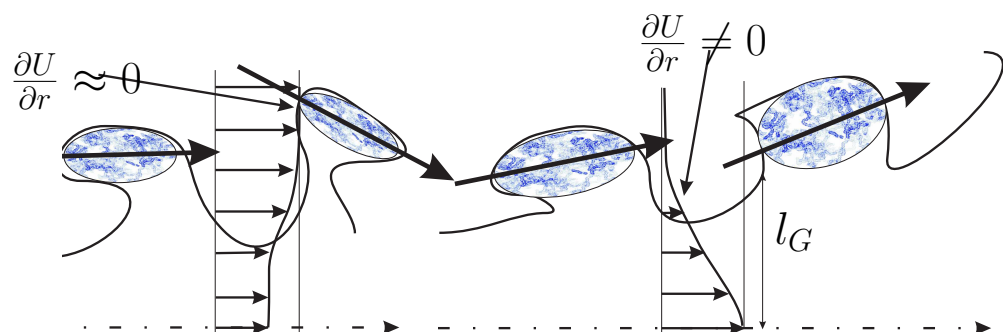
L'apparente contraddizione è chiarita se si considera l'evoluzione dell'interfaccia in vista anche della condizione al contorno (11.4) che differenzia le Scie dai Getti.

Le convoluzioni dell'interfaccia sono dovute alla forma ed evoluzione di vortici di scala spaziale σ e velocità caratteristica $q \sim U_m$. Questi inglobano una portata volumetrica $Q_e \sim U_m \sigma^2$.

Q_e non solo cresce con σ^2 ma anche con U_m e quindi per $x \gg x_i$ risulta

$$U_m \cong 0 \implies Q_e \cong 0 \text{ per le Scie, } U_m > 0 \implies Q_e > 0 \text{ per i Getti (13.4a)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} \cong 0, V \sim 0 \text{ per le Scie, } \frac{\partial U}{\partial r} \neq 0, V < 0 \text{ per i Getti. (13.4b)}$$



La (13.4a), quindi, fornisce una risposta intuitiva al fatto che mentre la regione turbolenta aumenta in presenza di un Getto questa rimane quasi costante nel caso di una Scia.

Viceversa la (13.4b) può fornire una interpretazione per il meccanismo fisico che rende possibile l'elevato **Entrainment** per il Getto.

In primo luogo si può notare che i vortici responsabili dell'**Entrainment** sono relativamente più piccoli nei Getti che nelle Scie in quanto $(\sigma/l_G)_{Getti} < (\sigma/l_G)_{Scie}$. Questo è dovuto al fatto che nel Getto esiste un trasporto convettivo in direzione trasversa che tende a

I vortici che compongono la regione di interfaccia sono orientati in dipendenza dell'intensità della deformazione $\frac{\partial U}{\partial r}$. Per i Getti essa è sufficientemente forte da allineare i vortici parallelamente alla direzione dell'interfaccia media ma questo non accade per le Scie (Mobbs, 1968).

Townsend (1976) fa rilevare come i vortici orientati casualmente abbiano una bassa capacità di inglobare il Fluido Ambiente.

Da notare che tale inefficienza è rappresentata nella soluzione autosimilare dal fatto che all'interfaccia $V_{Scie} \sim 0$ mentre abbiamo visto che per i Getti risulta $V_{Getti} < 0$.

13.2 Il trasporto di massa dei Getti

Poichè, tramite il meccanismo di **Entrainment**, i Getti mescolano grandi quantità di Fluido Ambiente al fluido turbolento

essi forniscono un utile mezzo per diluire uno scarico inquinato.

Come per il campo di velocità è possibile utilizzare una soluzione gaussiana per la concentrazione media $C(x, r)$ la cui evoluzione stazionaria è descritta dall'equazione di convezione-diffusione [si veda anche (8.4)]:

$$U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial \langle u'c' \rangle}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle v'c' \rangle)}{\partial r} = D \left[\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{C}{r^2} \right] \quad (13.5)$$

dove D = coefficiente di diffusività molecolare e

$$\mathbf{q}_T = (\langle u'c' \rangle, \langle v'c' \rangle) = \text{'flusso turbolento' di massa.}$$

Quindi, utilizzando la soluzione gaussiana:

$$C(x, r) = C_a(x) e^{-\eta^2}, \quad \text{con } \eta \equiv \frac{r}{l_C} \quad (13.6)$$

in cui l_C è definita come la distanza dall'asse a cui $C(x, r = l_C) = C_a(x) f(r = l_C) = C_a(x) f(\eta = 1) = C_a(x) e^{-1}$ si ottengono in completa analogia a quanto visto per U le seguenti relazioni:

$$l_C = A_C x, \quad C_a(x) \cong \Gamma C_i \frac{L_M}{x}, \quad \mathcal{O}(\Gamma) = 1. \quad (13.7)$$

In analogia alle equazioni (12.22) A_C si stima come l'inverso del numero di Peclet turbolento misurato sperimentalmente:

$$A_C = 1/Pe_T \cong 0.127, \quad \text{con } Pe_T = \frac{U_m l_C}{D_T},$$

$$\text{e dove } D_T = \text{diffusività turbolenta, } \mathcal{O}(D_T) = \frac{U_m l_C}{R_{l_T}^{1/2}} \quad (13.8)$$

mentre $\Gamma \cong 5.64$;

Il ruolo della turbolenza nei fenomeni di trasporto non è solo quello di provocare l'**Entrainment** di Fluido Ambiente ma

anche di contribuire in maniera non trascurabile al trasporto di massa dei traccianti passivi.

Per stimare tale contributo calcoliamo la frazione di portata massica $\dot{\mathcal{M}} \equiv \langle \int_{\Omega} ucd\Omega \rangle = 2\pi \int_0^{\infty} [UC + \langle u'c' \rangle] r dr$ (13.9) dovuta al trasporto turbolento $\dot{\mathcal{M}}_T = 2\pi \int_0^{\infty} \langle u'c' \rangle r dr$ cioè alla componente x del flusso turbolento di concentrazione $\langle u'c' \rangle$.

Tale frazione si calcola facilmente utilizzando la relazione di conservazione $\dot{\mathcal{M}} = C_i Q_i$:

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^{\infty} [UC + \langle u'c' \rangle] r dr = C_i Q_i &\implies 2\pi \int_0^{\infty} \langle u'c' \rangle r dr = C_i Q_i - 2\pi \int_0^{\infty} UC r dr \\ &\implies \frac{\dot{\mathcal{M}}_T}{\dot{\mathcal{M}}} = 1 - \frac{2\pi \int_0^{\infty} UC r dr}{C_i Q_i} \end{aligned} \quad (13.10)$$

Utilizzando ora le soluzioni autosimilari per U e C è possibile scrivere l'ultimo integrale come:

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^{\infty} UC r dr &= 2\pi U_a C_a \int_0^{\infty} e \left[-r^2 \left(\frac{l_C^2 + l_G^2}{l_C^2 l_G^2} \right) \right] r dr = \\ &= -\pi U_a C_a \left(\frac{l_C^2 l_G^2}{l_C^2 + l_G^2} \right) \left[e \left[-r^2 \left(\frac{l_C^2 + l_G^2}{l_C^2 l_G^2} \right) \right] \right]_0^{\infty} = \pi U_a C_a \left(\frac{l_C^2 l_G^2}{l_C^2 + l_G^2} \right). \end{aligned} \quad (13.11)$$

Sostituendo in (13.10) e ricordando le soluzioni autosimilari per U_a/U_i e C_a/C_i e la definizione $Q_i = \Omega_i U_i$ si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\mathcal{M}}_T}{\dot{\mathcal{M}}} &= 1 - \pi \frac{1}{\Omega_i} \frac{U_a C_a}{U_i C_i} \left(\frac{l_C^2 l_G^2}{l_C^2 + l_G^2} \right) = 1 - \pi \frac{1}{L_M^2} \left(\frac{7L_M}{x} \right) \left(\frac{5.64L_M}{x} \right) \left(\frac{A^2 A_C^2}{A^2 + A_C^2} \right) x^2 = \\ &= 1 - (7)(5.64)\pi \left(\frac{(0.107)^2 (0.127)^2}{(0.107)^2 + (0.127)^2} \right) \cong 0.17 \end{aligned} \quad (13.12)$$

cioè circa il 17% della portata massica è dovuta al trasporto turbolento.

14 FENOMENI DENSO-MECCANICI

Finora si sono analizzati moti di T.L. di fluidi a $\rho = \text{cost.}$ che evolvono a causa di azioni puramente meccaniche.

Esiste però una seconda classe di moti in cui le azioni motrici sono di origine denso-meccanica cioè in cui oltre a forzanti esterni ed interni di tipo meccanico esistono forzanti dovuti a gradienti di densità. Per tali moti in generale $\rho = \rho(P, \mathcal{T}, S, ..)$ dove P = pressione, \mathcal{T} = temperatura e S = salinità. Una classificazione di tali moti è proposta in figura 14.1:

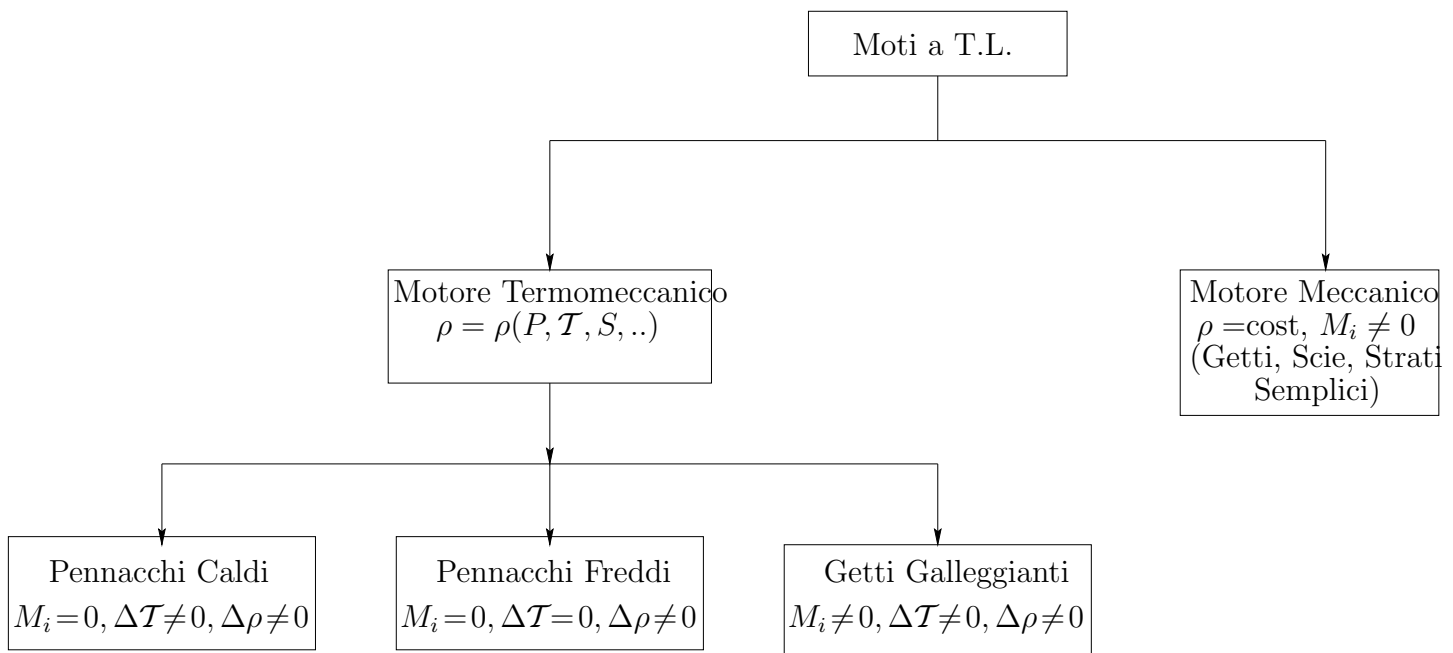


Figura 14.1: Classificazione dei moti a T.L.

Esempi di **Pennacchi Caldi** sono il fumo di una sigaretta oppure le correnti ascensionali atmosferiche dette Termiche.

Esempi di **Pennacchi Freddi** sono le correnti di densità quali quelle di un fiume carico di sedimenti che sfocia in mare.

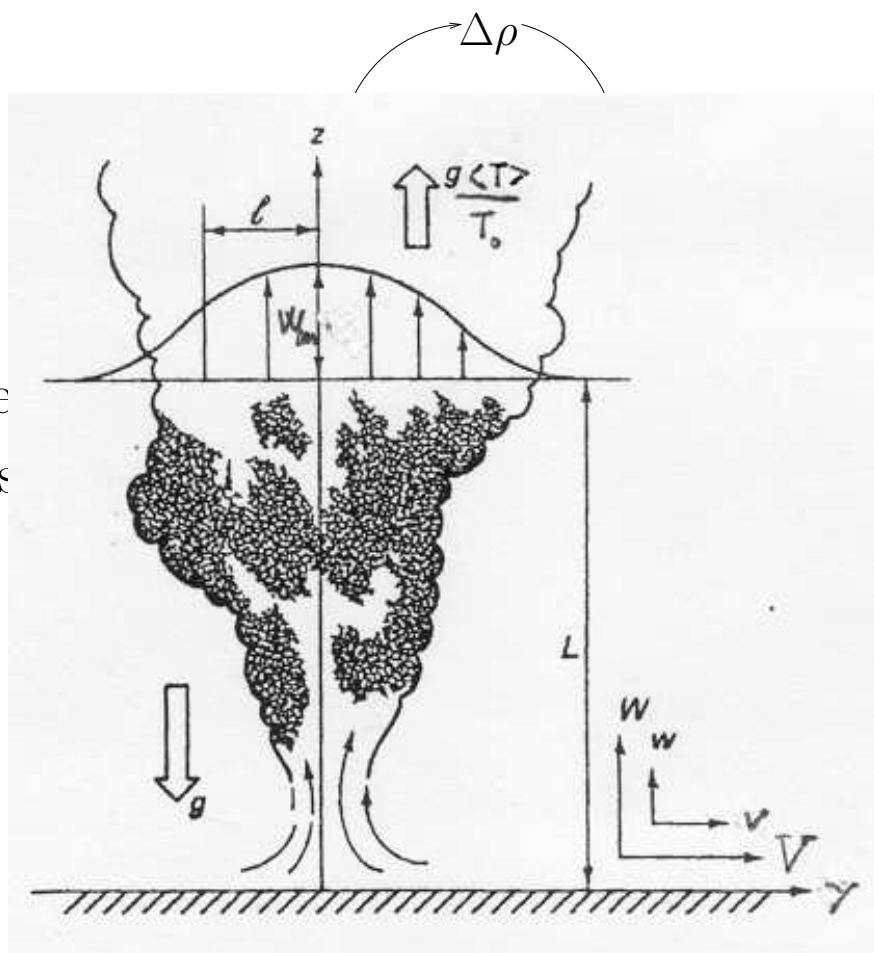
14.1 I Pennacchi

14.1.1 I Pennacchi Caldi

Si analizzano in dettaglio i **Pennacchi Caldi** (si veda figura 14.3) per i quali:

1. l'evoluzione del Pennacchio è governata da un meccanismo di autoalimentazione (feedback)

2. è nece
ne di s



caldi.

dell'equazio-
di Boussinesq.

Figura 14.3: Descrizione grafica del moto di un **Pennacchio Caldo** tipo Termica. Adattamento da Tennekes & Lumley (1972).

14.1.2 Le equazioni

L'approssimazione di Boussinesq consiste nel sostituire $\rho = \rho_0$ in tutti i termini dell'equazione del moto tranne che nel termine gravitazionale in cui invece si usa l'equazione di stato linearizzata:

$$\boxed{\rho = \rho_0 [1 - \alpha(\mathcal{T} - \mathcal{T}_0)]} \quad (14.1)$$

in cui \mathcal{T}_0 =temperatura di riferimento, $\rho_0 = \rho(\mathcal{T}_0)$ =densità a \mathcal{T}_0 e $\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathcal{T}} \right)_{P=cost}$ = coefficiente di dilatazione isobara.

Tale approssimazione vale per piccoli valori del numero di Mach e per piccole variazioni di densità $[(\rho - \rho_0)/\rho_0 \ll 1]$.

Utilizzando la pressione dinamica media P_d invece di quella totale P ed ipotizzando il mezzo gassoso ($\alpha = 1/\mathcal{T}_0$) l'equazione di Reynolds diventa:

$$\boxed{V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle v'_i v'_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_d}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2} - g \frac{\langle \mathcal{T} \rangle - \mathcal{T}_0}{\mathcal{T}_0} \delta_{i3} = 0.} \quad (14.2)$$

A questa si aggiungono l'equazione di continuità e l'equazione di trasporto di $\langle \mathcal{T} \rangle$:

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0 \quad (14.3)$$

$$V_j \frac{\partial \langle \mathcal{T} \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \theta v_j \rangle}{\partial x_j} - K \frac{\partial^2 \langle \mathcal{T} \rangle}{\partial x_j^2} = 0 \quad (14.4)$$

dove θ =fluttuazione turbolenta di \mathcal{T} e K =diffusività termica. [Il termine diffusivo proviene da un legame costitutivo noto

come Legge di Fourier ($\mathbf{q}_{term.} = -K \nabla \langle \mathcal{T} \rangle$) analoga alla legge di Fick (1.5).]

In linea di principio è ora possibile ricercare una soluzione autosimilare con la stessa procedura usata per i Getti Freddi:

1. semplificazione delle equazioni tramite l'analisi degli o.d.g.
(si vedano le scale di figura 14.3);

2. definizione di soluzioni autosimilari del tipo:

$$W(r, z) = W_m(z) f(\eta), \quad -\langle v'w' \rangle = W_m^2(z) h(\eta), \quad (14.5a)$$

$$\langle \mathcal{T} \rangle(r, z) = T_m(z) F(\eta), \quad -\langle \theta v' \rangle = W_m(z) T_m(z) H(\eta), \quad \eta \equiv \frac{r}{l(z)} \quad (14.5b)$$

3. sostituzione nelle equazioni semplificate e determinazione

Ma, sapendo che la forma trasversa delle soluzioni è di tipo gaussiano, si analizza in maniera semplificata la dipendenza da z cioè:

1. si deriva dalle equazioni approssimate una legge di conservazione (simile alla $\partial M / \partial x = 0$ dei Getti) che funga da vincolo per determinare la dipendenza da z delle grandezze;
2. si usano considerazioni dimensionali per esplicitare la dipendenza.

Dall'analisi degli o.d.g. di (14.4) si ha l'equazione approssimata:

$$V \frac{\partial \langle \mathcal{T} \rangle}{\partial r} + W \frac{\partial \langle \mathcal{T} \rangle}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle v' \theta \rangle)}{\partial r} = 0 \quad (14.6)$$

che usando l'equazione di continuità assume la forma conservativa:

$$\frac{\partial(rV\langle\mathcal{T}\rangle)}{\partial r} + \frac{\partial(rW\langle\mathcal{T}\rangle)}{\partial z} + \frac{\partial(r\langle v'\theta\rangle)}{\partial r} = 0. \quad (14.7)$$

Integrando su $0 < r < \infty$ l'equazione approssimata (14.7) si ottiene il vincolo cercato secondo cui il **Flusso di Galleggiamento specifico**

$$B \equiv \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} g \Delta \rho W d\Omega, \quad \text{con } \Delta \rho \equiv \rho_a - \rho \text{ e } [B] = L^4 T^{-3} \quad (14.8)$$

non dipende da z . Infatti considerando il caso dei **Pennacchi Caldi** risulta, utilizzando l'approssimazione di Boussinesq con $\rho_0 = \rho_a$ per cui

$1/\rho \approx 1/\rho_a$ e $\Delta \rho \approx \rho_a - \rho_a [1 - \alpha(\langle\mathcal{T}\rangle - \mathcal{T}_a)] = \alpha(\langle\mathcal{T}\rangle - \mathcal{T}_a)\rho_a$ e utilizzando \mathcal{T}_a come temperatura di riferimento:

$$B \approx \frac{1}{\rho_a} \int_{\Omega} g \alpha (\langle\mathcal{T}\rangle - \mathcal{T}_a) \rho_a W d\Omega = g \alpha \int_{\Omega} W \langle\mathcal{T}\rangle d\Omega \quad (14.9)$$

[circa $g \times$ portata volumetrica del Pennacchio]. Quindi

$$0 = \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial(rV\langle\mathcal{T}\rangle)}{\partial r} + \frac{\partial(rW\langle\mathcal{T}\rangle)}{\partial z} + \frac{\partial(r\langle v'\theta\rangle)}{\partial r} \right] dr = \\ = \left[r(V\langle\mathcal{T}\rangle + \langle v'\theta\rangle) \right]_0^{\infty} + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\infty} r W \langle\mathcal{T}\rangle dr = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\Omega} W \langle\mathcal{T}\rangle d\Omega \quad (14.10)$$

cioè per i Pennacchi non vale $\partial M/\partial x = 0$ ma $\partial B/\partial z = 0$.

Si procede utilizzando l'analisi dimensionale e riconoscendo che, essendo $W_i = Q_i = M_i = 0$, tutte le grandezze di moto possono solo dipendere da B_i, z, ν :

$$W_m = W_m(B_i, z, \nu), \quad Q = Q(B_i, z, \nu), \quad M = M(B_i, z, \nu). \quad (14.11)$$

Quindi W_m si determina usando la coppia di base (B_i, z) :

$$W_m = B_i^{1/3} z^{-1/3} f(R_z) \quad \text{dove} \quad R_z = \frac{B_i^{1/3} z^{2/3}}{\nu}. \quad (14.12)$$

Per $R_z \gg 1$ (cioè per $z \gg \nu^{3/2} B_i^{-1/2}$) il Pennacchio turbolento è pienamente sviluppato e si ipotizza che non ci sia più dipendenza da ν ossia da R_z . Per tali condizioni si trova:

$$\boxed{W_m = 4.7 \left(\frac{B_i}{z} \right)^{1/3} \quad \text{per} \quad z \gg \nu^{3/2} B_i^{-1/2}.} \quad (14.13)$$

Analogamente si trovano le soluzioni per Q e M :

$$\boxed{Q = 0.15(B_i z^5)^{1/3}, \quad M = 0.35(B_i z^2)^{2/3} \quad \text{per} \quad z \gg \nu^{3/2} B_i^{-1/2}} \quad (14.14)$$

cioè sia $\partial Q/\partial z$ che $\partial M/\partial z$ crescono con z .

$\partial M/\partial z > 0$ è dovuto al fatto che si ha conversione di energia potenziale di galleggiamento in energia cinetica.

Infatti analizzando la componente z dell'equazione di Reynolds semplificata:

$$V \frac{\partial W}{\partial r} + W \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \langle v' w' \rangle)}{\partial r} - g \frac{\langle \mathcal{T} \rangle}{\mathcal{T}_0} = 0 \quad (14.15)$$

si nota come

$$\frac{\partial W^2}{\partial z} \propto g \frac{\langle \mathcal{T} \rangle}{\mathcal{T}_0} \quad \text{ossia} \quad W^2 \propto \int g \frac{\langle \mathcal{T} \rangle}{\mathcal{T}_0} dz. \quad (14.16)$$

Infine è utile definire il Numero di Reynolds del Pennacchio

R_P confrontando le espressioni di Q e M :

$$R_P \equiv \frac{Q B_i^{1/2}}{M^{5/4}} = 0.557 \quad (14.17)$$

cioè R_P è una costante del moto.

14.1.3 I Pennacchi Freddi e la Stratificazione dell'Ambiente

Nei moti dei **Pennacchi Freddi** risulta $\Delta\rho \neq 0$ anche se $\Delta\mathcal{T} = 0$. Un caso classico è relativo all'evoluzione di masse 'd'acqua dolce' in 'Ambienti Salati' (acque marine). Per questi:

1. l'evoluzione è governata da un meccanismo di autoalimentazione in cui il gradiente di salinità ΔS prende il posto di $\Delta\mathcal{T}$:

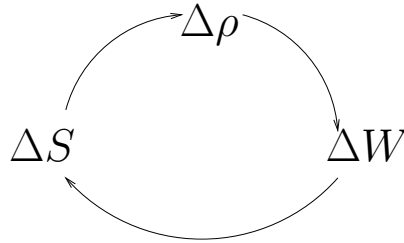


Figura 14.4: Processo di autoalimentazione per i **Pennacchi Freddi**.

2. la stratificazione dell'Ambiente è fondamentale perchè riduce il mescolamento verticale. Infatti, la turbolenza deve compiere del lavoro per far salire fluido denso e far scendere fluido leggero [meccanismo simile a quello descritto dalla (14.16)].

L'importanza della stratificazione dell'Ambiente/Galleggiamento rispetto alla convezione è misurata dal **Numero di Richardson**:

$$R_i \equiv -\frac{g \frac{\partial \rho}{\partial z}}{\rho \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \quad (14.18)$$

in cui il segno meno è introdotto perchè negli **Ambienti stabilmente stratificati** risulta $\frac{\partial \rho}{\partial z} < 0$ cioè $R_i > 0$.

Gli Ambienti Stratificati sono classificati come segue:

$R_1 < 1$	Debolmente Stratificato	si trascura la stratificazione
$1 \leq R_i < 5$	Stratificato	/
$R_i > 5$	Fortemente Stratificato	si incontra di rado

14.2 I Getti Galleggianti

Come già detto si tratta di moti a T.L. in cui $M_i \neq 0$ e $B_i \neq 0$. Si studia il moto in condizioni semplificate cioè ipotizzando che:

1. l'asse longitudinale del Getto sia verticale;
2. il moto sia pienamente sviluppato per cui le variabili di moto non dipendano da ν ma solo da M_i , Q_i , B_i e z .

Come per i Pennacchi si usano argomenti di analisi dimensionale e, in analogia a $L_M \equiv \sqrt{\Omega_i} = \frac{Q_i}{\sqrt{M_i}}$ si introduce la scala di lunghezza:

$$L_B \equiv \frac{M_i^{3/4}}{B_i^{1/2}} \quad \text{con} \quad L_B \geq L_M. \quad (14.19)$$

In prima battuta si trascura la dipendenza da Q_i e si sceglie come base dimensionale la coppia (M_i, B_i) per cui:

$$W_m = M_i^{-1/4} B_i^{1/2} f\left(\frac{z B_i^{1/2}}{M_i^{3/4}}\right) \quad \text{ossia} \quad W_m = M_i^{-1/4} B_i^{1/2} f\left(\frac{z}{L_B}\right). \quad (14.20)$$

L'espressione esatta della funzione $f(z/L_B)$ si ottiene considerando separatamente i due limiti $B_i \rightarrow 0$ e $M_i \rightarrow 0$ ossia $z \ll L_B$ e $z \gg L_B$:

- limite $B_i \rightarrow 0$: il Getto Galleggiante tende al comportamento di un Getto \implies W_m deve essere indipendente da B_i .

Ciò si impone richiedendo che in (14.20) non compaia più B_i :

$$W_m = c_M M_i^{-1/4} B_i^{1/2} \left(\frac{z B_i^{1/2}}{M_i^{3/4}} \right)^{-1} = c_M \frac{M_i^{1/2}}{z} = c_M W_i \frac{L_M}{z} \quad \text{per } z \ll L_B \quad (14.21)$$

che è una relazione tipica dei Getti (si vedi 12.24).

- limite $M_i \rightarrow 0$: il Getto Galleggiante tende al comportamento di un Pennacchio $\implies W_m$ deve essere indipendente da M_i . Ciò si impone richiedendo che in (14.20) non compaia più M_i :

$$W_m = c_B M_i^{-1/4} B_i^{1/2} \left(\frac{z B_i^{1/2}}{M_i^{3/4}} \right)^{-1/3} = c_B \left(\frac{B_i}{z} \right)^{1/3} \quad \text{per } z \gg L_B \quad (14.22)$$

che è una relazione tipica dei Pennacchi (si veda equazione 14.13);

Riassumendo si può affermare che il Getto Galleggiante si comporta come un Getto in prossimità dell'immissione ($z \ll L_B$) e come un Pennacchio molto distante dall'immissione ($z \gg L_B$).

Nella regione di transizione $L_M < z < L_B$ il comportamento è quello più complesso di un vero Getto Galleggiante cioè per cui contano sia M_i che B_i . Più in dettaglio:

- se $L_B \approx L_M$ il Getto, con moto turbolento pienamente sviluppato per $z \gg L_M \approx L_B$, si comporta da Pennacchio già vicino all'immissione;

- se invece $L_M \ll L_B$ si ha per z crescente una regione di moto non sviluppato ($z < L_M$), una regione di Getto Semplice ($L_M < z < L_B$), una regione di Getto Galleggiante ($z \geq L_B$) e una regione di Pennacchio ($z \gg L_B$).

Per analizzare in dettaglio il regime di Getto Galleggiante si reintroduce la dipendenza delle variabili di moto da Q_i e si definisce il Numero di Richardson del Getto Galleggiante:

$$R_G \equiv \frac{L_M}{L_B} \stackrel{(14.19)}{=} \left(\frac{Q_i}{M_i^{1/2}} \right) \left(\frac{B_i^{1/2}}{M_i^{3/4}} \right) = \frac{Q_i B_i^{1/2}}{M_i^{5/4}} \quad (14.23)$$

per cui per $R_G \approx 1$, cioè $L_B \approx L_M$, il Getto Galleggiante si comporta da Pennacchio mentre per $R_G \ll 1$, cioè $L_M \ll L_B$, si ha un comportamento più complesso.

Si separano i comportamenti asintotici del Getto Galleggiante nel regime intermedio sulla base dell'andamento di Q^* cioè di Q/Q_P .

Poichè R_P di (14.17) è costante esso può essere scritto in funzione delle variabili di ingresso:

$$R_P \equiv \frac{Q_P B_i^{1/2}}{M_i^{5/4}} \implies Q_P = R_P M_i^{5/4} B_i^{-1/2} \text{ e anche } \frac{R_G}{R_P} = \frac{Q_i}{Q_P}. \quad (14.24)$$

È quindi possibile definire la portata adimensionale

$$Q^* \equiv \frac{Q}{Q_P} = \frac{Q}{Q_i} \frac{Q_i}{Q_P} \stackrel{(14.24)}{=} \frac{Q}{Q_i} \frac{R_G}{R_P} \quad (14.25)$$

e, usando le (14.14)-(14.17)-(14.19), la coordinata verticale adimensionale z^* [**Verificare per esercizio**]:

$$z^* \equiv \frac{C_z^*}{R_P L_B} z \stackrel{(14.23)}{=} C_{z^*} \frac{z}{L_M} \frac{R_G}{R_P} \text{ con } C_{z^*} \approx \frac{0.15}{\sqrt{0.35}} \approx 0.25. \quad (14.26)$$

Specificando (14.25) ai regimi di Getto Semplice e Pennacchio:

- **Getto Semplice.** In questo caso, ricordando la (12.25), risulta che $Q/Q_i = 0.25x/L_M$ per $z \ll L_B$ e quindi, sostituendo nella (14.25):

$$Q^* = \frac{Q}{Q_i} \frac{R_G}{R_P} = 0.25 \frac{z}{L_M} \frac{R_G}{R_P} \stackrel{(14.26)}{=} z^* \quad \text{per } z^* \ll 1; \quad (14.27)$$

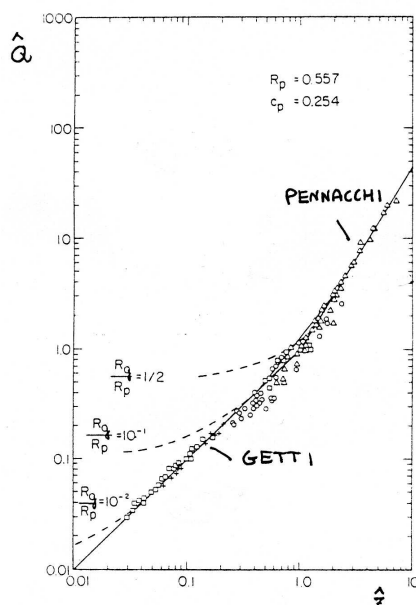
- **Pennacchio.** In questo caso dalla (14.14) e dalla (14.23):

$$\frac{Q}{Q_i} = \frac{0.15 B_i^{1/3} z^{5/3}}{R_G B_i^{-1/2} M_i^{5/4}} = \frac{0.15 z^{5/3}}{R_G (M_i^{5/4} / B_i^{5/6})} \stackrel{(14.19)}{=} \frac{0.15 \left(\frac{z}{L_B} \right)^{5/3}}{R_G}$$

per cui sostituendo nella (14.25):

$$Q^* = \frac{Q}{Q_i} \frac{R_G}{R_P} = \frac{0.15 \left(\frac{z}{L_B} \right)^{5/3} R_G}{R_G R_P} = \frac{0.15 \left(\frac{z}{L_B} \right)^{5/3}}{R_P} \propto z^{*5/3} \quad \text{per } z^* \gg 1. \quad (14.28)$$

Nel grafico bilogarithmico seguente sono riportate 2 rette con pendenza 1 e 5/3 per i 2 regimi asintotici: per $R_G/R_P \geq 1/2$ il getto si comporta da Pennacchio mentre per $R_G/R_P < 1/10$



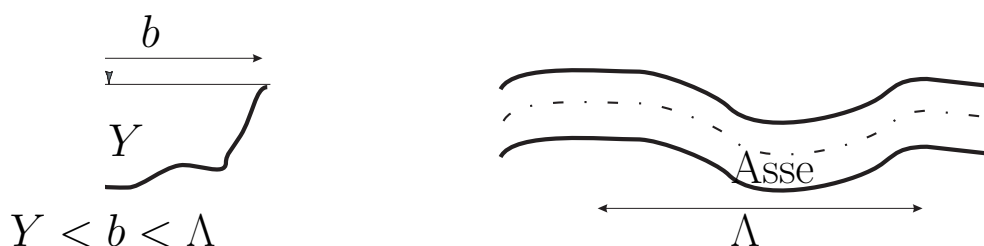
in Getto Semplice. La regione di passaggio ne di Getto Galleggiante.

15 IL MESCOLAMENTO NEGLI ALVEI NATURALI

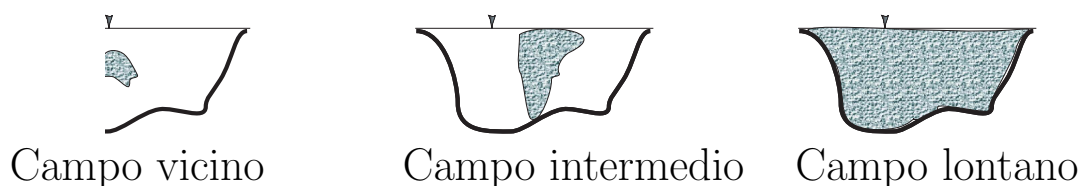
I fondamenti teorici finora sviluppati trovano applicazioni importanti ai problemi di mescolamento che avvengono in correnti fluide naturali. In particolare in un alveo fluviale il tracciante immesso nel punto di scarico si allontana e si diluisce sotto l'azione di convezione, diffusione (molecolare e turbolenta) e dispersione.

Questi fenomeni sono più facilmente quantificabili se ci si riferisce ai vari regimi che caratterizzano il mescolamento.

La geometria di un alveo fluviale è caratterizzata da 3 scale:



e i regimi del mescolamento si definiscono confrontando la dimensione (l, \mathcal{L}) della nuvola di inquinante con tali scale.



Il tracciante tende ad occupare in primo luogo la profondità e finchè ciò non avviene si è nel regime di **Campo vicino** ($l, \mathcal{L} < Y$). Quando la nuvola ha coperto tutta la profondità ma non tutta la larghezza si parla di **Campo intermedio** ($Y < l, \mathcal{L} < b$) e quando ha coperto tutta la sezione di **Campo lontano** ($l, \mathcal{L} > b$).

In funzione del regime si possono usare diverse approssimazioni:

1) **Campo vicino:** $x < x(l, \mathcal{L} = Y)$

Finchè il mescolamento verticale non è completo il tracciante ha dimensioni inferiori alla scala spaziale lagrangiana L^L che in questa geometria coincide con Y . Quindi non si è abbastanza distanti dal punto di rilascio perchè le particelle abbiano perso memoria della loro velocità iniziale (Lezione 7) \implies non è teoricamente giustificabile l'uso dello **'schema diffusivo alla Fick'** in cui [si veda (8.5)]:

$$\boxed{q_j^T = -D_{jk}^T \frac{\partial C}{\partial x_k} \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{q}^T = -\mathbf{D}^T \cdot \nabla C} \quad (15.1)$$

con \mathbf{D}^T indipendente dal tempo.

Ma l'uso pratico di tale schema è molto efficace anche nel **Campo vicino** e, quindi, si adotta tale schema e si ipotizza di poter usare l'equazione di convezione-diffusione (8.8):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} + W \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x^T \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y^T \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z^T \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (15.2)$$

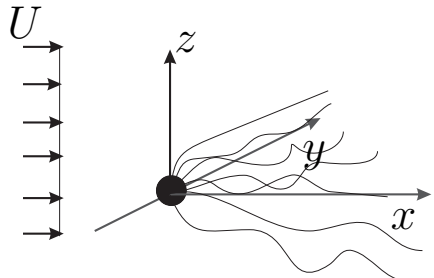
in cui il campo di velocità media è $\mathbf{V} = (U, V, W)$ e la diffusività turbolenta è $\mathbf{D}^T = (D_x^T, D_y^T, D_z^T)$ con $|\mathbf{D}^T| \approx 10^{-3} \text{m}^2/\text{s}$.

La (15.2) può essere semplificata introducendo, in primo luogo, l'ipotesi di moto unidirezionale:

$$\mathbf{V} = (U, V, W) = (U, 0, 0) \quad (15.3)$$

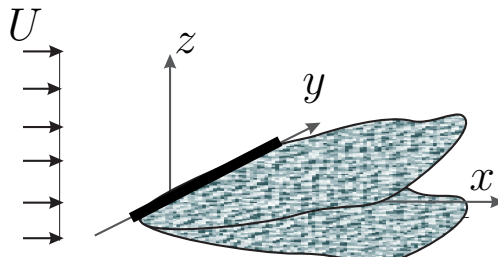
che determina l'elisione dei termini convettivi.

Se a questa ipotesi si aggiunge quella di sorgente puntuale (in \mathbf{x}_0) e stazionaria ($\partial C(\mathbf{x}_0)/\partial t = 0$) si ha un'ulteriore semplificazione:



$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x^T \frac{\partial C}{\partial x} \right) \ll \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y^T \frac{\partial C}{\partial y} \right) \approx \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z^T \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (15.4)$$

Una semplificazione ancora maggiore si ha nel caso di una sorgente lineare (lungo y) trasversa e stazionaria:

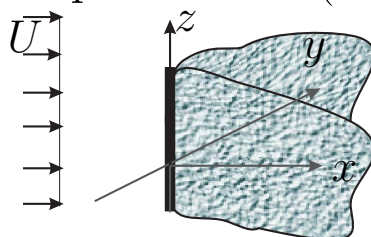


$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x^T \frac{\partial C}{\partial x} \right) \approx \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y^T \frac{\partial C}{\partial y} \right) \ll \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z^T \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (15.5)$$

2) Campo intermedio: $x(\mathcal{L} = Y) < x < x(\mathcal{L} = b)$

In questo caso si ha il completo mescolamento verticale cioè ($\mathcal{L} > Y$) e, quindi, è lecito anche teoricamente l'uso dello schema diffusivo di Fick. Due sono le semplificazioni proposte.

Nel caso di sorgente lineare verticale e stazionaria è possibile semplificare la (15.2) osservando che:



$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x^T \frac{\partial C}{\partial x} \right) \approx \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z^T \frac{\partial C}{\partial z} \right) \ll \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y^T \frac{\partial C}{\partial y} \right) \quad (15.6)$$

Ma una semplificazione ancora più efficace si ottiene osservando che in questo regime C ha debole dipendenza da z e, quindi, è opportuno usare un'equazione di convezione-diffusione ottenuta integrando la (15.2) in z .

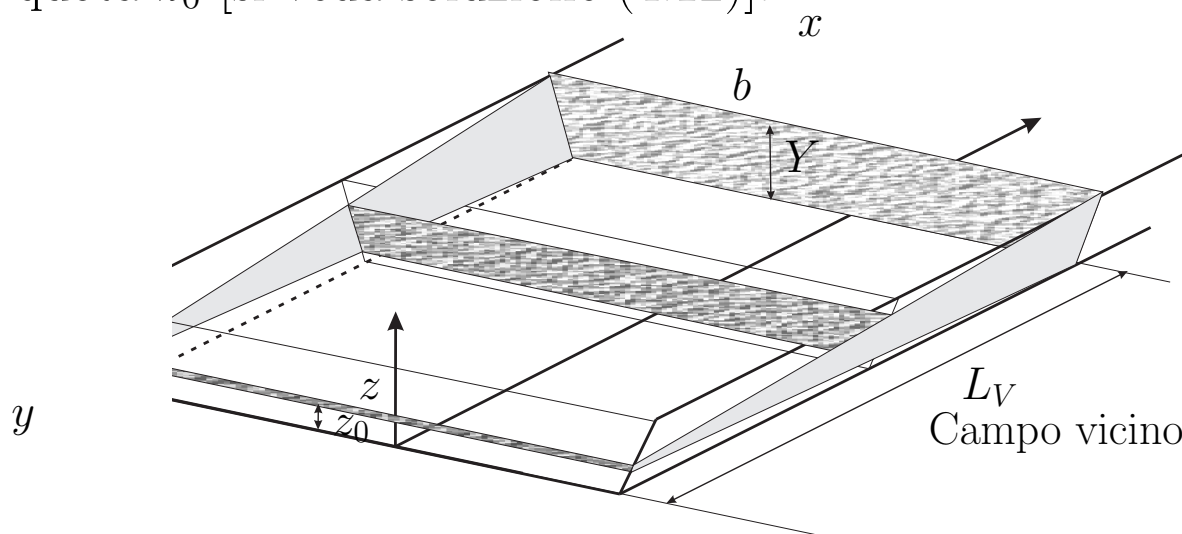
3) **Campo lontano:** $x > x(\mathcal{L} = b)$

Si è raggiunto il completo mescolamento sulla sezione \implies
 C dipende debolmente da y e z \implies si usa un'equazione di trasporto ottenuta integrando la (15.2) sulla sezione cioè in y e z .

16 IL CAMPO VICINO: SOLUZIONE PER SORGENTE LINEARE

Si sceglie di iniziare l'analisi del mescolamento in **Campo vicino** usando lo schema di sorgente lineare perchè ammette una semplificazione superiore rispetto alla sorgente puntuale [si confrontino (15.5) e (15.4)].

Quindi, nell'ipotesi di alveo di larghezza b si studia il mescolamento di un tracciante emesso da un diffusore lineare posto trasversalmente all'asse del fiume. Questo è schematizzato come una sorgente lineare e stazionaria di intensità \dot{M}/b e posta alla quota z_0 [si veda soluzione (4.12)].



Gli obiettivi dell'analisi sono:

- 1) Determinare la distanza L_V dalla sorgente a cui C è uniforme in verticale;
- 2) la dipendenza di L_V dalla quota z_0 .

Prima di procedere all'analisi formale basata sulla soluzione dalla (15.2) con opportune semplificazioni si stima il tempo T_V necessario per il completo mescolamento verticale.

Trascurando gli effetti convettivi (il moto medio trasporta a valle la nuvola) il tempo T_V può essere stimato osservando che il mescolamento è dovuto alla dissusione turbolenta ($D \ll |\mathbf{D}^T|$) e che T_V è proporzionale a Y [si veda anche (9.2)]:

$$T_V = f(Y, \bar{D}_z^T) \quad \text{con} \quad \bar{D}_z^T \stackrel{(10.9)}{=} u_* Y, \quad [\bar{D}_z^T] = L^2 T^{-1}. \quad (16.1)$$

Quindi, usando la formulazione di Elder [(10.8)-(10.9)] per la \bar{D}_z^T e il Teorema Π :

$$T_V \approx \frac{Y^2}{\bar{D}_z^T} \stackrel{(16.1)}{=} \frac{Y}{0.067 u_*}. \quad (16.2)$$

Ma in un corso d'acqua naturale

$$1\text{m} < Y < 10\text{m}, \quad U \approx 1\text{ms}^{-1}, \quad u_* = 0.1\text{ms}^{-1}$$

$$\implies T_V \approx \frac{Y}{0.067 u_*} \approx \frac{(1-10)\text{m}}{0.067(0.1\text{ms}^{-1})} \approx (1-10)10^2\text{s} \approx (10^2-10^3)\text{s}$$

che rappresenta il limite inferiore per la validità teorica dello **'schema diffusivo alla Fick'**, cioè per $t < T_V$ lo schema non è teoricamente accettabile (si veda introduzione alla Lezione 15).

Sulla base di risultati pratici lo schema viene comunque usato e si semplifica la (15.2) usando le (15.3) e (15.5):

$$\underbrace{\frac{\partial C}{\partial t}}_{\partial/\partial t=0} + U \frac{\partial C}{\partial x} + \underbrace{V \frac{\partial C}{\partial y}}_{(15.3)} + \underbrace{W \frac{\partial C}{\partial z}}_{(15.3)} = \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left(\bar{D}_x^T \frac{\partial C}{\partial x} \right)}_{(15.5)} + \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\left(\bar{D}_y^T \frac{\partial C}{\partial y} \right)}_{(15.5)} + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z^T \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (16.3)$$

Quindi l'equazione da risolvere è:

$$U \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z^T \frac{\partial C}{\partial z} \right). \quad (16.4)$$

Di questa si trovano due soluzioni di complessità crescente:

a) Modello a coefficienti costanti

In prima approssimazione di ipotizza:

$$U(z) = \bar{U}, \quad D_z^T(z) = \bar{D}_z^T \quad \text{con} \quad \bar{U}, \bar{D}_z^T = \text{medie su } Y$$

e, quindi, che la (16.4) si semplifichi nella forma:

$$\bar{U} \frac{\partial C}{\partial x} = \bar{D}_z^T \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}. \quad (16.5)$$

Questa è del tutto simile all'equazione (2.4) che governa il problema di pura diffusione molecolare 1D. L'unica differenza è che qui al membro di sinistra compare $\bar{U} \frac{\partial C}{\partial x}$ invece che $\frac{\partial C}{\partial t}$ cioè la variazione di C in una distanza pari a $x = \bar{U}t$. Quindi, utilizzando x/\bar{U} invece di t nella **soluzione fondamentale** (2.8) si ottiene, in completa analogia [si veda anche (4.12)]

$$\boxed{C_\infty(x, z) = \frac{C_1}{\sqrt{4\pi \bar{D}_z^T x / \bar{U}}} e^{-\frac{(z-z_0)^2 \bar{U}}{4\bar{D}_z^T x}}} \quad (16.6)$$

dove la costante C_1 è messa in relazione all'intensità $\dot{\mathcal{M}}$ della sorgente imponendo che la portata massica per unità di larghezza alla sezione generica sia pari a $\dot{\mathcal{M}}/b$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_\infty U dz = \dot{\mathcal{M}}/b. \quad (16.7)$$

Ma

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} C_{\infty} U dz &=_{(U=\bar{U})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_1}{\sqrt{4\pi\bar{D}_z^T x/\bar{U}}} e^{-\frac{(z-z_0)^2\bar{U}}{4\bar{D}_z^T x}} \bar{U} dz =_{[X \equiv (z-z_0)/\sqrt{4\bar{D}_z^T x/\bar{U}}]} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_1}{\sqrt{4\pi\bar{D}_z^T x/\bar{U}}} e^{-X^2} \sqrt{4\bar{D}_z^T x/\bar{U}} dX = C_1 \bar{U}. \end{aligned} \quad (16.8)$$

Quindi, confrontando (16.7) con (16.8) si ottiene $C_1 = \dot{M}/b\bar{U}$ cioè [si veda anche (4.12)]

$$\boxed{C_{\infty} = \frac{\dot{M}}{b\sqrt{4\pi\bar{D}_z^T x\bar{U}}} e^{-\frac{(z-z_0)^2\bar{U}}{4\bar{D}_z^T x}}.} \quad (16.9)$$

La presenza della superficie libera a $z = Y$ e del fondo a $z = 0$ si mette in conto tramite il **Metodo delle sorgenti immagine**. Quindi, la condizione di flusso di massa nullo ai contorni

$$\frac{\partial C_{\infty}}{\partial z}(z = 0) = \frac{\partial C_{\infty}}{\partial z}(z = Y) = 0$$

si impone introducendo delle sorgenti fittizie che bilanciano il flusso di massa di \dot{M}/b attraverso i contorni. Tramite una procedura analoga a quella usata per ottenere la (3.10) si ottiene

$$\boxed{C(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{\infty}(x, z \pm z_0 + 2nY).} \quad (16.10)$$

Come già ricordato il decadimento esponenziale di C_{∞} fa sì che i contributi delle sorgenti con n grande siano trascurabili.

Si è soliti rappresentare l'andamento della soluzione nel piano

verticale tramite una formulazione adimensionale ottenuta con:

$$C^* \equiv \frac{C}{C_M}, \quad C_M \equiv \frac{\dot{M}}{Q} = \frac{\dot{M}}{\bar{U}Yb}, \quad x^* \equiv \frac{x}{\bar{U}Y^2/\bar{D}_z^T}, \quad z^* \equiv \frac{z}{Y}. \quad (16.11)$$

Sostituendo le (16.11) in ogni contributo C_∞ della (16.10) si ha un risultato simile a quello qui riportato per $n = z_0 = 0$:

$$\begin{aligned} C_M C_\infty^* &= \frac{\dot{M}}{b \sqrt{4\pi \bar{D}_z^T \left(\frac{\bar{U}Y^2}{\bar{D}_z^T} x^* \right) \bar{U}}} e^{-\frac{(z^* \frac{Y}{\bar{U}})^2 \bar{U}}{4\bar{D}_z^T \left(\frac{\bar{U}Y^2}{\bar{D}_z^T} x^* \right)}} \\ &\Rightarrow \frac{\dot{M}}{\bar{U}Yb} C_\infty^* = \frac{\dot{M}}{b \sqrt{4\pi x^* Y \bar{U}}} e^{-\frac{(z^*)^2}{4x^*}} \\ &\Rightarrow \boxed{C_\infty^*(x^*, z^*) = \frac{1}{\sqrt{4\pi x^*}} e^{-\frac{(z^*)^2}{4x^*}}} \quad (16.12) \end{aligned}$$

Con questa soluzione adimensionale è possibile visualizzare la soluzione totale in maniera indipendente dalle scale del problema. Dalle figure 16.1 e 16.2 si possono desumere alcune utili informazioni:

1. per $z_0^* = 0.5$ la distribuzione verticale di C^* è simmetrica;
2. il picco di C^* , che per $X^* = 0$ è in corrispondenza della sorgente tende a spostarsi verso il fondo se $0 \leq z_0^* \leq 0.5$ (cioè se la sorgente è posizionata al di sotto di $Y/2$) e verso la superficie libera se $0.5 \leq z_0^* \leq 1$ (cioè se la sorgente è posta al di sopra di $Y/2$).

Questi comportamenti sono indotti solo dagli effetti di bordo ai contorni $z_0^* = 0, 1$.

Ricordando che lo scopo finale dell'analisi è la stima della distanza L_V dalla sorgente a cui si ha **completo mescolamento** sulla verticale si introduce il **Parametro di Mescolamento** $P_m(x^*)$:

$$P_m(x^*) \equiv \frac{C_{min}(x^*)}{C_{max}(x^*)}$$

Per cui si ha completo mescolamento dalla sezione x^* da cui

$$C_{min}(x^*) \approx C_{max}(x^*) \implies P_m(x^*) \approx 1$$

Poichè la condizione $P_m = 1$ si raggiunge solo per $x^* \rightarrow \infty$ (si veda figura 16.3) si usa la seguente **definizione operativa** di L_V :

$$L_V \equiv x(P_m = 0.98). \quad (16.13)$$

Dalla figura 16.3 si nota che per x^* fissato P_m è massimo per $z_0^* = 0.5$, cioè $z_0 = Y/2$ è la quota per mescolamento ottimale. Inoltre il valore $P_m = 0.98$ si raggiunge a $x^* \approx 0.134$.

Quindi, dalla definizione di L_V e usando le (16.11):

$$L_V(z_0 = Y/2) \equiv x(P_m = 0.98) \stackrel{(16.11)}{=} \frac{\bar{U}Y^2}{\bar{D}_z^T} x^*(P_m = 0.98) \approx 0.134 \frac{\bar{U}Y^2}{\bar{D}_z^T}.$$

Analogamente per sorgente al fondo (cf. figure 16.1a e 16.3):

$$x^*(P_m = 0.98) = 0.536 \implies L_V(z_0 = 0) \approx 0.536 \frac{\bar{U}Y^2}{\bar{D}_z^T}.$$

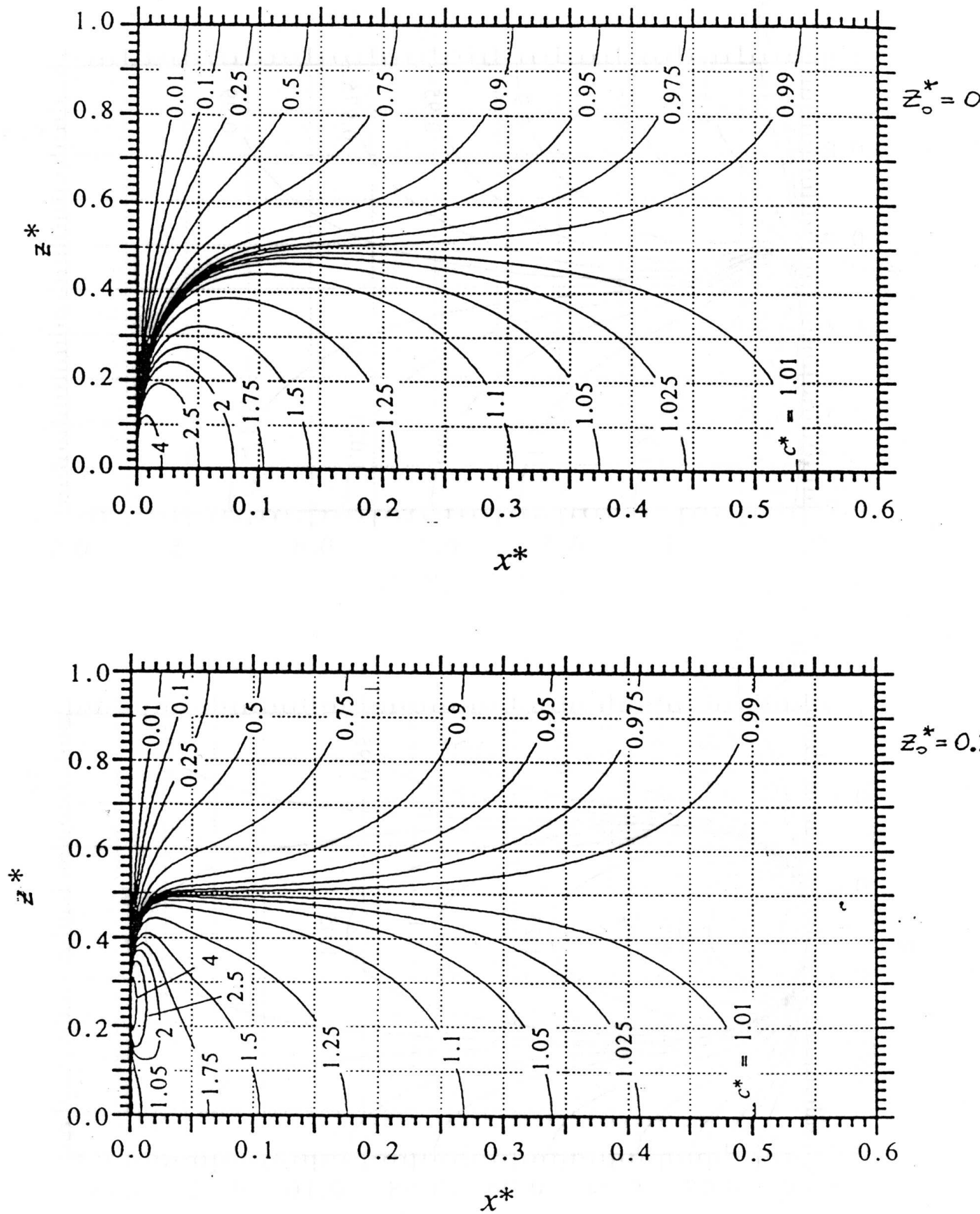


Figura 16.1: Linee a C^* costante relative all'efflusso da una sorgente distribuita lineare (modello a coefficienti costanti). $z_0^* = 0$ (alto) e $z_0^* = 0.25$ (basso).

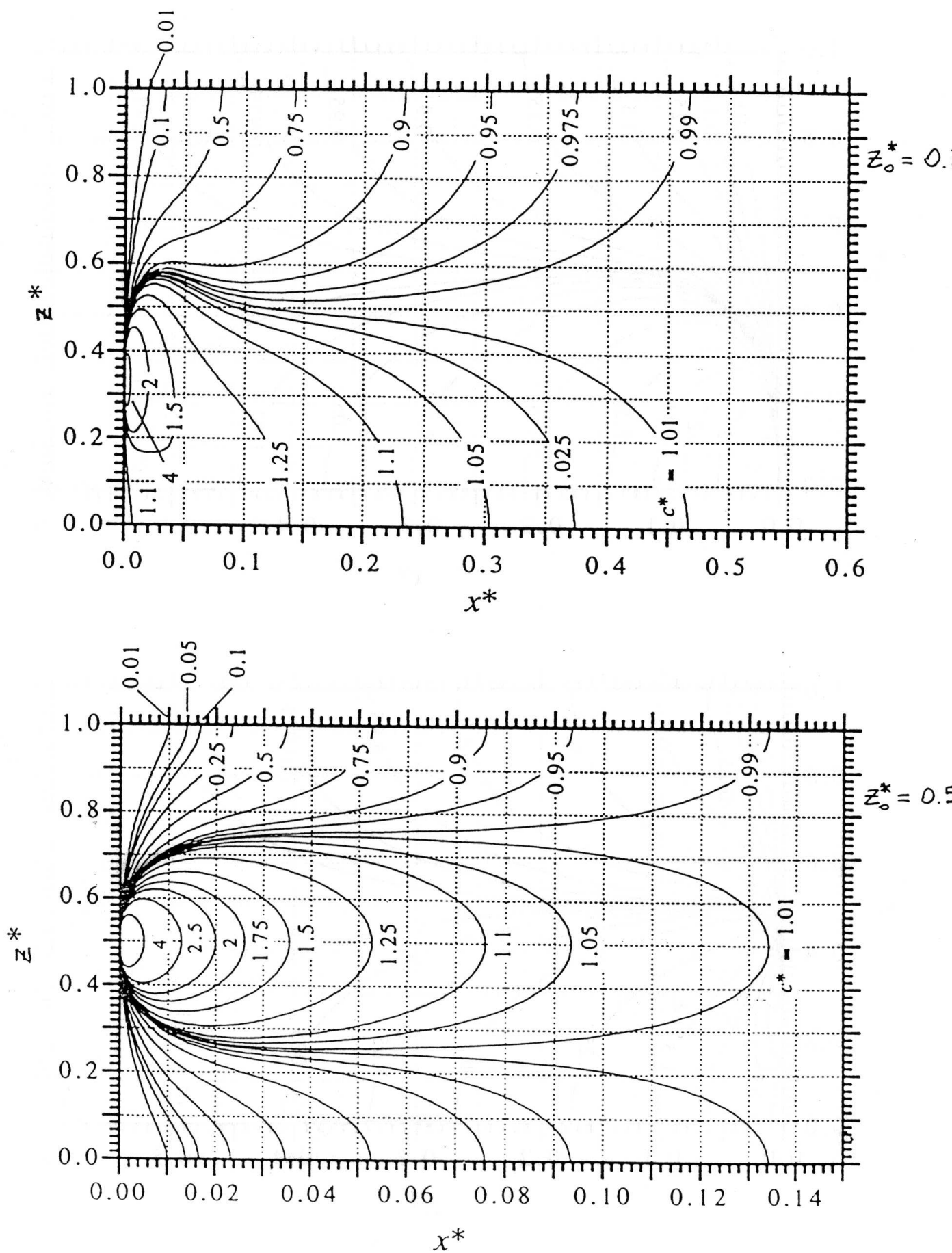


Figura 16.2: Linee a C^* costante relative all'efflusso da una sorgente distribuita lineare (modello a coefficienti costanti). $z_0^* = 0.33$ (alto) e $z_0^* = 0.50$ (basso).

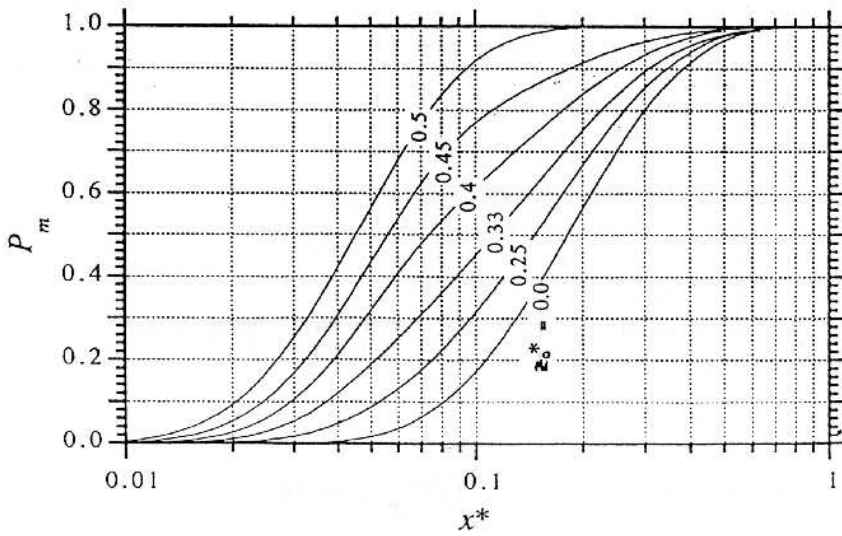
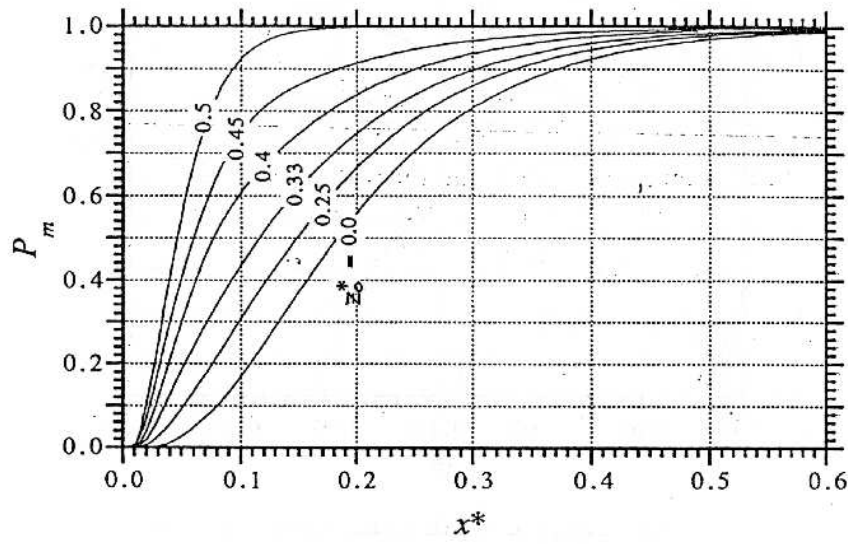


Figura 16.3: Grado di miscelamento in funzione della distanza a valle di una sorgente (lineare) distribuita nel modello a coefficienti costanti. La sorgente localizzata alla quota (adimensionale) z_0^* . Sopra la scala per x^* è lineare, sotto logaritmica.

Cioè per $0 < z_0 < Y/2$ risulta

$$L_V = \left(\underbrace{0.134}_{(z_0=Y/2)} - \underbrace{0.536}_{(z_0=0, Y)} \right) \frac{\bar{U}Y^2}{\bar{D}_z^T}. \tag{16.14}$$

Quindi, ricordando la definizione (16.1) di \bar{D}_z^T , si ha:

$$L_V \approx (0.134 - 0.536) \frac{\bar{U}Y^2}{\bar{D}_z^T} = \frac{(0.134 - 0.536) \bar{U}Y^2}{0.067 u_* Y} = (2 - 8) \frac{\bar{U}}{u_*} Y$$

$$\Rightarrow \frac{L_V}{Y} = \left(\underbrace{2}_{(z_0=Y/2)} - \underbrace{8}_{(z_0=0, Y)} \right) \frac{\bar{U}}{u_*}.$$

Poichè per alvei naturali $10 \leq \bar{U}/u_* \leq 20$ risulta:

$$L_V = \left(\underbrace{20}_{(z_0=Y/2)} - \underbrace{160}_{(z_0=0, Y)} \right) Y. \quad (16.15)$$

b) Modello a coefficienti variabili (in z)

L'equazione (16.4)
$$U \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z^T \frac{\partial C}{\partial z} \right)$$

viene risolta ipotizzando una forma specifica di $U = U(z)$ e $D_z^T = D_z^T(z)$. In particolare, ricordando i risultati relativi alla dispersione di Elder [lezione 10 e, in particolare, equazioni (10.4) e (10.6)]

$$U(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{z_r} \right), \quad D_z^T = \kappa u_* z \left(1 - \frac{z}{Y} \right) \quad (16.16)$$

con z =livello di riferimento (scabrezza del fondo per alveo scabro oppure $\nu/(20u_*)$ per alveo liscio).

Si confronta la soluzione C con quella del modello a coefficienti costanti (16.10) in funzione della quota z_0^* e per scabrezza fissata cioè per coefficiente di resistenza C_f prefissato in cui

$$C_f \equiv \left(\frac{u_*}{\bar{U}} \right)^2$$

e dove

	Alveo Scabro	Alveo Liscio
\bar{U}/u_*	> 5	< 30
C_f	< 0.04	> 0.001

La figura 16.4 riporta il confronto tra la soluzione a coefficienti variabili (in alto) e quella a coefficienti costanti (in basso) nel caso di alveo scabro per $C_f \approx 0.037$, $\bar{U}/u_* \approx 5.16$, $z_0^* = 0.35$.

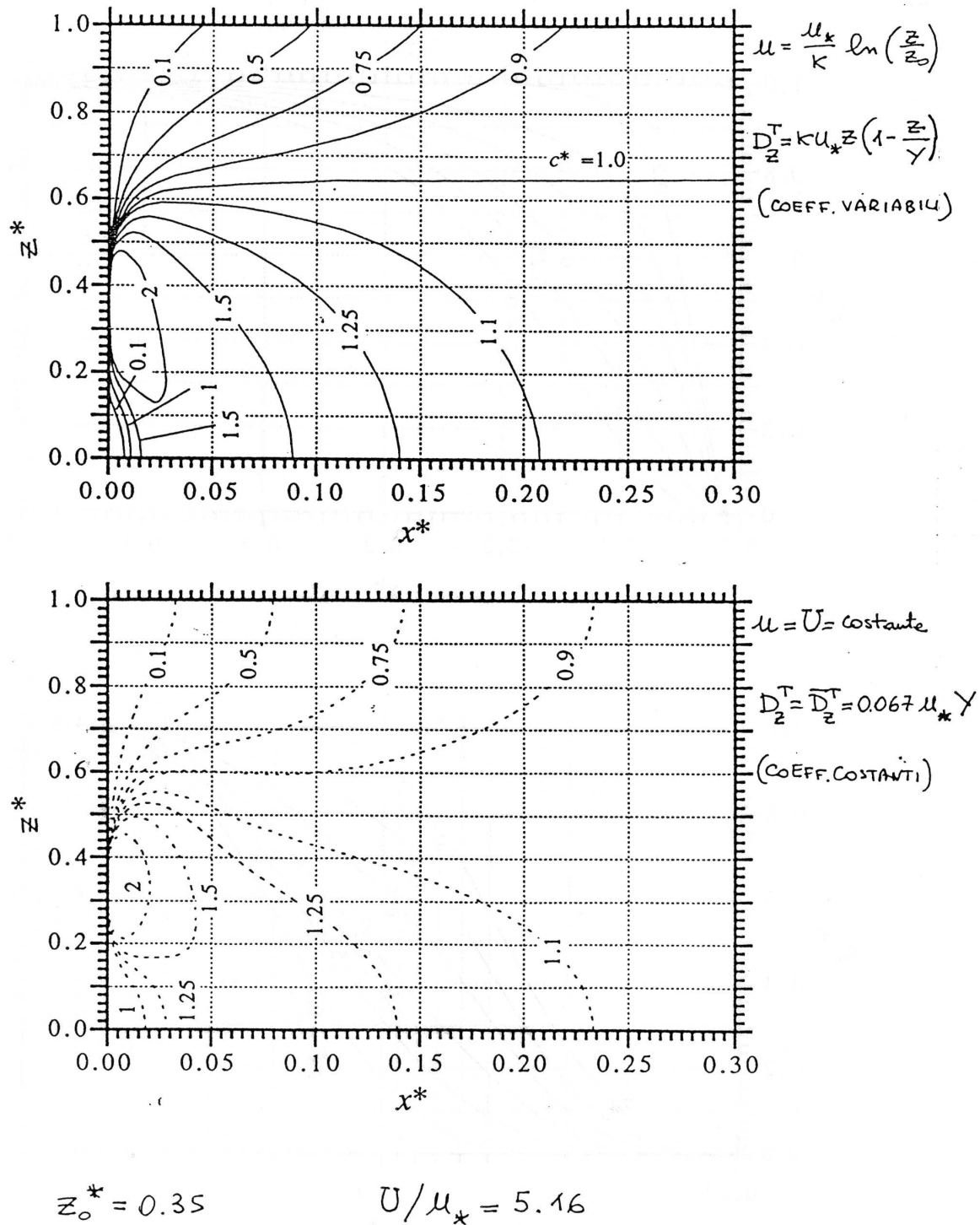


Figura 16.4: Confronto fra i profili di concentrazione nei modelli a U e D_z^T costanti (---) e variabili (—) con $C_f \approx 0.037$.

Per alveo scabro i risultati delle due soluzioni sono molto simili ma il picco di concentrazione è più spostato verso il fondo nel caso di soluzione a coefficienti variabili. Questo induce a studiare i meccanismi che determinano la quota di C_{max} .

1. Nel modello a c.c. l'accumulo di C è dovuto solo alle condizioni al contorno [nota dopo equazione (16.12)] \implies per simmetria il mescolamento è massimo per $z_0 = Y/2$;
2. nel modello a c.v. ci sono altri 2 meccanismi.

Effetto di $D_z^T(z)$

Dalla (16.16) si osserva che D_z^T , essendo parabolica, è simmetrica in z . Quindi se:

a) la sorgente è sopra $Y/2$ [$z(C_{max}) > z(D_{max}) = Y/2$]

si ha maggior diffusione per $z < z(C_{max})$

$\implies C$ decade più rapidamente in $z < z(C_{max})$ cioè

$$\left| \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z < z(C_{max})} > \left| \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z > z(C_{max})}$$

$\implies C_{max}$ si sposta verso $z = Y$.

b) la sorgente è sotto $Y/2$ [$z(C_{max}) < z(D_{max}) = Y/2$]

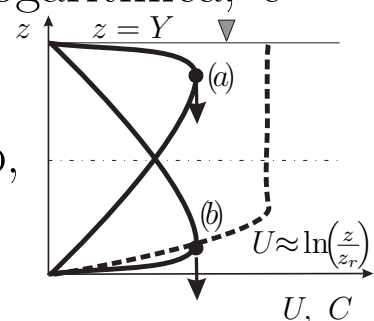
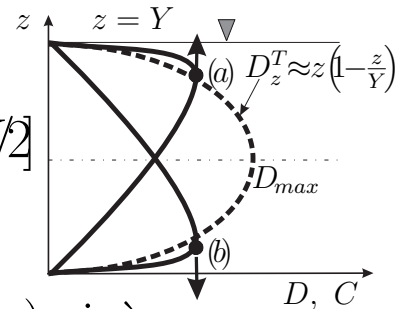
avviene il contrario $\implies C_{max}$ si sposta verso $z = 0$.

Effetto di $U(z)$

Dalla (16.16) si osserva che $U(z)$, essendo logaritmica, è asimmetrica in z .

\implies si ha un ridotto trasporto vicino al fondo,

\implies accumulo di C sempre verso il fondo.



In definitiva, se il trasporto convettivo non è trascurabile rispetto a quello diffusivo ($U \approx 0$, caso raro), C_{max} si sposta sempre verso il fondo: $[z(C_{max})]_{c.v.} < [z(C_{max})]_{c.c.}$

Questi effetti sono importanti sia per determinare L_V (16.13) che la quota di miscelamento ottimale definita come

$$(z_0)_{ott} \equiv z_0(\text{tale che } L_V \text{ è minima})$$

Si è visto che nel caso di modello a coefficienti costanti risulta:

$$(z_0)_{ott} = Y/2$$

mentre per il modello a coefficienti variabili, poichè C_{max} migra sempre verso il fondo, risulta $(z_0)_{ott} > Y/2$ e crescente con C_f (si veda figura 16.5):

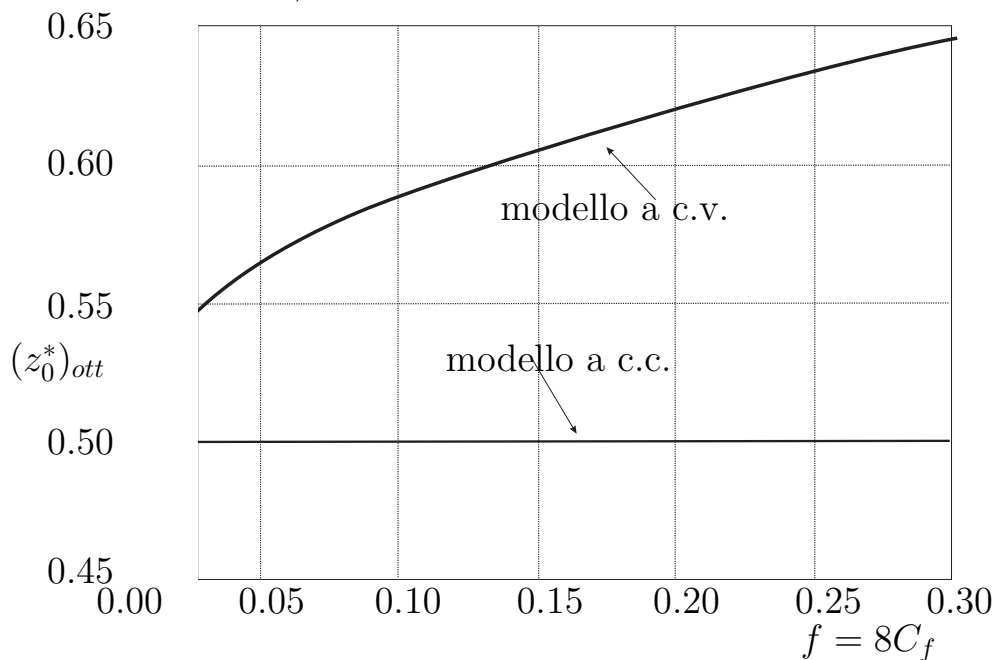


Figura 16.5: Andamento di $(z_0)_{ott}$ di scarico nei modelli a c.c. e a c.v., in funzione di $f = 8C_f$.

Ad esempio		Alveo Liscio	Alveo Scabro
	$(z_0)_{ott}$	$0.53Y$	$0.64Y$

Infatti per scabrezza del fondo crescente il profilo di velocità (16.16) diventa sempre più piatto e asimmetrico \implies crescente accumulo di C al fondo (si veda figura 16.6) \implies per ottimizzare il mescolamento occorre tirare sempre più su z_0 .

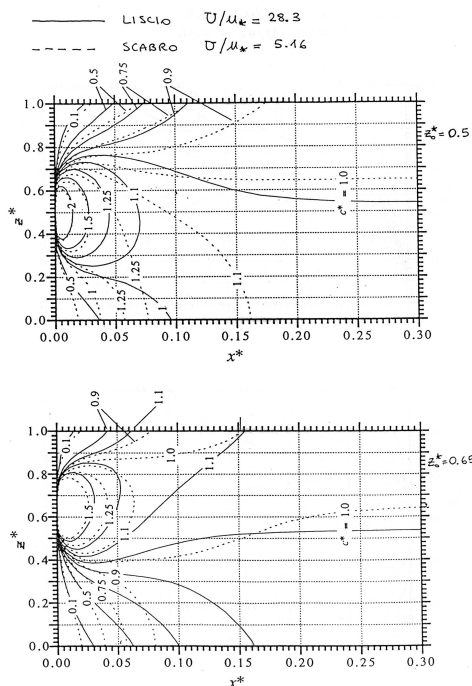


Figura 16.6: Linee di isoconcentrazione nel caso del modello a coefficienti variabili (— $C_f = 0.00125$, $\bar{U}/u_* = 28.3$; - - - $C_f = 0.0375$, $\bar{U}/u_* = 5.16$).

Se si posiziona la sorgente a $z_0 = (z_0)_{ott}$ il valore di L_V [qui $x^*(P_m = 0.8)$] fornito dai due modelli è molto simile (si veda regione 1 di figura 16.7). Mentre se $z_0 \approx 0$ o $z_0 \approx Y$ il modello a c.c. sovrastima L_V di circa il 15% rispetto al modello a c.v. \implies conviene stimare $(z_0)_{ott}$ con il modello a c.v. e, quindi, L_V con il modello a c.c. (più semplice) tramite la (16.14).

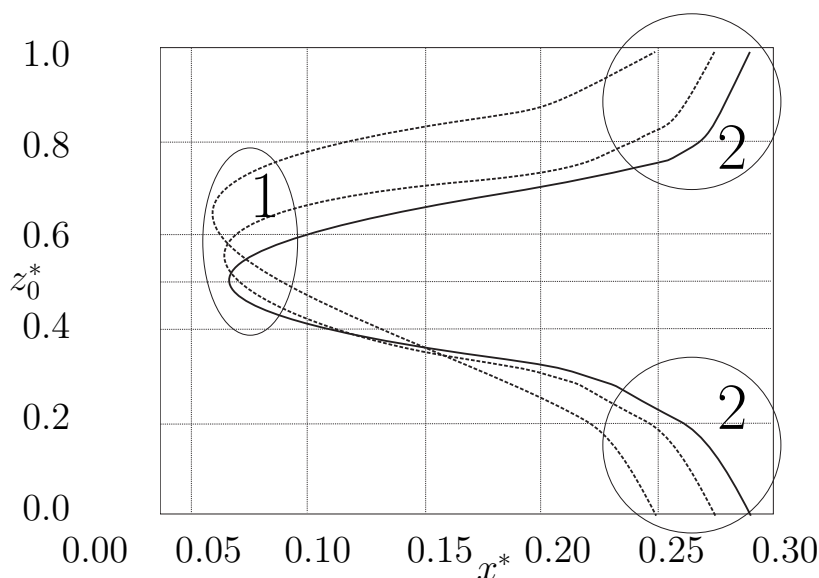
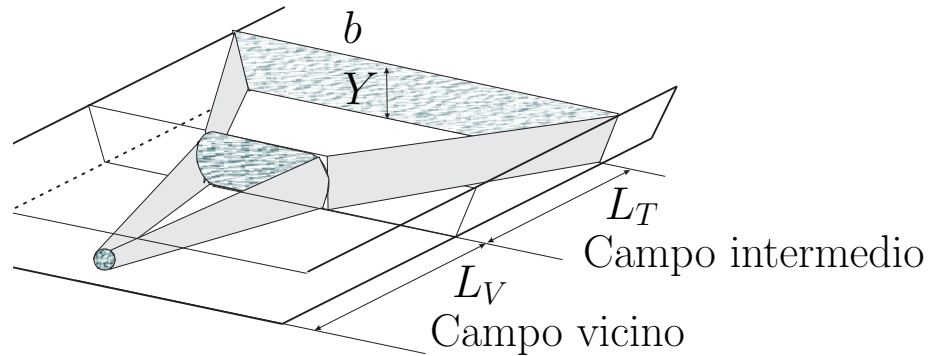


Figura 16.7: Confronto fra le distanze necessarie al raggiungimento di un grado di miscelamento 0.8 nel modello a c.c. (—), in quello a c.v. liscio (- - -) e in quello a c.v. scabro (- . - . -).

17 MISCELAMENTO VERTICALE A VALLE DI UNA SORGENTE PUNTUALE

È il caso di figura qui sotto e si distinguono due condizioni:



1) Sorgente stazionaria ($\dot{\mathcal{M}} = \text{cost}$)

Come per la sorgente lineare si cerca di semplificare l'equazione di convezione-diffusione generale (15.2), in questo caso usando le (15.3) e (15.4):

$$\underbrace{\frac{\partial C}{\partial t}}_{\partial/\partial t=0} + U \frac{\partial C}{\partial x} + \underbrace{V \frac{\partial C}{\partial y}}_{(15.3)} + \underbrace{W \frac{\partial C}{\partial z}}_{(15.3)} = \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left(D^T_x \frac{\partial C}{\partial x} \right)}_{(15.4)} + \frac{\partial}{\partial y} \left(D^T_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D^T_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (17.1)$$

Quindi l'equazione semplificata è

$$U \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D^T_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D^T_z \frac{\partial C}{\partial z} \right)$$

di cui si studia la soluzione nel caso di coefficienti costanti:

$$U = \bar{U}, \quad D^T_y = \bar{D}^T_y, \quad D^T_z = \bar{D}^T_z.$$

Per cui l'equazione da risolvere è

$$U \frac{\partial C}{\partial x} = \bar{D}^T_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \bar{D}^T_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

La soluzione per sorgente di intensità $\dot{\mathcal{M}}$ posta in $(x, y, z) = (0, y_0, z_0)$ si ottiene dall'analogia soluzione (16.9) valida per sorgente lineare trasversa [si veda anche (4.12)]:

$$C_\infty(x, y, z) = \underbrace{\frac{C_1}{\sqrt{4\pi \bar{D}_z^T x / \bar{U}}} e^{-\frac{(z-z_0)^2 \bar{U}}{4\bar{D}_z^T x}}}_{\text{Diffusione verticale}} \underbrace{\frac{C_2}{\sqrt{4\pi \bar{D}_y^T x / \bar{U}}} e^{-\frac{(y-y_0)^2 \bar{U}}{4\bar{D}_y^T x}}}_{\text{Diffusione trasversale}}$$

Nella (16.9) si è calcolata C_1 imponendo $\int_{-\infty}^{\infty} C_\infty U dz = \dot{\mathcal{M}}/b$. Qui, imponendo che la massa di soluto immessa è $\dot{\mathcal{M}} dt = \dot{\mathcal{M}} dx / \bar{U}$ [si veda anche (4.11)], si calcola la costante $C_1 C_2$:

$$\dot{\mathcal{M}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_\infty U dy dz = (\text{Per esercizio}) = C_1 C_2 \bar{U} \implies C_1 C_2 = \dot{\mathcal{M}} / \bar{U}.$$

Da cui

$$C_\infty(x, y, z) = \frac{\dot{\mathcal{M}}}{4\pi \sqrt{\bar{D}_y^T \bar{D}_z^T x}} e^{-\frac{\bar{U}}{4x} \left[\frac{(z-z_0)^2}{\bar{D}_z^T} + \frac{(y-y_0)^2}{\bar{D}_y^T} \right]} = \frac{\dot{\mathcal{M}}}{4\pi \sqrt{\bar{D}_y^T \bar{D}_z^T x}} f(x, y) g(x, z).$$

Come al solito la soluzione in un dominio limitato si ottiene usando il **metodo delle sorgenti immagine**. In questo caso il dominio è limitato in $z = 0$ (fondo), $z = Y$ (superficie libera) e $y = 0, b$ (sponde):

$$C(x, y, z) = \frac{\dot{\mathcal{M}}}{4\pi \sqrt{\bar{D}_y^T \bar{D}_z^T x}} F(x, y) G(x, z) \quad (17.2)$$

dove

$$F(x, y) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_\infty(x, y \pm y_0 + 2nb), \quad G(x, z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_\infty(x, z \pm z_0 + 2nY).$$

La soluzione (17.2), in forma adimensionale, è illustrata in figura 17.1 per sorgente posta in $(x_0, y_0, z_0) = (0, b/2, Y/2)$.

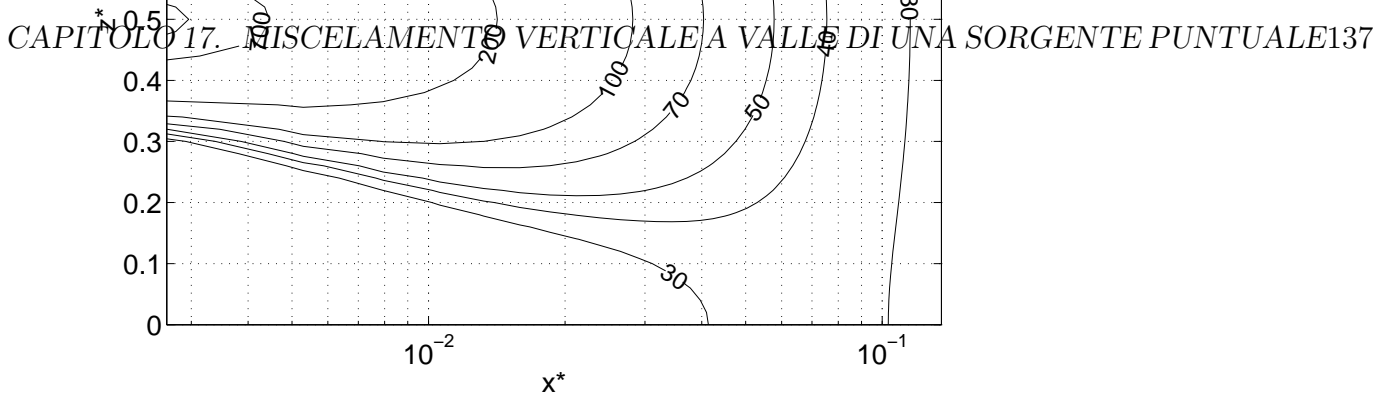


Figura 17.1: Distribuzione delle linee di isoconcentrazione nel piano $y = 0.5b$ per una sorgente puntuale localizzata, con $y_0^* = z_0^* = 0.5$ e $b/Y = 50$. Si assunto inoltre $\bar{D}_y^T/\bar{D}_z^T = 2$.

Confrontando con l'analogia soluzione per sorgente lineare, trasversale posta in $(x_0, z_0) = (0, Y/2)$ si osserva (cf. figura 16.2):

- a parità di \mathcal{M} la sorgente puntuale determina valori di C^* molto maggiori di quelli dovuti alla sorgente lineare.

	x^*	Sorgente puntuale	Sorgente lineare
Ad esempio:	10^{-2}	100	4
	10^{-1}	30	1

- il completo mescolamento verticale avviene sempre per $x^* = 0.134$, cioè per $x^* > 0.134$ il profilo verticale di C^* è uniforme (per $C^* \approx 25$);
- la differenza sta nel valore assunto da C^* in $x^* = 0.134$: $C^* = 25$ per la sorgente puntuale e $C^* = 1$ per sorgente lineare. Questo dimostra che non si è ancora raggiunto il

completo mescolamento trasversale che avviene dove $C^* \approx 1$ cioè per $x^* \approx 100$.

2) Sorgente non stazionaria

La non stazionarietà impone di considerare nella (17.1) anche la diffusione longitudinale, cioè non vale la (15.4). Quindi la soluzione a coefficienti costanti deve includere anche \bar{D}_x^T :

$$U = \bar{U}, \quad \mathbf{D}^T = (\bar{D}_x^T, \bar{D}_y^T, \bar{D}_z^T).$$

La soluzione del problema associato ad un'immissione istantanea di \mathcal{M} in $(0, y_0, z_0)$ si ottiene in analogia alla soluzione di pura diffusione 3D descritta dalla (3.14). L'unica differenza sta nel fatto che, essendo la convezione uniforme, è possibile usare un sistema di riferimento in moto a velocità \bar{U} e considerare il problema come se l'immissione avvenisse in $(\bar{U}t, y_0, z_0)$:

$$C_\infty(x, y, z) = \frac{\dot{\mathcal{M}}}{(4\pi)^{3/2} \sqrt{\bar{D}_x^T \bar{D}_y^T \bar{D}_z^T}} e^{-\frac{(x-\bar{U}t)^2}{4\bar{D}_x^T t} - \frac{(y-y_0)^2}{4\bar{D}_y^T y} - \frac{(z-z_0)^2}{4\bar{D}_z^T t}}. \quad (17.3)$$

Da cui la soluzione in dominio confinato tramite il **metodo delle sorgenti immagine**.

Osservazioni:

1. la (17.3) rappresenta bene C solo finchè la nuvola di traccianti è confinata al centro del canale;
2. quando la nuvola raggiunge il fondo l'ipotesi $U = \bar{U}$ non è più valida perchè vicino al fondo $U \approx 0 \implies$ si ha una riduzione del trasporto convettivo $\implies C$ aumenta vicino al fondo.

17.1 L'effetto di $\Delta\rho$ sul mescolamento verticale

Come già visto in Sezione 14.1.3 la stratificazione dell'Ambiente tende a sopprimere i moti turbolenti cioè a ridurre il mescolamento verticale del fluido. Tale riduzione è misurata dalla riduzione di $\bar{D}_z^T \propto \langle (w')^2 \rangle$. Considerazioni teoriche e sperimentali suggeriscono la seguente relazione:

$$\bar{D}_z^{T,S} = \bar{D}_z^T (1 + aR_i)^b = \frac{\bar{D}_z^T}{(1 + aR_i)^{|b|}} \quad \text{con } a > 0, b < 0 \quad (17.4)$$

illustrata in figura (17.2) per diversi valori delle coppie (a, b) provenienti da vari studi teorico-sperimentali.

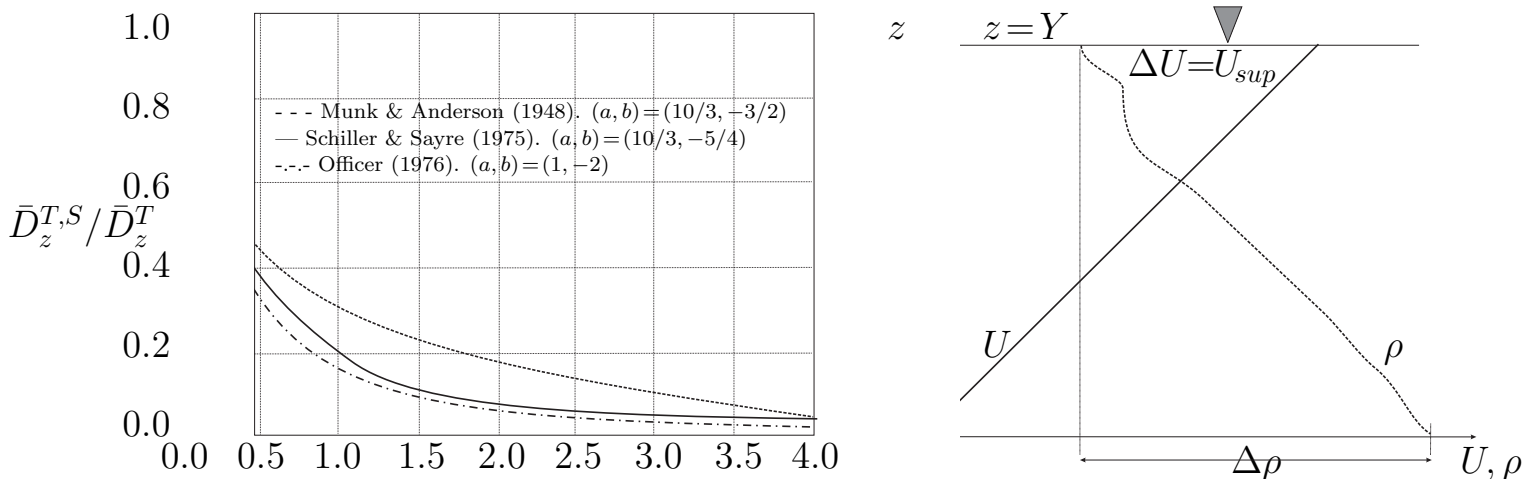


Figura 17.2: Sinistra: illustrazione della relazione (17.4). Destra: definizioni per R_i approssimato.

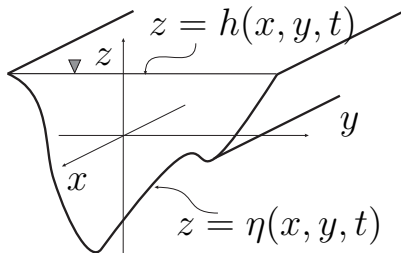
Negli estuari, la turbolenza generata al fondo dai moti mareali è abbastanza forte da mescolare acqua salata e dolce in modo che ρ cresca monotonamente con la profondità. Allora, ipotizzando una distribuzione lineare di U è possibile introdurre una definizione semplificata del **Numero di Richardson** (14.18):

$$R_i \equiv -\frac{g \frac{\partial \rho}{\partial z}}{\rho \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \approx -\frac{g \Delta \rho / Y}{\bar{\rho} (\Delta U / Y)^2} \approx -\frac{g Y}{(\Delta U)^2} \frac{\Delta \rho}{\rho} = (Fr_Y)^{-2} \frac{\Delta \rho}{\rho}$$

$$\Delta U \equiv U_{sup} - U_{fondo} = U_{sup}, \quad \Delta \rho \equiv \rho_{sup} - \rho_{fondo}, \quad \bar{\rho} \equiv \left(\int_0^Y \rho dz \right) / Y, \quad Fr_Y \equiv \Delta U / \sqrt{gY}.$$

18 IL CAMPO INTERMEDIO: IL MESCOLAMENTO TRASVERSALE

Raggiunto il completo mescolamento sulla verticale, C dipende debolmente dalla coordinata $z \implies$ conviene utilizzare equazioni integrate sulla verticale e considerare l'evoluzione di \bar{C} :



$$\bar{C} \equiv \frac{1}{Y} \int_{\eta(x,y,t)}^{h(x,y,t)} C(x, y, z, t) dz, \quad Y \equiv h - \eta \quad (18.1)$$

Si ricordano solo i risultati principali della procedura di media sulla verticale, già illustrata nel corso di Idraulica Fluviale.

L'equazione di continuità

Integrando in z l'equazione $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ si ottiene:

$$0 = \int_{\eta}^h \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right] dz \stackrel{\text{(Leibnitz)}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^h U dz - [U]_h \frac{\partial h}{\partial x} + [U]_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta}^h V dz - \underbrace{[V]_h}_{\text{}} \frac{\partial h}{\partial y} + \underbrace{[V]_{\eta}}_{\text{}} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \underbrace{[W]_h}_{\text{}} - \underbrace{[W]_h}_{\text{}}$$

che viene semplificata usando le condizioni cinematiche valide alla superficie libera $z = h(x, y, t)$ e al fondo $z = \eta(x, y, t)$

$$\frac{\partial(h, \eta)}{\partial t} + [U]_{(h, \eta)} \frac{\partial(h, \eta)}{\partial x} + [V]_{(h, \eta)} \frac{\partial(h, \eta)}{\partial x} - [W]_{(h, \eta)} = 0 \quad (18.2)$$

e le definizioni

$$(\bar{U}, \bar{V}) \equiv \frac{1}{Y} \int_{\eta(x,y,t)}^{h(x,y,t)} (U, V) dz. \quad (18.3)$$

Da cui l'equazione di continuità integrata:

$$\frac{\partial(\bar{U}Y)}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial t}}_{\text{}} + \frac{\partial(\bar{V}Y)}{\partial x} - \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial t}}_{\text{}} = 0 \xrightarrow{Y \equiv h - \eta} \boxed{\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{U}Y)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{V}Y)}{\partial x} = 0} \quad (18.4)$$

L'equazione del moto (componenti x e y)

Integrando in z le 2 componenti dell'equazione di Reynolds

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}}_{\text{Tensioni di Reynolds}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z}}_{\text{Tensioni di Reynolds}}.$$

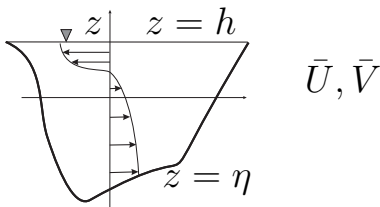
Utilizzando la regola di Leibnitz e le condizioni (18.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} &= -g \frac{\partial h}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{Y} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [Y(\bar{T}_{xx} + \bar{T}_{xx}^D)] + \frac{\partial}{\partial y} [Y(\bar{T}_{xy} + \bar{T}_{xy}^D)] \right\} + \frac{t_x^h - t_x^\eta}{Y} \end{aligned} \quad (18.6a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} &= -g \frac{\partial h}{\partial y} \\ &+ \frac{1}{Y} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [Y(\bar{T}_{xy} + \bar{T}_{xy}^D)] + \frac{\partial}{\partial y} [Y(\bar{T}_{yy} + \bar{T}_{yy}^D)] \right\} + \frac{t_y^h - t_y^\eta}{Y}. \end{aligned} \quad (18.6b)$$

Oltre alle tensioni di Reynolds mediate $\bar{T}_{ij} \equiv \frac{1}{Y} \int_{\eta}^h T_{ij} dz$ (18.7)

compaiono le “tensioni dispersive”



$$\bar{T}_{ij} \equiv \frac{1}{Y} \int_{\eta}^h (V_i - \bar{V}_i)(V_j - \bar{V}_j) dz \quad (18.8)$$

generate dalle disuniformità verticali dei profili di velocità.

Nelle (18.6) compaiono anche la tensione esercitata (dal vento) sul fluido alla superficie libera $t_{x,y}^h$ e la tensione esercitata dal fluido sul fondo $t_{x,y}^\eta$. La prima è solitamente trascurata e la seconda si modella con leggi di resistenza (tipo Chezy).

L'equazione di convezione-diffusione per C

Vista la debole dipendenza di C da z si integra l'equazione di convezione-diffusione 3D [si veda l'equazione (8.8)]

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} + W \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x^T \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y^T \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z^T \frac{\partial C}{\partial z} \right)$$

che, usando la regola di Leibnitz e le condizioni (18.2) diventa,

in forma conservativa

$$\frac{\partial(\bar{C}Y)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{U}\bar{C}Y)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{V}\bar{C}Y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[Y \left(\bar{D}_x^T \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} - \bar{U}'C' \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[Y \left(\bar{D}_y^T \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} - \bar{V}'C' \right) \right] \quad (18.9)$$

dove per i termini dispersivi

$$\bar{U}'C' \equiv \frac{1}{Y} \int_{\eta}^h (U - \bar{U}) dz, \quad \bar{V}'C' \equiv \frac{1}{Y} \int_{\eta}^h (V - \bar{V}) dz$$

si usa una chiusura di tipo diffusivo tipo 'Legge di Fick' [si vedano equazioni (1.5) e (9.22)]:

$$-\bar{U}'C' \equiv K_x \frac{\partial \bar{C}}{\partial x}, \quad -\bar{V}'C' \equiv K_y \frac{\partial \bar{C}}{\partial y}$$

con $K_x, K_y =$ coefficienti di dispersione laterale da stimare.

Per cui si giunge alla equazione in forma non-conservativa:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} = \frac{1}{Y} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[Y \left(\underbrace{\bar{D}_x^T}_{\cdot} + \underline{K_x} \right) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[Y \left(\underbrace{\bar{D}_y^T}_{\cdot} + \underline{K_y} \right) \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right] \right\} \quad (18.10)$$

dove i termini $\underbrace{\quad}_{\cdot}$ indicano diffusione turbolenta mentre quelli $\underline{\quad}$ indicano dispersione.

È quindi chiaro che per determinare \bar{C} risolvendo la (18.10) è necessario conoscere o stimare sia $(\bar{D}_x^T, \bar{D}_y^T)$ che (K_x, K_y) .

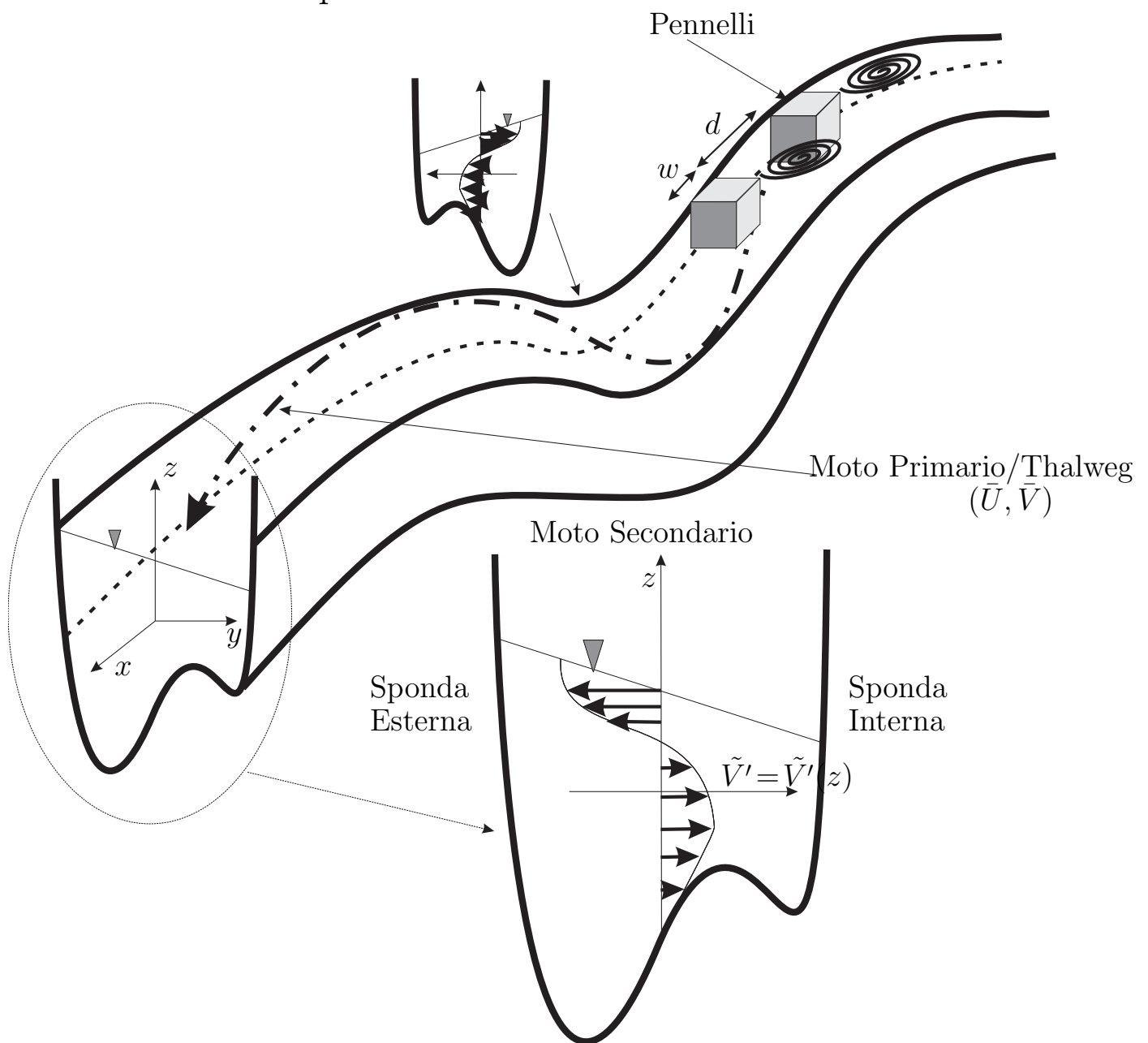
Stima di \bar{D}_x^T e K_x

Questi valori si ottengono direttamente dalla ‘Teoria di Elder’ [si vedano equazioni (10.7) e (10.9)]:

$$\bar{D}_x^T \simeq (2 - 3)\bar{D}_z^T = (2 - 3)0.067u_*Y, \quad K_x = 5.86u_*Y$$

Stima di \bar{D}_y^T e K_y

La determinazione di questi parametri è più complessa e connessa alla complessità del moto in un canale naturale.



Il moto in un canale naturale è studiato come la sovrapposizione di 2 componenti:

1. il Moto Primario o “Thalweg”

è il moto medio sulla verticale $(\bar{U}, \bar{V}, 0)$. È detto “Thalweg” nel caso di fondo mobile;

2. il Moto Secondario è la circolazione $(\tilde{U}', \tilde{V}', \tilde{W}')$ sovrapposta al moto primario ed ha media nulla sulla verticale. Si svolge nella sezione ortogonale al vettore (\bar{U}, \bar{V}) e nei fiumi, in cui tipicamente $\bar{V} \ll \bar{U}$, avviene sulle sezioni ortogonali alla direzione di \bar{U} .

Fenomeni che influenzano \bar{D}_y^T e K_y

a. variazioni trasversali di profondità $Y = Y(y)$ (sezioni a forma diversa);

b. variazioni di larghezza $b = b(x)$ (restringimenti naturali o pennelli);

c. variazioni di curvatura dell'asse della corrente

(a) le azioni centrifughe inducono vicino alle curve:

- elevazione della superficie libera alla sponda esterna;
- moto secondario verso l'esterno in superficie e verso l'interno al fondo;

(b) il moto secondario erode all'esterno e accumula sedimenti all'interno della curva \implies deformazione del fondo;

(c) variazione meandriforme della curvatura.

Stima di \bar{D}_y^T

Ovviamente, come \bar{D}_x^T , anche \bar{D}_y^T scala con u_* e Y , cioè:

$$\bar{D}_y^T \propto u_* Y \quad \text{ossia} \quad \bar{D}_y^T = \alpha u_* Y$$

si determina α tramite esperimenti specifici.

Misure in canali rettilinei

Si utilizzano per ridurre gli effetti dei moti secondari e, quindi, rendere $K_y \ll \bar{D}_y^T$ per poter determinare solo \bar{D}_y^T . Si noti che nella (18.10) i due contributi compaiono insieme come $(\bar{D}_y^T + K_y)$ e, quindi, è difficile separarne gli effetti.

Gli esperimenti di Weibel & Schatzmann (1984), effettuati in canali rettilinei a sezione rettangolare, hanno mostrato che

$$\frac{(\bar{D}_y^T + K_y)}{u_* Y} = \begin{cases} \alpha = f(C_f) & \text{(regime liscio)} \\ \alpha \approx 0.13 & \text{(regime scabro)}. \end{cases} \quad (18.12)$$

Poichè K_y è funzione dei moti secondari mentre \bar{D}_y^T solo della turbolenza cioè $\bar{D}_y^T = \bar{D}_y^T(C_f)$, il fatto che $\bar{D}_y^T + K_y$ dipende da C_f come \bar{D}_y^T indica che effettivamente $\bar{D}_y^T \gg K_y$ cioè che la (18.12) è in realtà:

$$\boxed{\frac{\bar{D}_y^T}{u_* Y} \approx \begin{cases} \alpha = f(C_f) & \text{(regime liscio)} \\ \alpha \approx 0.13 & \text{(regime scabro)}. \end{cases}}$$

Dal punto di vista operativo

$$\boxed{\frac{\bar{D}_y^T}{u_* Y} = (0.13 - 0.15) \stackrel{(18.11)}{=} (2.0 - 2.2) \frac{\bar{D}_z^T}{u_* Y}} \quad (18.13)$$

ad indicare l'anisotropia dovuta a macrovortici con dimensioni trasverse maggiori di Y .

Stima di K_y

Si analizza l'influenza dei fenomeni (a), (b) e (c) su K_y .

Effetto di (a) ($Y = Y(y)$). Si misura $\bar{D}_y^T + K_y$ in canali a sezione rettangolare e trapezia. Nei primi $\frac{\partial Y}{\partial y} = 0$ viceversa nei secondi $\frac{\partial Y}{\partial y} = \text{cost} \neq 0$. Per sezioni trapezie:

$$0.15 \leq \frac{\bar{D}_y^T + K_y}{u_* Y} \leq 0.30 \quad (18.12) \quad (\bar{D}_y^T + K_y)_{\text{trapezia}} \approx 2(\bar{D}_y^T + K_y)_{\text{rettang.}}$$

La dispersione K_y dovuta a $\frac{\partial Y}{\partial y}$ tende a raddoppiare \bar{D}_y^T .

Effetto di (b) ($b = b(x)$). In canali rettilinei rettangolari con pennelli artificiali risulta:

$$0.30 \leq \frac{\bar{D}_y^T + K_y}{u_* Y} \leq 0.70 \quad \text{cioè} \quad (\bar{D}_y^T + K_y)_{\text{pennelli}} \approx 4(\bar{D}_y^T + K_y)_{\text{rettang.}}$$

Si potrebbe anche calcolare la dipendenza di $\bar{D}_y^T + K_y$ dalla spaziatura d e dalla larghezza w dei pennelli.

Effetti di (c) (curvatura dell'asse). I più influenti:

- Curve a raggio R costante. L'effetto dei fenomeni c1 e c2 determina

$$\frac{K_y}{u_* Y} \approx 22 \left(\frac{\bar{Y}}{R} \right) \left(\frac{\bar{U}}{u_*} \right)^2. \quad (18.14)$$

- Alvei meandriiformi ($R = R(s)$). Gli effetti di c1, c2 e c3 determinano 2 parametrizzazioni

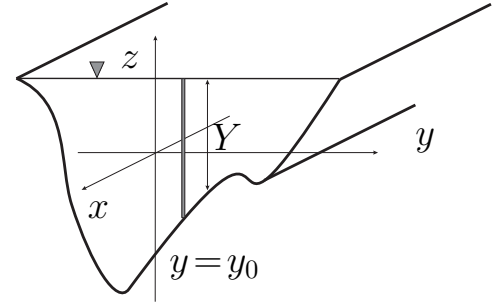
$$0.3 - 0.4 \leq \frac{\bar{D}_y^T + K_y}{u_* Y} \leq 0.8 - 0.9 \quad (\text{debole meandr.}) \quad (18.15a)$$

$$\frac{K_y}{u_* Y} = (0.3 - 0.9) \left(\frac{b}{R} \right)^2 \left(\frac{\bar{U}}{u_*} \right)^2 \quad (\text{forte meandr.}) \quad (18.15b)$$

[Quest'ultima è simile alla (18.14) ma con b al posto di Y .]

19 MESCOLAMENTO TRASVERSALE: SORGENTE LINEARE E VERTICALE

Si studia il mescolamento in campo intermedio indotto dal rilascio di una portata massica \dot{M} attraverso una sorgente lineare, verticale e stazionaria posta in $y = y_0$. Per questo processo la portata specifica è $\dot{m} \equiv \dot{M}/Y$.



Essendo il mescolamento verticale molto più rapido di quello trasversale si può ipotizzare che la sorgente verticale sia generata quasi istantaneamente da una sorgente puntuale in (y_0, z_0) .

Ciò si verifica confrontando i tempi di mescolamento T_V e T_T :

$$T_{V=(16.2)} = \frac{Y^2}{\bar{D}_z^T}; \quad T_T = \frac{b^2}{\bar{D}_y^T} \implies \frac{T_V}{T_T} = \frac{Y^2}{b^2} \frac{\bar{D}_y^T}{\bar{D}_z^T} \approx (\bar{D}_y^T \approx \bar{D}_z^T) \approx \left(\frac{1}{50}\right)^2 = \mathcal{O}\left(\frac{1}{1000}\right).$$

È quindi lecito considerare $\frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \approx 0$ ed usare l'equazione di convezione-diffusione per \bar{C} (18.10) che, per la stazionarietà della sorgente, si semplifica [si veda (15.6)] in:

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{C}}{\partial t}}_{\text{(sorgente staz.)}} + \bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} = \frac{1}{Y} \left\{ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[Y(\bar{D}_x^T + K_x) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right]}_{\text{(sorgente staz.)}} + \frac{\partial}{\partial y} \left[Y(\bar{D}_y^T + K_y) \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right] \right\} \quad (19.1)$$

Inoltre ipotizzando un alveo rettilineo a sezione rettangolare molto larga ($b \gg Y$) si può assumere che

$$(\bar{U}, \bar{V}) \approx (\bar{U}, 0) \quad \text{e} \quad Y = \text{cost.}, \quad \bar{U} = \text{cost.}$$

e anche che i moti secondari siano trascurabili

$$K_y = 0, \quad \bar{D}_y^T = \text{cost.}$$

per cui la (19.1) diventa:

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \bar{D}_y^T \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial y^2} \quad (19.2)$$

che è l'equazione del modello a coefficienti costanti.

Questa, a parte la variabile (\bar{C} invece di C), è del tutto simile alla (16.5), a sua volta simile alla (2.4) che governa la diffusione molecolare 1D. Quindi la **soluzione fondamentale** [si veda (2.8) e (16.9)] in dominio infinito e per $y_0 = 0$ è:

$$\bar{C}_\infty(x, y) = \frac{\dot{m}}{\sqrt{4\pi\bar{D}_y^T x \bar{U}}} e^{-\frac{y^2 \bar{U}}{4\bar{D}_y^T x}} = \frac{\dot{M}}{Y \sqrt{4\pi\bar{D}_y^T x \bar{U}}} e^{-\frac{y^2 \bar{U}}{4\bar{D}_y^T x}}. \quad (19.3)$$

La soluzione valida in un dominio finito si ottiene imponendo condizioni di flusso di massa nullo ai contorni $y = 0, b$ tramite il **Metodo delle immagini** [si veda (3.10) e (16.10)]:

$$\bar{C}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{C}_\infty(x, y \pm y_0 + 2nb). \quad (19.4)$$

Anche in questo caso si studia la soluzione adimensionale ottenuta tramite le relazioni [si veda (16.11)]

$$\bar{C}^* \equiv \frac{\bar{C}}{C_M}, \quad C_M \equiv \frac{\dot{M}}{Q} = \frac{\dot{M}}{\bar{U} Y b}, \quad x^* \equiv \frac{x}{\bar{U} b^2 / \bar{D}_y^T}, \quad y^* \equiv \frac{y}{Y}. \quad (19.5)$$

Per cui sostituendo nella (19.3):

$$\frac{\dot{M}}{\bar{U}Yb} \bar{C}_\infty^* = \frac{\dot{M}}{Y \sqrt{4\pi \bar{D}_y^T \left(\frac{\bar{U}b^2}{\bar{D}_y^T} x^* \right) \bar{U}}} e^{-\frac{(y^*)^2 \bar{U}}{4 \bar{D}_y^T \left(\frac{\bar{U}b^2}{\bar{D}_y^T} x^* \right) \bar{U}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_\infty^*(x^*, y^*) = \frac{1}{\sqrt{4\pi x^*}} e^{-\frac{(y^*)^2}{4x^*}}} \quad (19.6)$$

che è esattamente uguale ($z^* \leftrightarrow y^*$) alla soluzione (16.12) ottenuta per il mescolamento verticale \Rightarrow si usano i grafici relativi a tale soluzione (figure 16.1 e 16.2).

In completa analogia al problema del mescolamento verticale:

i. si introduce un **parametro di mescolamento sulla sezione** $P_m(x^*)$:

$$P_m(x^*) \equiv \frac{\bar{C}_{min}(x^*)}{\bar{C}_{max}(x^*)}$$

tale che $P_m \approx 1$ per $\bar{C}_{min} \approx \bar{C}_{max}$ (completo mescolamento);

ii. si definisce L_T in analogia a L_V cioè come la distanza in x dalla sorgente a cui $P_m = 0.98$ e dalla figura 16.3 [si veda anche equazione (16.14)]:

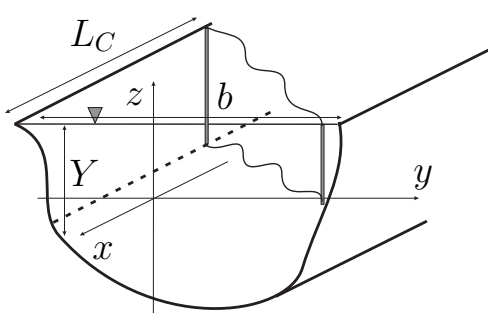
$$\boxed{L_T = \left(\underbrace{0.134}_{(z_0=b/2)} - \underbrace{0.536}_{(z_0=0,b)} \right) \frac{\bar{U}b^2}{\bar{D}_y^T}} \quad (19.7)$$

iii. si stima L_T in funzione di b in analogia alla (16.15) ed usando $\bar{D}_y^T \approx 2\bar{D}_z^T$ e $\bar{U}/u_* \approx 10$, $b/Y \approx 10$:

$$L_T = (0.134 - 0.536) \frac{\bar{U}b^2}{\bar{D}_y^T} \approx \frac{(0.134 - 0.536) \bar{U}}{0.134} \left(\frac{b}{Y} \right) b$$

$$= (1 - 4)100b = (100 - 400)b. \quad (19.8)$$

Nel caso di sorgente posta in prossimità di una sponda è utile stimare la distanza longitudinale L_C che il tracciante deve percorrere per raggiungere la sponda opposta (condizione imposta richiedendo $P_m \approx 0.06$). Utilizzando il grafico di figura 16.3 si ottiene:



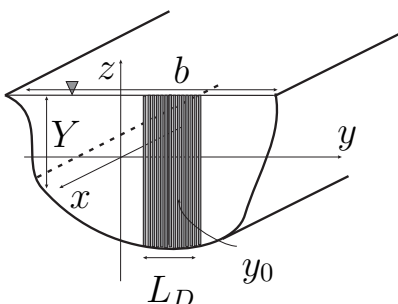
$$\begin{aligned}
 L_C &\equiv L(P_m = 0.06, y_0^* = 0) = 0.054 \frac{\bar{U} b^2}{\bar{D}_y^T} = \\
 &=_{(19.8)} \frac{0.054 \bar{U} b}{0.134 u_* Y} b \approx 0.25(10)(10)b = 25b
 \end{aligned}$$

Chiaramente $L_T > L_C$ perchè prima che si abbia completo mescolamento trasversale il tracciante raggiunge la sponda opposta!

Il diffusore di larghezza finita

Tipicamente il mescolamento di un inquinante si ottiene tramite un diffusore di sezione abbastanza ampia da permettere una rapida diluizione \implies le approssimazioni di sorgente puntuale e lineare non sono adeguate.

Si ottiene una rappresentazione migliore schematizzando il diffusore di larghezza L_D come composto da N sorgenti lineari verticali. Se ogni sorgente posta in y_0 è larga dy_0 e se $\dot{\mathcal{M}}$ è la portata massica totale, ogni sorgente lineare ha portata massica $d\dot{m}$ tale che



$$d\dot{m} = \frac{\dot{\mathcal{M}}}{L_D} dy_0$$

Quindi ogni sorgente contribuisce con $d\bar{C}_\infty$ tale che [si veda (19.3)]:

$$d\bar{C}_\infty = \frac{dm}{Y\sqrt{4\pi\bar{D}_y^T x\bar{U}}} e^{-\frac{(y-y_0)^2\bar{U}}{4\bar{D}_y^T x}} = \frac{\dot{M}dy_0}{Y L_D\sqrt{4\pi\bar{D}_y^T x\bar{U}}} e^{-\frac{(y-y_0)^2\bar{U}}{4\bar{D}_y^T x}}.$$

da cui la soluzione globale ottenuta integrando sulla lunghezza $L_D = (y_0)_{fin} - (y_0)_{in}$:

$$\bar{C}_\infty(x, y) = \frac{\dot{M}dy_0}{Y L_D\sqrt{4\pi\bar{D}_y^T x\bar{U}}} \int_{(y_0)_{in}}^{(y_0)_{fin}} e^{-\frac{(y-y_0)^2\bar{U}}{4\bar{D}_y^T x}} dy_0 \quad (19.9)$$

o, in forma adimensionale [si veda la (19.5)]

$$\frac{\dot{M}}{\bar{U}Yb} \bar{C}_\infty^* = \frac{\dot{M}}{Y L_D\sqrt{4\pi\bar{D}_y^T \left(\frac{\bar{U}b^2}{\bar{D}_y^T} x^*\right) \bar{U}}} \int_{(y_0^*)_{in}}^{(y_0^*)_{fin}} e^{-\frac{(y^*-y_0^*)^2 \frac{b}{\bar{D}_y^T} \bar{U}}{4\bar{D}_y^T \left(\frac{\bar{U}b^2}{\bar{D}_y^T} x^*\right)}} dy_0^*$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{C}_\infty^*(x^*, y^*) = \frac{b}{L_D\sqrt{4\pi x^*}} \int_{(y_0^*)_{in}}^{(y_0^*)_{fin}} e^{-\frac{(y^*-y_0^*)^2}{4x^*}} dy_0^*} \quad (19.10)$$

la cui integrazione è lasciata **per esercizio**.

Si noti che a parità di parametri, più grande è il diffusore rispetto alla larghezza del canale ($L_D/b \rightarrow 1$) minore è il valore della concentrazione \bar{C}_∞^* (perchè fissata \dot{M} questa è distribuita su un'area maggiore).

La soluzione in un dominio con contorni posti a $y = 0, b$ si ottiene tramite il **metodo delle sorgenti immagine**.

Il modello a coefficienti variabili

Mentre nel regime di campo vicino il modello a c.v. era basato su profili noti di U e D_z^T (Teoria di Elder di lezione 10) questo non è possibile nel regime di campo intermedio per cui non si hanno informazioni sufficienti su:

$$Y=Y(y), \quad \bar{U}=\bar{U}(y), \quad \bar{V}=\bar{V}(y), \quad \bar{D}_y^T=\bar{D}_y^T(y), \quad K_y=K_y(y). \quad (19.11)$$

Quindi si usa un metodo approssimato in cui la soluzione si ottiene del modello a c.c. con K_y o \bar{D}_y^T pari ad un “valore efficace” che tiene conto della disuniformità in y . [Viceversa, se fossero noti i profili (19.11) si integrerebbe la (19.1)].

Come nel regime di campo vicino le differenze tra soluzione a c.c. e soluzione a c.v. riguardano:

- la posizione (in y) di mescolamento ottimale: $(y_0)_{ott}$;
- la distanza di mescolamento L_T .

Modello a c.c. Se la sorgente è posta al centro del canale ($y_0 = b/2$), \bar{C}_{MAX} rimane al centro altrimenti si sposta verso la sponda a cui la sorgente è più vicina (effetto delle condizioni al contorno in $y = 0, b$);

Modello a c.v. Si ha l'effetto aggiuntivo di $\bar{U}(y) \implies \bar{C}_{MAX}$ migra verso le regioni a bassa \bar{U} \implies si sposta più rapidamente verso le sponde rispetto al caso di c.c.

Nota: nei problemi di impatto ambientale è necessario minimizzare \bar{C} alle sponde (alta concentrazione di bio-organismi) \implies l'obiettivo non è minimizzare L_T , ma trovare la y_0 per cui \bar{C} è minima alle sponde.

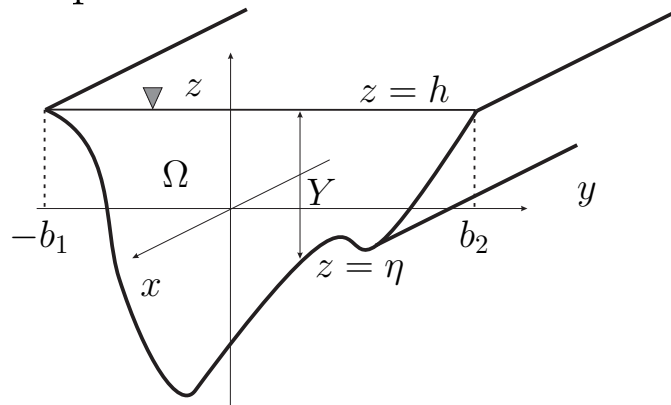
20 IL CAMPO LONTANO:

MESCOLAMENTO LONGITUDINALE

Si realizza dalla sezione a cui il mescolamento trasversale è completo. Una stima è fornita dalla (19.8):

$$L_T \approx (100 - 400)b.$$

Essendo C uniforme sulla sezione, cioè debolmente dipendente da y e z si usano equazioni mediate sulla sezione. Queste si possono ottenere mediando in y le equazioni già mediate sulla verticale [(18.4), (18.6a), (18.6b) e (18.10)] e che definiscono il problema del campo intermedio.



Sulla sezione Ω la media di $f(x, y, z, t)$ è definita come:

$$\bar{f} \equiv \frac{1}{\Omega} \int_{-b_1}^{b_2} \int_{\eta}^h f dz dy = \frac{1}{\Omega} \int_{-b_1}^{b_2} \bar{f} Y dy \quad \text{con} \quad \Omega \equiv \int_{-b_1}^{b_2} \bar{Y}(y) dy \quad (20.1)$$

In particolare

$$\bar{U} \equiv \frac{\int_{-b_1}^{b_2} \bar{U} Y dy}{\Omega} = \frac{Q}{\Omega}$$

Come nel caso del campo intermedio si derivano per sommi capi le equazioni dinamiche.

L'equazione di continuità

Si ottiene integrando in y la (18.4)

$$0 = \int_{-b_1}^{b_2} \left[\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{U}Y)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{V}Y)}{\partial y} \right] dy \stackrel{\text{(Leibnitz)}}{=} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{-b_1}^{b_2} Y dy}_{(=\Omega)} - [Y]_{b_2} \frac{\partial b_2}{\partial t} - [Y]_{b_1} \frac{\partial b_1}{\partial t} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\int_{-b_1}^{b_2} \bar{U}Y dy}_{(=\bar{\bar{U}}\Omega)} - [\bar{U}Y]_{b_2} \frac{\partial b_2}{\partial x} - [\bar{U}Y]_{b_1} \frac{\partial b_1}{\partial x} + [\bar{V}Y]_{b_2} - [\bar{V}Y]_{-b_1}$$

In questo caso i termini di contorno (a $y = -b_1, b_2$) si annullano non sulla base di condizioni cinematiche tipo (18.2) ma per le condizioni:

$$[\bar{U}]_{-b_1, b_2} = [\bar{V}]_{-b_1, b_2} = 0 \quad (\text{aderenza/impermeabilità}) \quad (20.2a)$$

$$[Y]_{-b_1, b_2} = 0 \quad (\text{alvei naturali}), \quad \frac{\partial b_1}{\partial t} = \frac{\partial b_2}{\partial t} = 0 \quad (\text{alvei artificiali}) \quad (20.2b)$$

Utilizzando tali relazioni e la definizione (20.1) l'equazione di continuità mediata su Ω diventa:

$$\boxed{\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\bar{U}}\Omega)}{\partial x} = 0.} \quad (20.3)$$

L'equazione del moto (componente x)

Si ottiene integrando in y la (18.6a). Anche in questo caso si utilizza la Regola di Leibnitz e le relazioni (20.2).

Inoltre si ipotizza che:

- $\frac{\partial h}{\partial y} \approx 0$ cioè che la quota della superficie libera sia poco inclinata alle curve per le azioni centrigughe;
- $\bar{\bar{T}}_{xx} \ll gh$ cioè che il carico dovuto alle tensioni di Reynolds mediate su Ω sia molto minore del carico piezometrico.

Si giunge, quindi, alla

$$\boxed{\frac{\partial(\bar{U}\Omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\beta\bar{U}^2\Omega)}{\partial x} = -g\Omega\frac{\partial h}{\partial x} + \bar{\tau}_x^h b - \bar{\tau}_x^\eta B} \quad (20.4)$$

dove

$$\beta \equiv \frac{\int_{-b_1}^{b_2} (\bar{U}^2 - \bar{T}_{xx}^D) Y dy}{Q^2} = \text{corr. } \bar{U} = \bar{U}(y), \quad \underbrace{1.03}_{(\text{moto turb.})} \leq \beta \leq \underbrace{1.33}_{(\text{moto lamin.})} \quad (20.5a)$$

$$\bar{\tau}_x^h \equiv \frac{1}{b} \int_{-b_1}^{b_2} t_x^h dy, \quad \bar{\tau}_x^\eta \equiv \frac{1}{B} \int_{-b_1}^{b_2} t_x^\eta dy, \quad b = b_1 + b_2, \quad B = \text{perim. bagnato.} \quad (20.5b)$$

L'equazione di convezione-diffusione

Si ottiene integrando in y la (18.10) o la forma conservativa

$$\frac{\partial(\bar{C}Y)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{U}\bar{C}Y)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{V}\bar{C}Y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[Y(\bar{D}_x^T + K_x) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[Y(\bar{D}_y^T + K_y) \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right]. \quad (20.6)$$

Anche in questo caso si usa la regola di Leibnitz e le condizioni (20.2) oltre all'ipotesi:

- $\frac{\partial}{\partial y} (D_x^T + K_x) \approx 0$ cioè che i coefficienti di diffusione e dispersione longitudinale non cambino molto attraverso la sezione

per giungere alla

$$\frac{\partial(\bar{C}'\Omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{U}\bar{C}'\Omega)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \Omega \left[(\bar{D}_x^T + K_x) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} - \bar{U}'\bar{C}' \right] \right\}$$

dove

$\bar{U}' \equiv \bar{U} - U =$ scarto di velocità mediata in z ;

$\bar{C}' \equiv \bar{C} - C =$ scarto di concentrazione mediata in z .

Utilizzando una chiusura alla Fick per il termine dispersivo $\overline{U'C'}$ si ha:

$$\overline{U'C'} \equiv -K \frac{\partial \overline{C}}{\partial x}$$

da cui

$$\frac{\partial(\overline{C}\Omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{U}\overline{C}\Omega)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\overline{K} + K_x + \overline{D}_x^T) \Omega \frac{\partial \overline{C}}{\partial x} \right].$$

Sviluppando il membro di sinistra tramite l'equazione di continuità (20.3) e osservando che $K \gg K_x, \overline{D}_x^T$ si ottiene l'equazione finale

$$\boxed{\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \overline{U} \frac{\partial \overline{C}}{\partial x} = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \Omega \frac{\partial \overline{C}}{\partial x} \right)} \quad (20.7)$$

che può essere risolta una volta noto il coefficiente K .

Stima di K

Questa è caratterizzata da una grande variabilità dovuta a:

- procedure usate per la stima;
- contesti idraulici diversi (alvei naturali, canali d'irrigazione);
- dati ottenuti in regimi in cui lo schema diffusivo non vale;
- disuniformità altimetriche e planimetriche degli alvei.

È comunque possibile stimare K in funzione di:

- $u_* Y$:
$$30 \leq \frac{K}{u_* Y} \leq 3000$$

Y è una scala inappropriata perchè K varia su 3 o.d.g.;

- $u_* b$:
$$2 \leq \frac{K}{u_* b} \leq 50$$

b è migliore perchè la variazione è su 2 o.d.g.

La relazione d'uso pratico più affidabile è quella di Fisher:

$$\boxed{K = 0.11 \frac{\overline{U}^2 b^2}{u_* \overline{Y}}} \quad (20.8)$$

Soluzione

Si cerca una soluzione della (20.7) usando un sistema in moto a velocità \bar{U} per cui:

$$\xi = x - \bar{U}t, \quad \tau = t, \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\bar{U} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Queste sostituite nella (20.7) porgono:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} - \bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} + \bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(K \Omega \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \right) \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(K \Omega \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \right)}$$

che nel caso uniforme ($\partial \Omega / \partial \xi = 0$, $\partial K / \partial \xi = 0$) diventa l'equazione di diffusione pura:

$$\boxed{\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} = K \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2}} \quad (20.9)$$

di cui è ben nota la **Soluzione Fondamentale** per immissione istantanea di \mathcal{M} in $\xi = 0$ [si veda (2.8)]:

$$\boxed{\bar{C}(\xi, \tau) = \frac{\mathcal{M}}{\Omega \sqrt{4\pi K \tau}} e^{-\frac{\xi^2}{4K\tau}}} \quad (20.10)$$

[\mathcal{M}/Ω invece di \mathcal{M} per avere la corretta dimensione di \bar{C} .]

Questa soluzione non vale finchè il mescolamento non sia completo su Ω (cioè nel **campo vicino** e nel **campo intermedio**). La distanza L_X dall'immissione da cui la (20.10) è valida si stima in

$$L_X \approx (4 - 10) \frac{\bar{U} b^2}{\bar{D}_x^T}$$

che è simile alla (19.7) ma è funzione delle proprietà del mescolamento longitudinale (\bar{U} , \bar{D}_x^T) invece che trasversale (\bar{U} , \bar{D}_y^T).

[Si dimostri per esercizio che $L_X > L_T$]

Scrivendo la (20.10) in funzione delle coordinate originali si può studiare l'attenuazione del picco di concentrazione e valutare il tempo impiegato dalla nuvola a raggiungere una certa sezione.

Passando alle (x, t) :

$$\bar{C}(x, t) = \frac{\mathcal{M}}{\Omega\sqrt{4\pi Kt}} e^{-\frac{(x-\bar{U}t)^2}{4Kt}}. \quad (20.11)$$

Il **picco** di \bar{C} (o “**colmo**”) viaggia a velocità \bar{U} e si realizza alla sezione x al tempo $t = x/\bar{U}$. Il **massimo locale** di \bar{C} invece si realizza alla sezione x al tempo t_{MAX} che si ottiene derivando la (20.11) in t :

$$0 = \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} = \frac{\mathcal{M}}{\Omega\sqrt{4\pi Kt}} \left[\frac{-2Kt + 2(x - \bar{U}t)\bar{U}t + (x - \bar{U}t)^2}{4Kt^2} \right] e^{-\frac{(x-\bar{U}t)^2}{4Kt}}$$

$$\implies \bar{U}^2 t^2 + 2Kt - x^2 = 0.$$

Scegliendo la soluzione fisicamente accettabile ($t > 0$) cioè quella con il segno della radice positivo:

$$t_{MAX} = \frac{-K + \sqrt{K^2 + x^2\bar{U}^2}}{\bar{U}^2} = -\frac{K}{\bar{U}^2} + \sqrt{\frac{K^2}{\bar{U}^4} + \frac{x^2}{\bar{U}^2}}$$

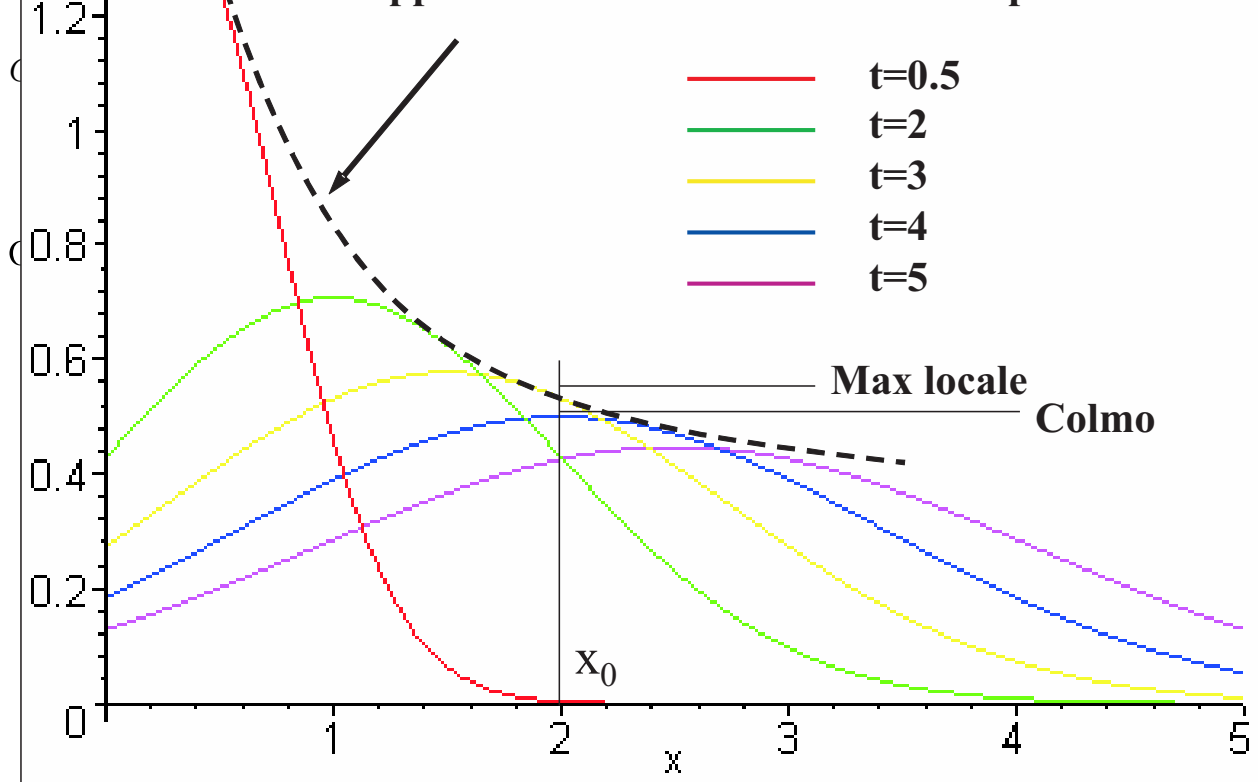
da cui

$$t_{MAX}^2 = \frac{K^2}{\bar{U}^4} - 2\frac{K}{\bar{U}^2} \sqrt{\frac{K^2}{\bar{U}^4} + \frac{x^2}{\bar{U}^2}} + \frac{K^2}{\bar{U}^4} + \frac{x^2}{\bar{U}^2} = \frac{x^2}{\bar{U}^2} - 2\frac{K}{\bar{U}^2} \left[\sqrt{\frac{K^2}{\bar{U}^4} + \frac{x^2}{\bar{U}^2}} - \frac{K}{\bar{U}^2} \right]$$

cioè

$$t_{MAX} \leq \frac{x}{\bar{U}}.$$

Quindi ogni sezione x prefissata viene raggiunta prima dal **massimo locale** e poi dal **picco**.



- dalla (20.11) si nota che l'ampiezza di \bar{C} decade nel tempo come $1/\sqrt{t}$ \implies in un tempo t_0 il segnale si è propagato da $x = 0$ a $x = x_0 = \bar{U}t_0$ con una riduzione d'ampiezza proporzionale a $1/\sqrt{t_0} = \sqrt{x_0/\bar{U}}$;
- alla generica sezione $x = x_0$ il **massimo locale** di \bar{C} è il valore dell'involuppo e si realizza ad un tempo t_{MAX} ($t_{MAX} = 3$ in figura) minore di $t_0 = x_0/\bar{U}$ ($t_0 = 4$ in figura) al quale il **picco** di \bar{C} raggiunge x_0 .

APPENDICE I: TABELLE DI UTILITÀ PRATICA

Grandezza	Getti Ass.	Getti Piani	Pennacchi Ass.	Pennacchi Piani
Velocità in asse	$(7 \pm 1)U_i \frac{L_M}{x}$	$(2.41 \pm 0.04)U_i \left(\frac{L_M}{x}\right)^{1/2}$	$(4.7 \pm 0.2)\left(\frac{B_i}{z}\right)^{1/3}$	$1.66B_i^{1/3}$
Portata vol.	$(0.25 \pm 0.01)Q_i \frac{x}{L_M}$	$(0.50 \pm 0.02)Q_i \left(\frac{x}{L_M}\right)^{1/2}$	$(0.150 \pm 0.015)(B_i z^5)^{1/3}$	$0.34B_i^{1/3} z$
Conc. in asse	$(5.6 \pm 0.1)C_i \frac{L_M}{x}$	$(2.38 \pm 0.04)C_i \left(\frac{L_M}{x}\right)^{1/2}$	/	/

Caratteristiche di Getti e Pennacchi.

Moto	U_m/W_m	l	$R_l (= U_m l / \nu)$	T_m
Scia Piana	-1/2	1/2	0	/
Scia Piana Autopropellente	-3/4	1/4	-1/2	/
Scia Assialsimmetrica	-2/3	1/3	-1/3	/
Scia Assialsimmetrica Autop.	-4/5	1/5	-3/5	/
Strato di Transizione	0	1	1	/
Getto Piano	-1/2	1	1/2	/
Getto Assialsimmetrico	-1	1	0	/
Pennacchio Piano	0	1	1	-1
Pennacchio Assialsimmetrico	-1/3	1	2/3	-5/3

Potenze della coordinata longitudinale (x per i Getti e z per i Pennacchi) che descrive la variazione delle principali grandezze di moti a T.L. Adattamento da Tennekes & Lumley (1972).

APPENDICE II: STRUTTURA AUTOSIMILARE DEI TERMINI DI (12.30)

Si riporta la dipendenza dei vari termini della equazione (12.30) da x ed η distante dall'asse ($\eta \gg 1$), al centro della regione di produzione ($\eta \sim 1$) e in asse ($\eta \ll 1$):

Posizione	$\frac{\mathcal{C}_1}{\Phi(x)}$	$\frac{\mathcal{C}_2}{\Phi(x)}$	$\frac{\mathcal{P}_1}{\Phi(x)}$	$\frac{\mathcal{P}_2}{\Phi(x)}$	$\frac{\mathcal{T}}{\Phi(x)}$
$\eta \gg 1$	$\eta^3 f^2$	ηf	$\eta^2 f^2$	$\eta^3 f^2$	$\eta^3 f$
$\eta \sim 1$	$6Ae^{-2}$	$Ae^{-1}(-1 + 3e^{-1})$	$4e^{-2}$	Ae^{-1}	$2Ae^{-1}$
$\eta \ll 1$	$\eta(1 - \eta^2)$	$\eta(1 - 9\eta^2/2)$	$\eta^2(1 - \eta^2)$	$\eta(1 - 4\eta^2)$	$\eta(1 - 5\eta^2/3)$

Dipendenza dei contributi alla (12.30) in funzione della posizione.

dove $\Phi(x) = \frac{U_a^3}{l_G R l_T}$ ed $A \cong 0.067$.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Batchelor, G.K. (1967)

“The theory of homogeneous turbulence”.

Cambridge University Press.

Corrsin, S. & Kistler, A.L. (1954)

“The free-stream boundaries of turbulent flows”.

Technical Note 3133 - NACA.

Elder, J.W. (1959)

“The Dispersion of Marked Fluid in Turbulent Shear Flow”.

J. Fluid Mech. **5**, 544-560.

Holmes, P., Lumley, J.L. & Berkooz, G. (1996)

“Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry”.

Cambridge University Press.

Hussein, H.J., Capp, S. & George, W.K. (1994)

“Velocity measurements in a high-Reynolds-number, momentum-conserving, axisymmetric turbulent jet”.

J. Fluid Mech. **258**, 31-75.

Kolmogorov, A.N. (1941)

“Dissipation of energy in a locally isotropic turbulence”.

Dokl. Akad. Nauk SSSR **32**, 16-18.

Mobbs, F.R. (1968).

“Spreading and contraction at the boundaries of free turbulent flows”.

J. Fluid Mech. **33**, 227-240.

- Panchapakesan, N.R. & Lumley, J.L. (1993)
“Turbulence measurements in axisymmetric jets of air and helium. Part 1. Air jet”.
J. Fluid Mech. **246**, 197-223.
- Pope, S.B. (2000)
“Turbulent Flows”.
Cambridge University Press.
- Richardson, L.F. (1926)
“Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph”.
Proc. R. Soc. London **A 110**, 709-737.
- Rutherford, J.C, (1994)
“River Mixing”.
John Wiley Sons, Chichester, England.
- Sreenivasan, K.R. (1984)
“On the scaling of the turbulence energy-dissipation rate”.
Phys. Fluids **27(5)**, 1048-1051.
- Taylor, G.I. (1921)
“Diffusion by continuous movements”.
Proc. London Math. Soc. **20**, 196-211.
- Tennekes, H. & Lumley, J.L. (1972).
“A First Course in Turbulence”.
MIT Press.

Townsend, A.A. (1976).
“Buoyancy Effects in Fluids”.
Cambridge University Press.

Turner, J.S. (1973).
“The Structure of Turbulent Shear Flow”.
Cambridge University Press.

Webel, G. & Schatzmann, M. (1984)
“Transverse mixing in open channel flow”.
J. Hydr. Eng. **110**, 423-435.