

Appunti di Idraulica Ambientale

Fondamenti sulla diffusione e dispersione di traccianti passivi

Giovanni Seminara, Marco Tubino

Università di Genova, Anno Accademico 1995/96

Facoltà di Ingegneria
Università degli Studi di Trento

—

ATTENZIONE:
IN QUESTA VERSIONE MANCANO TUTTE LE FIGURE

Indice

1	NOZIONI INTRODUTTIVE	7
1.1	Ruolo dell'Idrodinamica nella gestione ambientale	7
1.2	Problemi, processi, scale e strategie	11
2	RICHIAMI SULLA DIFFUSIONE MOLECOLARE	15
2.1	Definizioni preliminari	15
2.2	Legge di Fick	16
2.3	Equazione di diffusione	18
2.4	Soluzione fondamentale e sue proprietà	19
2.5	Alcune soluzioni elementari dell'equazione di diffusione in una dimensione	21
2.5.1	Il caso di una distribuzione iniziale $C(x, 0)$ assegnata . . .	21
2.5.2	Il caso in cui la concentrazione è assegnata in un punto in funzione del tempo	22
2.5.3	Il caso in cui è assegnata la massa immessa in $x = 0$ come funzione del tempo	24
2.5.4	Il caso in cui è assegnata la massa $m(x, t)$ immessa in ogni punti in funzione del tempo	24
2.5.5	Influenza di pareti	25
2.6	La soluzione fondamentale in 2 o 3 dimensioni	26
2.7	Diffusione e trasporto laminare	27
3	DIFFUSIONE TURBOLENTA	29
3.1	Introduzione	29
3.2	Strumenti probabilistici	31
3.2.1	Medie d'insieme e medie temporali	31
3.2.2	Caratteristiche del processo stocastico	31
3.2.3	Concentrazione media	33
3.2.4	Nuvola media e media delle nuvole	33
3.3	Teoria di Taylor della diffusione in turbolenza omogenea e sta- zionaria	34
3.3.1	Premessa	34
3.3.2	Dimensioni della nuvola media e covarianza delle fluttua- zioni dello spostamento delle particelle	35
3.3.3	Stima della covarianza delle fluttuazioni di spostamento delle particelle per tempi piccoli (Taylor, 1921)	37

3.3.4	Struttura di $S_{ij}(t)$ per il caso di turbolenza omogenea e stazionaria (Taylor, 1921; Batchelor, 1949)	38
3.3.5	Variazione nel tempo delle dimensioni della nuvola media	40
3.3.6	Generalizzazione a moti in cui la turbolenza è omogenea in una sola direzione	42
3.4	Diffusività turbolenta ed equazione semiempirica della diffusione turbolenta	43
3.4.1	Diffusione turbolenta e diffusione molecolare	43
3.4.2	Equazione della diffusione turbolenta	44
3.4.3	Il tensore di diffusività turbolenta	44
3.5	Diffusione per tempi minori della scala Lagrangiana: la legge 4/3	46
3.5.1	Rilevanza della questione	46
3.5.2	I diversi regimi del processo di diffusione (Batchelor, 1950, 1952)	47
3.5.3	La legge di Obukhov (1941) - Batchelor (1950)	49
3.5.4	L'equazione di diffusione nel regime intermedio	51
3.5.5	Verifica sperimentale della Legge 4/3	52
3.5.6	Il caso di una sorgente puntuale	54
3.6	Considerazioni conclusive	54
4	DISPERSIONE LAMINARE E TURBOLENZA	57
4.1	Introduzione	57
4.2	Dispersione laminare unidirezionale stazionaria	58
4.2.1	Il caso della pura diffusione trasversale	58
4.2.2	Il caso di pura convezione longitudinale non uniforme	60
4.2.3	Dispersione ovvero effetto combinato di convezione longitudinale non uniforme e diffusione trasversale: teoria di Taylor (1953)	62
4.2.4	Estensione della teoria di Taylor: il contributo di Chatwin (1970)	66
4.2.5	Il metodo dei momenti di Aris (1956)	70
4.3	Dispersione turbolenta unidirezionale stazionaria	72
4.3.1	Dispersione e diffusione turbolenta	72
4.3.2	Dispersione turbolenta in correnti piane a superficie libera (Elder, 1959)	73
4.3.3	Dispersione turbolenta in condotti a sezione circolare (Taylor, 1954)	75

Capitolo 1

NOZIONI INTRODUTTIVE

Negli ultimi anni si è fortemente accresciuto l'interesse per il controllo non più solo della *quantità* bensì anche della *qualità* delle acque. Diversi tipi di inquinanti vengono immessi nel ciclo idrologico e la loro evoluzione dipende sia dall'idrodinamica dei processi di trasporto e miscelamento sia dai processi chimici e biologici che avvengono nei corpi idrici naturali.

L'Idraulica ambientale affronta gli *aspetti idrodinamici* della gestione della *qualità delle acque* nei sistemi idrici naturali e artificiali (dunque corsi d'acqua, laghi, serbatoi, coste, lagune ed estuari).

1.1 Ruolo dell'Idrodinamica nella gestione ambientale

a. Il ruolo dell'*idrosfera*, come dell'*atmosfera* non è solo *cruciale* per il *trasporto* di sostanze vitali per il ciclo biologico e produttivo, bensì anche per lo *smaltimento dei rifiuti* come emerge dalla ovvia dalla semplice considerazione per la quale, se aria e acqua permanessero in quiete annegheremmo e/o soffocheremmo nei nostri rifiuti.

Tale ruolo costituisce tuttavia solo uno dei contributi alla complessiva gestione dell'ambiente. Uno schema di come è articolato il sistema della gestione ambientale è riportato in figura 1.1, sostanzialmente tratta da uno studio della 'U.S. Environmental Protection Agency' (E.P.A.) del 1977.

Al centro dello schema si colloca il sistema di *produzione, trasporto ed utilizzo* dei beni e servizi. Ciascuna di queste fasi del ciclo produttivo si avvale di risorse naturali, economiche ed umane. L'output del processo produttivo è la produzione di *beni e servizi*. Il processo produttivo pone problemi di gestione ambientale poiché ciascuna delle fasi del processo di produzione, trasporto ed utilizzo dei beni e servizi implica la produzione di rifiuti, talvolta per cause accidentali, che debbono essere smaltiti in uno dei grandi recipienti terrestri, l'atmosfera, l'idrosfera o la geosfera. Si pone dunque un problema di conservazione della qualità dell'ambiente il cui deterioramento ha un impatto sulla salute, sul clima, sull'equilibrio degli ecosistemi e sullo svolgimento di altre attività distinte da quelle che hanno causato tale deterioramento. Ad esempio un aumento di temperatura dell'acqua dovuto ad uno scarico caldo (per esempio

di una centrale termoelettrica o nucleare) riduce la capacità di assimilazione di rifiuti che richiedono ossigeno quali i liquami. Si noti poi che la nozione di 'inquinante' va intesa in senso lato. Sono tali tutte le attività che hanno un impatto sull'equilibrio ambientale in generale. Ad esempio la costruzione di opere idrauliche ha sempre un effetto sul regime idrologico: la costruzione di una diga modifica il regime delle portate e il regime del trasporto dei sedimenti il che può influenzare anche l'equilibrio biologico del corso d'acqua, la costruzione di un pennello costiero altera l'assetto delle correnti costiere e può dar luogo a fenomeni di deposito e erosione costieri non sempre previsti né desiderati.

Si pone dunque un problema di 'controllo ambientale'. L'ingegnere che opera nel contesto idraulico ambientale si occupa in particolare del blocco 'Trasporto, trasformazione, accumulo', talvolta in collaborazione col chimico ed il biologo. Si occupa cioè dei processi che si realizzano fra il punto in cui l'inquinante è rilasciato nel corpo idrico e le regioni in cui la qualità dell'acqua viene osservata e controllata.

Tale attività ha poi un effetto di 'feedback' sul processo ingegneristico che dà luogo al rilascio dell'inquinante, suggerendo modifiche del processo di trattamento dell'inquinante stesso (o la necessità di introdurlo) al fine di soddisfare obiettivi di conservazione della qualità delle acque del corpo idrico recipiente.

b. Inquinanti e strategie di controllo

L'utilizzo dei corpi idrici, in misura limitata e controllata, per il trasporto e l'eliminazione di alcuni rifiuti è del tutto naturale. Lo stesso ciclo idrologico attua in modo naturale tale strategia: basti pensare che sostanze minerali dovute a processi di degradazione sono trasportate, in soluzione o sotto forma di sedimenti, dai corsi d'acqua che hanno sempre costituito uno dei veicoli di smaltimento di rifiuti organici. Il mare e gli oceani hanno poi sempre svolto il ruolo di ricettori dei materiali raccolti dal dilavamento della superficie terrestre.

Al fine di individuare possibili strategie di controllo dello smaltimento dei rifiuti, tentiamone una pur semplice classificazione sulla base del loro 'grado di pericolosità'.

i) Sali naturali e sedimenti.

Materiali non tossici che si trasformano in inquinanti solo se in dosi eccessive.

ii) Calore di smaltimento.

Calore smaltito dalle centrali termoelettriche o nucleari attraverso gli scarichi del circuito di raffreddamento.

Temperature eccessive possono danneggiare localmente l'ecosistema.

iii) Rifiuti organici.

Liquami domestici (contenenti carbonio, azoto, fosforo, etc.) possono essere, se adeguatamente trattati, assimilati in corpi idrici sufficientemente estesi dove la diluizione può essere sufficiente a ridurre l'esigenza di ossigeno ai valori naturalmente disponibili attraverso l'ossigeno disciolto nell'acqua.

iv) Metalli residui.

Metalli come piombo, mercurio, cadmio, etc. sono naturalmente presenti nell'ambiente in quantità molto modeste. Acque di rifiuto possono contenere percentuali eccessive di tali sostanze che possono essere tossiche.

v) Sostanze chimiche organiche di sintesi.

Si tratta di sostanze che sono soggette a un processo di degradazione molto lento e risultano spesso soggette a bioaccumulazione attraverso la catena alimentare: un materiale inizialmente fortemente diluito può avere un aumento di concentrazione di un fattore 10^5 attraverso i successivi passi della catena alimentare.

vi) Materiali radioattivi.

Tali materiali (ad es. il plutonio) degradano molto lentamente e pongono quindi un problema di immagazzinamento a lungo termine al riparo da perdite o contaminazione di acque naturali.

vii) Armi chimiche e biologiche.

È ovvio che si tratta di sostanze non disperdibili nell'ambiente in quanto progettate per essere enormemente tossiche in *dosi molto modeste*.

La grande varietà di inquinanti possibili, il loro diverso grado di diffusione e pericolosità, implicano che *la strategia di smaltimento deve essere specifica per il tipo di inquinante*. Tre possibili *classi di strategie* possono essere individuate.

1. Strategia di dispersione

Si può riassumere con lo slogan: “la diluizione è la soluzione del problema dell'inquinamento”. (Suona meglio nella versione inglese “dilution is the solution to pollution”).

È ovviamente strategia adeguata allo smaltimento di sostanze organiche naturali e calore che debbono essere riassimilate nell'ecosistema.

2. Strategia di contenimento

La strategia di dispersione è in generale inadatta allo smaltimento di metalli a meno che il loro rilascio non dia luogo a modestissimi aumenti di concentrazione.

La strategia adatta al caso dei metalli e dei composti chimici persistenti è quella di *contenimento*, cioè del *non rilascio* nell'ambiente.

3. Strategia della non-produzione

È certamente l'unica adatta a sostanze dinamiche letali. Un ampio dibattito si è sviluppato al riguardo dei rifiuti radioattivi e dell'opportunità o meno della produzione di energia nucleare.

La possibilità di attuare la strategia adeguata ad ogni tipo di inquinante impone l'opportunità di *mantenere il più possibile separate* le diverse specie di inquinanti. I sistemi di trattamento non sono infatti in generale molto efficienti nel separare sostanze *tossiche* da sostanze *non tossiche*. Ad esempio i metalli si attaccano facilmente sulle particelle dei liquami che vengono rimosse negli

impianti di trattamento dando luogo a fanghi molto ricchi di metalli residui che pongono un nuovo problema di smaltimento non facilmente affrontabile.

Queste note si occupano di quei problemi di smaltimento di inquinanti per i quali risulta adeguata una strategia di dispersione. Quest'ultima pone un gran numero di problemi idrodinamici connessi alle diverse fasi ed alle diverse forme del processo di dispersione.

c. Sorgenti puntuali e sorgenti diffuse

Norme e regolamenti per il controllo dell'inquinamento distinguono in generale fra *sorgenti puntuali e sorgenti distribuite*.

Sorgenti puntuali vengono intese quegli scarichi provenienti da una struttura specificamente progettata per lo smaltimento delle acque di rifiuto di qualche processo industriale o impianto di trattamento. Alla stessa categoria si possono fare appartenere le perdite accidentali di petrolio delle navi da trasporto o il rilascio di sostanze radioattive da impianti nucleari.

Sorgenti distribuite sono quelle in cui l'inquinante viene immesso nel ciclo idrologico in modo appunto distribuito. È il caso delle fognature bianche urbane, dell'erosione dei versanti, delle piogge acide, delle acque di lavaggio delle strade, etc. Per le sorgenti diffuse il trattamento non risulta in generale possibile. Inoltre una strategia di gestione di inquinanti diffusi richiede la considerazione del bilancio di massa complessivo della sostanza a partire dal suo rilascio fino alle diverse destinazioni ambientali cui può pervenire. Si pensi ad esempio al piombo dei gas di scarico degli autoveicoli: esso viene emesso inizialmente in forma di aerosols e può quindi depositare sulle strade, essere dilavato e, attraverso le fognature bianche, essere trasportato fino al più vicino corpo idrico naturale. Può tuttavia essere trasportato dal vento e depositato in aree anche molto lontane dal punto di emissione.

d. Idraulica classica e problemi ambientali

I fenomeni idrodinamici trattati in queste note non sono rilevanti solo al fine di dimensionare opere specificamente destinate allo smaltimento di inquinanti, bensì anche per la valutazione dell'impatto che classiche opere idrauliche possono avere sull'equilibrio ambientale dei corpi idrici.

Qualche esempio:

- nei serbatoi artificiali si può manifestare una riduzione della qualità delle acque per effetto di stratificazione termica estiva cui è associata una riduzione del contenuto di ossigeno negli strati inferiori;
- diversivi, che deviano le acque di un corso d'acqua a scopi svariati, possono ridurre le sue naturali capacità di smaltimento di rifiuti o nel caso la loro capacità di contrastare l'intrusione salina degli estuari;
- gli stessi diversivi possono trasportare forti quantità di sali disciolti, sedimenti, sostanze nutrienti e parassiti in aree dove altrimenti tali sostanze non verrebbero;
- opere di difesa portuali interferiscono con le correnti litoranee e possono quindi alterare il regime idrodinamico che controlla la dispersione delle sostanze inquinanti.

Figura 1.1:

1.2 Problemi, processi, scale e strategie

a. Il problema tipico analizzato nel corso di queste note può descriversi come segue:

- i) Una condotta sommersa scarica un defluente in un corpo idrico generando un getto. La prima fase di miscelamento del getto è controllata dalla sua quantità di moto e dagli effetti di galleggiamento associati alle differenze di densità fra l'effluente e il liquido recipiente.

Si parla di *getto* se gli effetti di galleggiamento sono trascurabili, di *pen-nacchio* se risultano trascurabili gli effetti dell'impulso iniziale nel qual caso il miscelamento è controllato soltanto dagli effetti di galleggiamento, di *getto galleggiante* se entrambi gli effetti svolgono un ruolo significativo.

- ii) La *seconda fase* del processo è quella in cui si forma una *nuvola di inquina-nante* che viaggia con la velocità della corrente. In questa fase il processo è controllato sia dalla quantità di moto e galleggiamento dell'effluente scaricato, sia dalle caratteristiche della corrente che investe il getto.
- iii) Nella terza fase il miscelamento è controllato dai processi di diffusione tur-bolenta e dispersione. La diffusione turbolenta è il processo attraverso il quale le particelle di inquinante diffondono nel campo di moto sotto l'effe-tto delle fluttuazioni random di velocità caratteristiche dei moti turbolenti. Vedremo che tale processo è analogo a quello dovuto ai moti molecolari (diffusione molecolare) ma è caratterizzato da intensità (diffusività) molto maggiori.

La *dispersione* è il frutto dell'effetto combinato della diffusione trasversale e del trasporto da parte di un moto medio (corrente) non uniforme cioè caratterizzato da velocità che variano in direzione trasversale (shear nella locuzione anglosassone).

Fase	Processo	Scala Spaziale (m)	Scala Temporale (s)
I	Miscelamento del getto galleggiante	$< 10^2$	$< 10^3$
II	Formazione della nuvola	10^2-10^3	10^2-10^3
III	Diffusione turbolenta/dispersione	10^2-10^4	10^3-10^5
IV	Trasporto da parte di correnti di grande scala	10^3-10^5	10^3-10^6
V	Effetti integrati su molti cicli	10^4-10^6	10^6-10^8

Tabella 1.1: Scale spaziali e temporali dei diversi processi che si verificano nello smaltimento di uno scarico inquinante.

- iv) In una quarta fase la nuvola di inquinante può essere trasportata dai moti di grande scala cioè dalle correnti originate da diverse possibili cause in diversi contesti (correnti litoranee costiere, correnti mareali in lagune o estuari).
- v) Su scale temporali ancora maggiori le correnti mareali possono indurre effetti integrati.

b. I processi delineati in precedenza sono caratterizzati da scale spaziali e temporali molto diverse riassunte nella tabella 1.1.

La diversità delle scale spazio-temporali presenta conseguenze anche sulla possibilità di smaltire i diversi tipi di inquinanti. Ad esempio i composti dell'azoto possono manifestare la loro tossicità per tempi inferiori a 10^4 s, il *bod* cioè l'esigenza di ossigeno è importante per tempi inferiori a 10^6 s mentre fenomeni di tossicità cronica dovuti a inquinanti persistenti (come i metalli) possono verificarsi per tempi superiori a 10^8 s.

c. La diversità delle scale temporali e spaziali, e i diversi meccanismi fisici che svolgono un ruolo importante nelle diverse fasi del processo di smaltimento rende in genere inopportuno l'obiettivo di costruire un modello complessivo del processo che ne analizzi simultaneamente tutte le fasi. È in genere più significativo un approccio differenziato che utilizza modelli diversi per le singole fasi.

Gli strumenti di analisi usualmente possibili sono i seguenti.

- i) Stime fondate su analisi dimensionale ed esperienza.

Si tratta di uno strumento finalizzato ad ottenere una prima stima delle caratteristiche di un processo che può consentire di valutare quali dati e quali tipo di modello sono necessari per una più accurata valutazione.

Ne vedremo numerosi esempi nel seguito.

- ii) Modelli numerici.

L'affidabilità di un modello numerico è evidentemente misurata dalla validità delle approssimazioni su cui è fondata la rappresentazione del processo fisico in termini matematici. Spesso nella formulazione del modello matematico si rivela fondamentale l'utilizzo dello strumento i).

I tipi di modelli numerici sono numerosi. Ad esempio

- modelli che essenzialmente risolvono equazioni differenziali con tecniche alle differenze finite o agli elementi finiti o simulando il processo di diffusione come un processo stocastico con sovrapposta corrente;
- modelli per l'analisi di dati di campo;
- modelli che disaccoppiano i diversi processi (fisici, chimici e biologici) su modeste scale temporali e li analizzano in sequenza su scale temporali maggiori.

iii) Modelli fisici (Idraulici).

Hanno il vantaggio di essere in grado di simulare complessi effetti tridimensionali in sistemi fluidi stratificati, quali macrovortici, onde interne con o senza frangimento, moti stratificati, interazioni con correnti, effetti di non stazionarietà, etc.

Svantaggi di tale strumento sono:

- impossibilità di simulare appropriatamente tutti i meccanismi fisici in gioco; in particolare tali modelli mantengono costante il numero di Froude poiché gli effetti gravitazionali (incluso il galleggiamento) svolgono un ruolo fondamentale, ma non possono simulare gli effetti di resistenza e le caratteristiche della turbolenza in modo appropriato poiché il numero di Reynolds non viene preservato;
- difficoltà di rappresentare adeguatamente le effettive condizioni al contorno, specie nei moti stratificati; in particolare il ruolo degli agenti meteorologici che interviene attraverso la condizione al contorno sulla superficie libera risulta difficilmente simulabile in modo adeguato.

iv) Misure di campo.

Misure di campo di tipo Euleriano (cioè in una posizione fissata al variare del tempo) sono agevoli ma i processi di smaltimento degli inquinanti richiedono interpretazioni di tipo Lagrangiano (cioè la capacità di seguire le particelle nel corso del loro movimento).

Queste ultime misure sono complesse e costose e vengono realizzate in genere in misura molto modesta accoppiandole ad estese misure di tipo Euleriano.

Misure di campo sono poi spesso utilizzate per la taratura di modelli su una configurazione al vero.

v) Approcci integrati.

Configurazioni complesse richiedono poi la costruzione di più modelli, spesso di natura diversa, interagenti fra loro, e predisposti 'ad hoc' per ogni singolo problema.

L'esperienza dell'utilizzatore e le esigenze dell'organismo di controllo sono i fattori che motivano la scelta della specifica strategia di indagine adottata.

Capitolo 2

RICHIAMI SULLA DIFFUSIONE MOLECOLARE

2.1 Definizioni preliminari

- *Il sistema*: miscela binaria di 2 componenti (usualmente, in idrodinamica ambientale, 2 liquidi).
- *Il fenomeno*:
 - *Diffusione ordinaria*, quando il movimento di una delle specie attraverso la miscela origina da un *gradiente di concentrazione*.
 - Il movimento può originare da altre cause usualmente *più deboli* se non *artificialmente imposte* sul sistema.
 - * un gradiente di pressione (*pressure diffusion*);
 - * *forze esterne* agenti sulle singole specie, come campi elettrici (*diffusione forzata*);
 - * *concentrazione di temperatura* (*diffusione termica*).

È per noi rilevante solo la *diffusione ordinaria*.

- *Qualche definizione*

Esistono numerose definizioni di *concentrazione*, *velocità* e *flusso* per le singole specie (vedi Corso di P.I.C.A.).

Per i nostri scopi sono sufficienti le seguenti:

- *Concentrazione*

- * Concentrazione massica specie A : C_A

$$C_A = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta M_A}{\delta V}$$

δV : volume di miscela

δM_A : massa della specie A in δV

N.B.: $(\delta V)^{1/3}$ deve risultare

$$\ll \frac{1}{C} \frac{dC}{dx} \text{ (scala eterogeneità macroscop.)}$$

$$\gg \lambda \text{ (scala distanze intermolecolari)}$$

* Concentrazione massica della $\bar{C} = C_a + C_B = \rho$ (densità in Idrodinamica).

- *Velocità*

* Vel. *assoluta* specie A: \mathbf{v}^A

* Vel. *media della miscela* $\bar{\mathbf{v}} = C_A \mathbf{v}^A + C_B \mathbf{v}^B / \bar{C}$

* Vel. *relativa* specie A: $\mathbf{v}^A - \bar{\mathbf{v}}$

- *Flusso di massa*

* Flusso di massa *assoluto* specie A: $\mathbf{q}^A (\mathbf{q}^A \cdot \mathbf{n}) dA dt$ è la massa di specie

Figura 2.1:

A che attraversa l'areola dA in dt

$$\mathbf{q}^A = C_A \mathbf{v}^A$$

* Flusso di massa specie A *relativo* moto medio

$$\hat{\mathbf{q}}^A = C_A (\mathbf{v}^A - \bar{\mathbf{v}})$$

2.2 Legge di Fick

- Nel seguito:

- assumiamo *miscela in quiete* ($\bar{\mathbf{v}} = 0$) e a *densità costante* ($\bar{C} = \text{cost.}$)

- eliminiamo pedice A con riferimento al soluto ($C_A \rightarrow C, \hat{\mathbf{q}}^A = \mathbf{q}^a = \mathbf{q}$)

- Fick (1855)¹:

¹Fisiologo tedesco, "On liquid diffusion" Philos. Mag. 4, pg. 30.

“It is quite natural to suppose that this law for the diffusion of salt in its solvent must be identical with that according to which the diffusion of heat in a conducting body takes place.....”

Il flusso di soluto è proporzionale al gradiente di concentrazione e si attua nel senso delle concentrazioni decrescenti

$$\mathbf{q} = -D\nabla C \quad (2.1)$$

D : coefficiente di diffusione o diffusività molecolare $[D] = L^2T^{-1}$

- La legge di Fick è l'equivalente
 - della legge di Fourier per la termoconduzione
 - della legge di Newton per la diffusione viscosa
- *Diffusività molecolare nei liquidi*
 - Conoscenze molto limitate (vedi P.I.C.A.)
 - Per il caso di
 - * diffusione ordinaria di particelle sferiche sufficientemente grandi da 'sentire' il solvente come un continuo.

Teoria idrodinamica di Stokes-Einstein per miscele diluite

$$D = \frac{k}{\mu} \frac{T}{6\pi R} \quad (2.2)$$

con

R : raggio della particella

T : temperatura assoluta

μ : viscosità dinamica del solvente

k : costante di Boltzmann $1.38 \cdot 10^{-16}$ erg/molecole $\cdot ^\circ k$

Posto $T \simeq 300^\circ k$, $\mu \simeq 1cP$, $R \simeq 10^{-8}$ cm segue

$$D \sim 0(10^{-5})\text{cm}^2\text{s}^{-1}$$

- La diffusività molecolare dei liquidi è in generale:
 - * fortemente dipendente dalla concentrazione
 - * dipendente dalla temperatura.

La (2.2) ne suggerisce anche la dipendenza da forma e dimensioni delle particelle di soluto.

Figura 2.2:

2.3 Equazione di diffusione

Sia $C(\mathbf{x}, t)$ la concentrazione in \mathbf{x} (coordinate spaziali o Euleriane) all'istante t . Eseguiamo bilancio di massa di soluto su volume di controllo V .

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \int_S}_{\text{Variaz. massa soluto nel volume di controllo}} \underbrace{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS}_{= 0} = 0 \quad \text{Flusso di massa di soluto attraverso superf. di controllo}$$

(2.3)

Applicando Ostrogradski-Gauss-Green:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} \quad (2.4)$$

Sostituendo la (2.1):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla C) = \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left(D \frac{\partial C}{\partial x_\ell} \right) \quad (2.5)$$

Per soluto *omogeneo* (D costante):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x_\ell^2} = D \nabla^2 C \quad (2.6)$$

Osservazioni

- i) Le (2.5), (2.6) governano un fenomeno di *pura diffusione*, in assenza cioè di *moto macroscopico* del fluido o *reazioni chimiche*.
- ii) L'equazione di *diffusione* è *lineare* soddisfa quindi al *principio di sovrapposizione degli effetti* (soluzioni complesse, cioè corrispondenti a condizioni al contorno complesse, possono ottenersi per sovrapposizione di soluzioni elementari).

²N.B.: indice ripetuto e figurante in un solo membro si considera *sommato*.

- iii) L'equazione di *diffusione* è formalmente *identica* all'equazione di *termo-diffusione* (vedi Carslaw and Jaeger (1959), Conduction of heat in solids, Oxford Univ. Press).
- iv) Si tratta di un'equazione alle derivate parziali di tipo parabolico. Ad essa è associata 1 sola famiglia di linee caratteristiche.

Condizioni iniziali e al contorno

Alle (2.5,6) vanno associate:

- condizione iniziale che assegna $C(\boldsymbol{x})|_{t=0}$
- condizioni al contorno se la regione \mathcal{V} non è infinitamente estesa.

2.4 Soluzione fondamentale e sue proprietà

- Esaminiamo il caso di processo di *diffusione unidimensionale* a D costante. La (2.6) diventa

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (2.7)$$

- La *soluzione fondamentale* della (2.7) corrisponde all'immissione di una massa M di soluto a $t = 0$ in $x = 0$.

La (2.7) ammette 'soluzioni similari' ottenute assumendo

$$C = f(t, \eta)$$

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}$$

Sostituendo:

$$f_{,t} - \frac{\eta}{2t} f_{,\eta} = \frac{1}{4t} f_{,\eta\eta}$$

donde

$$f = \frac{P}{\sqrt{t}} g(\eta)$$

con

$$g_{,\eta\eta} + 2\eta g_{,\eta} + 2g = 0$$

Integrando

$$g_{,\eta} + 2\eta g = 0$$

essendo $g_{,\eta}|_{\eta=0} = 0$ per simmetria.

Integrando ancora e imponendo la condizione

$$\int_{-\infty}^{\infty} C dx = M \quad (2.8)$$

si ottiene la soluzione fondamentale

$$C = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (2.9)$$

Figura 2.3: La riduzione di una Gaussiana ad un Dirac per $t \rightarrow 0$.

La (2.9) rappresenta una *distribuzione gaussiana* che costituisce la soluzione dell'equazione di diffusione corrispondente ad una distribuzione iniziale del tipo

$$C(x, 0) = M\delta(x) \quad (2.10)$$

con $\delta(x)$ funzione di Dirac. Quest'ultima va pensata come un modo di rappresentare l'unità di massa addensata in un intervallo infinitesimo con concentrazione infinita.

La figura 2.3 mostra appunto la riduzione della distribuzione Gaussiana a un picco infinito per $t \rightarrow 0$ ($M = \ell$ e $D = 1/4$ nel caso in figura).

- Proprietà

* Momento di ordine 0 = massa di soluto

$$M_o = \int_{-\infty}^{\infty} C dx = M \quad (2.11)$$

* *Media*: μ

$$\mu = \frac{M_1}{M_o} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} C x dx}{\int_{-\infty}^{\infty} C dx} = 0 \quad (2.12)$$

N.B.: μ rappresenta la posizione del baricentro della distribuzione, μ risulta indipendente dal tempo.

* *Varianza*: σ

$$\sigma^2 = \frac{1}{M_o} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 C dx = \frac{M_2}{M_o} - \mu^2 = 2Dt \quad (2.13)$$

N.B.: σ fornisce una misura dell'ampiezza dell'intervallo spaziale su cui si concentra la distribuzione, σ cresce linearmente col tempo.

* *Momenti di ordine superiore*

Momenti dispari tutti nulli.

Momenti pari esprimibili in funzione di σ .

* La varianza soddisfa alla

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = 2D \quad (2.14)$$

N.B.: Ciò non è solo vero quando la distribuzione di C è Gaussiana, bensì per qualsiasi distribuzione:

- che soddisfa all'equazione di diffusione $1 - D$

- con $C \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \pm\infty$.

Dim. Moltiplicando la (2.7) per x e integrando

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial C}{\partial t} x dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} C x dx = \int_{-\infty}^{\infty} D x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = D \left[x \frac{\partial C}{\partial x} - C \right]_{-\infty}^{\infty}$$

donde

$$\mu = \text{costante}$$

e, senza perdita di generalità può porsi $\mu = 0$.

Moltiplicando la (2.7) per x^2 e integrando

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial C}{\partial t} x^2 dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} C x^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} D x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 2D \int_{-\infty}^{\infty} C dx$$

donde la (2.14).

Dunque:

La varianza di una distribuzione finita cresce con rapidità $2D$ indipendentemente dalla sua forma

In particolare nota la varianza σ_1^2 all'istante t_1 segue a un istante t_2

$$\sigma_1^2 = \sigma_1^2 + 2D(t_2 - t_1)$$

* Può dimostrarsi inoltre che

Qualsiasi distribuzione iniziale finita tende a decadere verso una gaussiana.

2.5 Alcune soluzioni elementari dell'equazione di diffusione in una dimensione

2.5.1 Il caso di una distribuzione iniziale $C(x, 0)$ assegnata

La soluzione corrispondente al rilascio di una massa M a $t = 0$ localizzata in $x = \xi$ è:

$$C(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp -\frac{(x - \xi)^2}{4Dt}$$

225. Alcune soluzioni elementari dell'equazione di diffusione in una dimensione

corrispondente a

$$C(x, 0) = M\delta(x - \xi)$$

Posto

$$C(x, 0) = f(x) \quad -\infty < x < \infty$$

con f arbitraria, si può scrivere

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(x - \xi)d\xi$$

donde, data la linearità dell'equazione di diffusione segue la soluzione generale

$$C(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4Dt}\right] d\xi \quad (2.15)$$

Caso particolare $f =$ funzione gradino

$$f = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ C_o & (x > 0) \end{cases}$$

Segue

$$C(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{C_o}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4Dt}\right] d\xi$$

o integrando

$$C(x, t) = \frac{C_o}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x/\sqrt{4Dt}} \exp(-u^2) du = \frac{C_o}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 + \int_0^{x/\sqrt{4Dt}} \right]$$

donde

$$C(x, t) = \frac{C_o}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \right] \quad (2.16)$$

con

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\xi^2) d\xi \quad (2.17)$$

La funzione errore è tabulata in tabella 2.1.

La soluzione (2.16) è riportata in figura 2.4.

2.5.2 Il caso in cui la concentrazione è assegnata in un punto in funzione del tempo

• Assumiamo

$$C(x, 0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$C(0, t) = C_o = \text{cost.} \quad (t > 0)$$

Ricerchiamo ancora *soluzione simile* del tipo

$$C = C_o f\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right)$$

Figura 2.4:

Figura 2.5: La propagazione del fronte descritto dalla (2.18).

L'equazione di diffusione diventa:

$$\begin{cases} \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\eta \frac{df}{d\eta} = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad f(\infty) = f(-\infty) = 0$$

La soluzione è simmetrica rispetto all'origine. Per $x > 0$ si trova

$$C = C_o \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] = C_o \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \quad (2.18)$$

La soluzione riportata in figura 2.5 mostra un fronte che avanza con velocità tale che un certo valore del rapporto C/C_o è raggiunto alla distanza x in un tempo proporzionale a $(x^2/4D)$.

• Nel caso più generale in cui C_o sia funzione del tempo la soluzione può ottenersi sovrapponendo infinite soluzioni del tipo (2.18) corrispondenti a incrementi di concentrazione in $x = 0$ pari a $\frac{dC_o}{d\tau} d\tau$; per ciascuno di questi relativo al tempo τ si ha

$$dC = \left(\frac{dC_o}{d\tau} d\tau \right) \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{4D(t-\tau)}} \quad (t > \tau)$$

donde

$$C = \int_{-\infty}^t \frac{dC_o}{d\tau} \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{4D(t-\tau)}} d\tau \quad (2.19)$$

Figura 2.6: La soluzione (2.21) con $\dot{M} = 1$ $D = 1$.

l'integrazione essendo estesa a tutti gli istanti precedenti quello considerato.

È appena il caso di notare che la (2.18) si ritrova ponendo $\frac{dC_0}{d\tau} = \delta(\tau)$ nella (2.19).

2.5.3 Il caso in cui è assegnata la massa immessa in $x = 0$ come funzione del tempo

Sia $M(\tau)$ la massa introdotta in $x = 0$ al tempo τ . In un intervallo infinitesimo $d\tau$ si ha un'immissione pari a $\dot{M}d\tau$. Sovrapponendo soluzioni del tipo (2.9) segue

$$C = \int_{-\infty}^t \frac{\dot{M}(\tau)}{\sqrt{4\pi D(t-\tau)}} \exp\left[-\frac{x^2}{4D(t-\tau)}\right] d\tau \quad (2.20)$$

Caso particolare .1

$$C = 0 \quad t \leq 0 \quad -\infty < x < \infty$$

$$\dot{M} = \text{cost} \quad t > 0 \quad x = 0$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{\dot{M}}{\sqrt{4\pi D}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{x^2}{4D(t-\tau)}\right] d\tau = \\ &= \frac{\dot{M}x}{4D\sqrt{\pi}} \int_0^{4Dt/x^2} u^{-1/2} \exp(-1/u) du \end{aligned} \quad (2.21)$$

Tale soluzione è riportata nella figura 2.6.

2.5.4 Il caso in cui è assegnata la massa $m(x, t)$ immessa in ogni punti in funzione del tempo

La soluzione generale è ottenuta per doppia sovrapposizione. Sia $m d\xi d\tau$ la massa introdotta nell'intervallo $d\xi$ in un tempo $d\tau$ nell'intorno di (ξ, τ) .

Segue

$$C(x, t) = \int_{-\infty}^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m(\xi, \tau)}{\sqrt{4\pi D(t-\tau)}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-\tau)}\right] d\xi \quad (2.22)$$

2.5.5 Influenza di pareti

- PARETE LOCALIZZATA IN $x = -L$

Figura 2.7:

La presenza della parete impone una ulteriore condizione al contorno

$$q|_{x=-L} = -D \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=-L} = 0 \quad (2.23)$$

Tale condizione può essere soddisfatta

- rimuovendo la parete
- introducendo una 'sorgente immagine' in $x = -2L$.

Segue la soluzione

$$C = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \left\{ \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) + \exp\left(-\frac{(x+2L)^2}{4Dt}\right) \right\} \quad (2.24)$$

- PARETI LOCALIZZATE IN $x = L$ e $x = -L$

Figura 2.8:

Il procedimento precedente può essere iterato osservando che ciascuna immagine produce una cascata di immagini ulteriori per la presenza della seconda parete. Segue

$$C = \frac{1}{\sqrt{4\pi DT}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+2nL)^2}{4DT}\right) \quad (2.25)$$

Se la condizione al contorno in $x = \pm L$ è $C = 0$ la soluzione si ottiene introducendo *immagini negative* in $x = \pm 2pL$ ($p = 0, 1, 2, \dots$) ed *immagini positive* in $x = \pm 4pL$ ($p = 1, 2, \dots$).

Segue

$$C = \frac{1}{\sqrt{4\pi DT}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp -\frac{(x + 4nL)^2}{4DT} - \exp -\frac{[x + (4n + 2)L]^2}{4Dt} \right\} \quad (2.26)$$

Il lettore può esercitarsi nella ricerca di soluzioni relative ad altre condizioni al contorno.

ESERCIZI CONSIGLIATI

i) Stimare il tempo necessario affinché uno strato indefinito di latte di spessore 1cm diffonda nello strato di te sovrastante, di spessore 5cm, fino a raggiungere ovunque una concentrazione uniforme a meno di errori dell'1% (assumere la diffusività del latte nel te pari a cm^2/s).

2.6 La soluzione fondamentale in 2 o 3 dimensioni

2-D

• Consideriamo l'immissione di una massa M di soluto nell'origine del sistema di coordinate cartesiane (x, y) cui è riferita la miscela in esame che si assume bidimensionale. Ciò può scriversi

$$C(x, y; 0) = M\delta(x)\delta(y) \quad (2.27)$$

L'eq.ne di diffusione in 2 - D può porsi nella forma

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (2.28)$$

dove $D_x = D_y = D$ se la diffusione è puramente molecolare. Poiché tuttavia processi di diffusione più complessi conducono a diffusività diverse nelle diverse direzioni ammettiamo qui che risulti $D_x \neq D_y$.

La soluzione può ottenersi nella forma

$$C = C_1(x, t)C_2(y, t) \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} C_{,t} &= D_x C_{,xx} - D_y C_{,yy} = \\ &= C_1 C_{2,t} + C_2 C_{1,t} - D_x C_2 C_{1,xx} - D_y C_1 C_{2,yy} \\ &= C_2 (C_{1,t} - D_x C_{1,xx}) + C_1 (C_{2,t} - D_y C_{2,yy}) \end{aligned}$$

Dunque la (2.28) è soddisfatta se sono separatamente soddisfatte le condizioni

$$\begin{aligned} C_{1,t} &= D_x C_{1,xx} \\ C_{2,t} &= D_y C_{2,yy} \end{aligned}$$

Imponendo la condizione

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy C = M \quad (2.30)$$

si ottiene allora la soluzione fondamentale in 2-D

$$C = \frac{M}{4\pi T \sqrt{D_x D_y}} \exp - \left(\frac{x^2}{4D_x t} + \frac{y^2}{4D_y t} \right) \quad (2.31)$$

Si noti che in 2-D $[C] = ML^{-2}$.

La (2.30) evidenzia che le linee isoconcentrazione a t assegnato sono ellissi di semiassi $2\sqrt{D_x t}$ e $2\sqrt{D_y t}$ nelle direzioni x ed y rispettivamente.

3-D

Il lettore può facilmente dimostrare che in 3 dimensioni l'immissione di una massa M di soluto nell'origine conduce alla seguente distribuzione di concentrazione

$$C = \frac{M}{(4\pi T) \sqrt{D_x D_y D_z}} \exp - \left(\frac{x^2}{4D_x t} + \frac{y^2}{4D_y t} + \frac{z^2}{4D_z t} \right) \quad (2.32)$$

Le (2.30) e (2.31) possono essere poste alla base della costruzione di soluzioni più complesse corrispondenti a condizioni iniziali ed al contorno diverse, in presenza o meno di pareti, in modo analogo a quanto visto nel caso 1-D.

2.7 Diffusione e trasporto laminare

- Trattazione precedente fondata sull'ipotesi che la miscela risulti *macroscopicamente in quiete*.
- Estendiamo al caso in cui si abbia un moto *di trasporto* del fluido con velocità \mathbf{v} e *deflusso laminare*.
- Il bilancio di massa di soluto eseguito su volume di controllo V conduce in questo caso alla relazione

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V C dV + \int_S C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (2.33)$$

I tre termini a primo membro della (2.32) rappresentano rispettivamente:

- Variazione massa soluto in volume di controllo.
- Flusso di massa di soluto attraverso superficie di controllo *per trasporto laminare*.
- Flusso di massa di soluto attraverso superficie di controllo *per diffusione molecolare*.

Utilizzando la legge di Fick (2.1) si perviene a forma modificata dell'equazione di diffusione.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C \mathbf{v}) = D \nabla^2 C \quad (2.34a)$$

Ricordando l'equazione di continuità per fluidi incomprimibili segue una forma più semplice della (2.33)

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla C = D \nabla^2 C \quad (2.34b)$$

Figura 2.9:

Capitolo 3

DIFFUSIONE TURBOLENTA

Il processo di diffusione molecolare analizzato nel capitolo 1 è significativo nei moti laminari. La quasi totalità dei processi rilevanti per l'idrodinamica ambientale riguarda tuttavia *moti turbolenti*. Le caratteristiche del fenomeno di diffusione turbolenta risultano significativamente diverse da quelle che descrivono la diffusione laminare. Vedremo tuttavia che sotto opportune condizioni il caso turbolento può essere ricondotto a quello laminare con una opportuna ridefinizione dei coefficienti di diffusività.

Nel seguito assumeremo noti i fondamenti relativi all'idrodinamica dei moti turbolenti.

3.1 Introduzione

Esaminiamo il processo di diffusione di una massa M di un tracciante passivo immessa in un punto \boldsymbol{x} del campo di moto e analizziamo l'evoluzione della nuvola di tracciante nell'ipotesi che il moto della miscela sia turbolento e le caratteristiche della turbolenza siano *omogenee e stazionarie*.

Supponiamo inoltre, per semplicità, che il processo sia bidimensionale e riferiamoci a un osservatore in moto col valor medio (costante nello spazio e nel tempo) della velocità.

In ciascuna esecuzione di un esperimento di questo tipo la nuvola di tracciante va estendendosi nel tempo per effetto dei moti di grande e piccola scala associati alla turbolenza. Differenti esecuzioni conducono tuttavia a risultati molto diversi:

- i moti turbolenti di piccola scala inducono la distorsione della nuvola e rapide variazioni spaziali di concentrazione in modo diverso nelle diverse realizzazioni sicché diversa è la *forma* della nuvola;
- i moti turbolenti di grande scala, specie quelli di scala maggiore della nuvola, trasportano quest'ultima in modo tale che il *moto del baricentro* della nuvola differisce nei singoli casi.

Supponiamo dunque di immettere un gran numero di nuvole di tracciante e seguiamone l'evoluzione per un tempo molto grande. Rispetto al riferimento

Figura 3.1: a, b) Evoluzione di singole nuvole di tracciante in diverse realizzazioni dell'esperimento; c) evoluzione della nuvola media; d) evoluzione della media delle singole nuvole.

mobile prescelto la *posizione media del baricentro* delle nuvole coincide ovviamente con l'origine; tuttavia la *posizione del baricentro della singola nuvola* non coincide in generale e può divergere dalla posizione media come conseguenza dei moti di grande scala.

Naturalmente per $t \rightarrow \infty$ la nuvola è cresciuta tanto da non risentire più degli effetti delle componenti di grande scala della turbolenza sicché il baricentro di ciascuna nuvola torna *asintoticamente a coincidere con l'origine*.

Ma cosa succede per tempi non *sufficientemente* grandi? Se lo stato delle conoscenze sulla turbolenza fosse sufficiente a consentire di seguire ciascuna particella di ciascuna nuvola nel corso del movimento non sarebbe difficile dare una risposta al quesito. Sfortunatamente siamo ben lontani dalla possibilità di conseguire tale obiettivo.

Un risultato perseguibile è quello di una *stima delle dimensioni medie di ciascuna nuvola*. Si noti che tali dimensioni differiscono da quelle della *nuvola media*. Infatti la *nuvola media* si ottiene eseguendo una *media d'insieme* in ciascun punto \mathbf{x} , all'istante t , su tutte le realizzazioni del processo. Le *dimensioni medie* di una nuvola si ottengono effettuando la media d'insieme dopo aver sovrapposto i *baricentri* delle diverse nuvole all'istante considerato. La differenza fra i due casi è legata al fatto che la *nuvola media*, includendo la distribuzione dei baricentri delle singole nuvole, risulta più grande della *media delle singole nuvole* (figura 2.1).

Al fine di pervenire alla determinazione di tali stime è necessario introdurre alcune nozioni probabilistiche di cui si fa uso nella trattazione della turbolenza.

Figura 3.2: Notazioni.

3.2 Strumenti probabilistici

3.2.1 Medie d'insieme e medie temporali

La traiettoria di una singola particella di fluido è descritta dalla trasformazione

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{X}, t_o) \quad (3.1)$$

con $x_i (i = 1, 2, 3)$ coordinate della posizione P della particella a un istante t successivo all'istante t_o in cui essa occupava la posizione \mathbf{X} (figura 2.2).

La funzione (2.2.1) può considerarsi come una funzione aleatoria a \mathbf{X} , t_o e t fissati (la posizione \mathbf{x} di particelle rilasciate in \mathbf{X} è diversa in esecuzioni diverse dell'esperimento) o come funzione aleatoria di t a \mathbf{X} e t_o fissati per ogni singolo esperimento (la posizione della stessa particella al tempo $t + \tau$ può considerarsi debolmente correlata con la sua posizione al tempo t) (figura 2.3).

Se si assume il primo punto di vista la statistica del moto delle particelle è definita opportunamente attraverso *medie d'insieme*: si media il valore di \mathbf{x} al tempo t relativo a particelle rilasciate in \mathbf{X} all'istante t_o nelle diverse realizzazioni del processo.

Se si assume il secondo punto di vista la media opportuna si ottiene rilevando in un singolo esperimento gli spostamenti effettuati da una singola particella in intervalli di tempo pari a $(t - t_o)$ e mediando i valori corrispondenti. Si ottengono così valori medi che possono in generale *differire* dalla media d'insieme corrispondente allo stesso valore di $(t - t_o)$.

Com'è noto se *il processo stocastico* definito dalla (2.2.1) è *ergodico* i due tipi di *media coincidono*.

Lo studio delle proprietà statistiche della (2.2.1) è *centrale* allo studio della diffusione turbolenta, che è controllata da effetti convettivi, mentre il ruolo della diffusione molecolare si limita a una attenuazione o soppressione delle fluttuazioni di piccola scala.

3.2.2 Caratteristiche del processo stocastico

Consideriamo allora una particella di tracciante localizzata in \mathbf{X} all'istante t_o e sia $p(x_i|\mathbf{X}, t, t_o)dx_i$ la probabilità che tale particella si trovi all'istante t in

Figura 3.3: a) Particelle rilasciate da \mathbf{X} in tre diversi esperimenti e osservate al tempo t successivo al rilascio ($t_o = 0$); b) Particella rilasciata da \mathbf{X} e osservata per un tempo pari a $3t$ rilevandone gli incrementi $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t) - \mathbf{X}$; $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(2t) - \mathbf{x}(t)$; $\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}(3t) - \mathbf{x}(2t)$.

una posizione caratterizzata da coordinata x_i compresa fra x_i e $x_i + dx_i$. È allora possibile definire, come accade per tutti i processi stocastici, i momenti statistici di vario ordine della variabile stocastica x_i . In particolare

- la media d'insieme $\langle x_i \rangle$

$$\langle x_i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_i p(x_i | \mathbf{X}, t, t_o) dx_i \quad (3.2)$$

- il momento di ordine k

$$\langle x_i^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_i^k p(x_i | \mathbf{X}, t, t_o) dx_i \quad (3.3)$$

Il processo stocastico non è tuttavia esaurientemente descritto dalla conoscenza della distribuzione $p(x_i | \mathbf{X}, t, t_o)$. È in generale necessario precisare la probabilità che x_i assuma valore compreso fra x_i^1 e $x_i^1 + dx_i^1$ all'istante t_1 , fra x_i^2 e $x_i^2 + dx_i^2$ all'istante t_2 , etc. per n istanti diversi con n arbitrario.

In particolare, nota $p(x_i^1, x_i^2 | \mathbf{X}, t_1, t_2, t_o)$, si definisce *correlazione* del second'ordine B_{ii} il valore atteso del prodotto x_i^1, x_i^2 , dunque

$$\langle x_i^1 x_i^2 \rangle = B_{ii}(\mathbf{X}, t_1, t_2, t_o) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i^1 x_i^2 p(x_i^1, x_i^2 | \mathbf{X}, t_1, t_2, t_o) dx_i^1 dx_i^2 \quad (3.4)$$

Analogamente si definisce la *correlazione* del second'ordine B_{ij} fra componenti diverse dello spostamento nella forma

$$\langle x_i x_j \rangle = B_{ij}(\mathbf{X}, t, t_o) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j p(x_i, x_j | \mathbf{X}, t, t_o) dx_i dx_j \quad (3.5)$$

Possiamo ora ridefinire nel contesto presente il carattere *stazionario e omogeneo* del processo stocastico $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t, t_o)$. Quest'ultimo dicesi *stazionario* se valori medi e correlazioni di ordine n , con n arbitrario, risultano indipendenti da una variazione dell'origine dei tempi. Analogamente il processo si dice *omogeneo* se le stesse quantità risultano indipendenti dalla posizione iniziale \mathbf{X} .

3.2.3 Concentrazione media

In modo analogo si definiscono le proprietà statistiche associate alla distribuzione di concentrazione.

Sia $p(c|\mathbf{x}, t)dc$ la probabilità che il tracciante abbia concentrazione compresa fra c e $c + dc$ nel punto \mathbf{x} , all'istante t .

Definiamo allora la *media d'insieme* C associata alla distribuzione p in modo analogo:

$$C = \langle c(\mathbf{x}, t) \rangle = \int_0^\infty cp(c|\mathbf{x}, t)dc \quad (3.6)$$

In altre parole C si ottiene mediando i valori di c osservati nel punto \mathbf{x} all'istante t in un gran numero di realizzazioni dell'esperimento in cui identiche nuvole di tracciante sono rilasciate dallo stesso punto in condizioni statisticamente simili.

In generale C risulta funzione di \mathbf{x} e t oltreché dell'istante di rilascio t_o e della posizione di rilascio \mathbf{X} . In una turbolenza stazionaria e omogenea cessa la dipendenza da t_o , che può arbitrariamente essere assunto nullo, e da \mathbf{X} , che può farsi coincidere con l'origine.

3.2.4 Nuvola media e media delle nuvole

Definiamo ora le proprietà statistiche della nuvola di tracciante relative alla *singola realizzazione*.

Anzitutto il *baricentro* della nuvola, relativo alla singola realizzazione, si ottiene nella forma

$$\bar{x}_i = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i c(x_1, x_2, x_3; t) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.7)$$

con M massa della nuvola definita come segue

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x_1, x_2, x_3; t) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.8)$$

Quindi la *varianza* della nuvola, cioè il valor quadratico medio degli scarti della posizione delle singole particelle rispetto al baricentro della nuvola, assume la forma:

$$\sigma_{x_i}^2 = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \bar{x}_i)^2 c(x_1, x_2, x_3; t) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.9)$$

Consideriamo infine l'*insieme di nuvole*.

Il *baricentro della nuvola media* ha coordinata generica $\langle \bar{x}_i \rangle$ definita come segue:

$$\langle \bar{x}_i \rangle = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i C(x_1, x_2, x_3; t) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.10)$$

e la sua *varianza*, intesa come varianza della concentrazione media rispetto al baricentro della nuvola media, può porsi nella forma

$$\Sigma_{x_i}^2 = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \langle \bar{x}_i \rangle)^2 C(x_1, x_2, x_3; t) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.11)$$

La relazione fra $\Sigma_{x_i}^2$ e $\sigma_{x_i}^2$ si ricava immediatamente sviluppando il quadrato nell'integrale (2.2.9) e ricordando la (2.2.7). Si ottiene quindi, mediando la (2.2.9),

$$\Sigma_{x_i}^2 = \langle \sigma_{x_i}^2 \rangle + \langle (\bar{x}_i - \langle \bar{x}_i \rangle)^2 \rangle \quad (3.12)$$

Dunque:

La varianza della nuvola media rispetto al valore atteso del suo baricentro è uguale alla somma della media di insieme della varianza di ciascuna nuvola più lo scarto quadratico medio dei baricentri di ciascuna nuvola rispetto al baricentro della nuvola media.

I risultati precedenti possono utilizzarsi per determinare una relazione fra le dimensioni della singola nuvola e le dimensioni della nuvola media. Sia $\ell(t)$ una misura delle dimensioni della singola nuvola della forma

$$\ell(t) = \left[\frac{1}{3} (\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \sigma_{x_3}^2) \right]^{1/2} \quad (3.13)$$

ed $L(t)$ una misura delle dimensioni della nuvola media con

$$L(t) = \left[\frac{1}{3} (\Sigma_{x_1}^2 + \Sigma_{x_2}^2 + \Sigma_{x_3}^2) \right]^{1/2} \quad (3.14)$$

Utilizzando la (2.2.12) segue

$$L^2(t) = \langle \ell^2(t) \rangle + \frac{1}{3} [\langle (\bar{x}_1 - \langle \bar{x}_1 \rangle)^2 \rangle + \langle (\bar{x}_2 - \langle \bar{x}_2 \rangle)^2 \rangle + \langle (\bar{x}_3 - \langle \bar{x}_3 \rangle)^2 \rangle] \quad (3.15)$$

In altre parole:

le dimensioni della nuvola media eccedono la media delle dimensioni di ciascuna nuvola (figura 2.4).

Nei paragrafi che seguono determineremo relazioni che consentono di calcolare la rapidità di variazione sia di $\langle \ell^2 \rangle$ che di L^2 .

3.3 Teoria di Taylor della diffusione in turbolenza omogenea e stazionaria

3.3.1 Premessa

La teoria di Taylor (1921) costituisce una pietra miliare nello sviluppo della ricerca sulla diffusione turbolenta, un contributo ancora insuperato.

Figura 3.4: La nuvola di tracciante in diverse realizzazioni e la nuvola media.

Essa è fondata sull'ipotesi fondamentale di turbolenza *omogenea e stazionaria*. Tale ipotesi potrebbe apparire molto restrittiva: come sappiamo l'omogeneità è associata a campi di moto non limitati, mentre la stazionarietà richiede l'esistenza di una sorgente di energia per la turbolenza che non può che essere associata a un trasferimento di energia da parte del moto medio, il che non risulta in generale compatibile con l'ipotesi di omogeneità.

Vedremo tuttavia che lo sviluppo della teoria richiede una condizione meno restrittiva che consiste nell'omogeneità in una sola direzione, come quella che si realizza nel moto mediamente uniforme e stazionario in condotte, il che rende anche compatibile l'ipotesi di stazionarietà. Ciò è stato evidenziato da Batchelor e Townsend (1956) e Batchelor (1957).

3.3.2 Dimensioni della nuvola media e covarianza delle fluttuazioni dello spostamento delle particelle

Consideriamo una serie di esperimenti in cui all'istante t_o , nella posizione \mathbf{X} , una massa M di tracciante viene immessa in un moto turbolento per il momento non necessariamente omogeneo e stazionario.

Le (2.2.11) e (2.2.14) consentono allora di valutare la scala geometrica $L(t)$ che misura le dimensioni della nuvola media all'istante t .

Figura 3.5: Definizione del vettore spostamento \mathbf{r} .

Introduciamo il vettore spostamento \mathbf{r} definito come segue (figura 2.5)

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (3.16)$$

Trascurando gli effetti della *diffusione molecolare* si può ritenere che la massa di tracciante immessa in ciascuna particella di fluido che all'istante t_o si trovava nell'origine resti associata a quella particella in ciascun istante successivo, sicché la concentrazione media $C(\mathbf{x}, t)$ misurata in una posizione \mathbf{x} all'istante t risulta semplicemente proporzionale alla probabilità che la particella che si trovava in \mathbf{X} all'istante t_o si trovi in \mathbf{x} all'istante t , abbia cioè subito nell'intervallo temporale $(t - t_o)$ lo spostamento \mathbf{r} . Dunque

$$C(\mathbf{x}, t) = Mp(\mathbf{r}|t, \mathbf{X}, t_o) \quad (3.17)$$

donde

$$\langle r_i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r_i p(\mathbf{r}|t, \mathbf{X}, t_o) d\mathbf{r} \quad (3.18)$$

Ricordando le (2.2.11) e (2.2.14), e osservando che per la definizione (2.2.10) si ha

$$\langle r_i \rangle = \langle \bar{x}_i \rangle - X_i \quad (3.19)$$

cioè

$$r_i - \langle r_i \rangle = x_i - \langle \bar{x}_i \rangle \quad (3.20)$$

segue

$$L^2(t) = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (r_1'^2 + r_2'^2 + r_3'^2) p(\mathbf{r}|t, \mathbf{X}, t_o) d\mathbf{r} \quad (3.21)$$

avendo definito il vettore fluttuazione di spostamento \mathbf{r}'

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \langle \mathbf{r} \rangle \quad (3.22)$$

Ma, indicando con $p(r_1|t, \mathbf{X}, t_o)dr_1$ la probabilità che la particella che si trovava in \mathbf{X} all'istante t_o subisca nell'intervallo $(t - t_o)$ uno spostamento nella direzione x_1 compreso fra r_1 e $r_1 + dr_1$, segue

$$p(r_1|\mathbf{X}, t, t_o) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{r}|\mathbf{X}, t, t_o) dr_2 dr_3 \quad (3.23)$$

donde la (2.3.6) diventa

$$\begin{aligned} L^2(t) &= \frac{1}{3} \left[\int_{-\infty}^{\infty} r_1'^2 p(r_1|t, \mathbf{X}, t_o) dr_1 + \int_{-\infty}^{\infty} r_2'^2 p(r_2|t, \mathbf{X}, t_o) dr_2 \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} r_3'^2 p(r_3|t, \mathbf{X}, t_o) dr_3 \right] = \frac{1}{3} \langle r_1'^2 + r_2'^2 + r_3'^2 \rangle \end{aligned} \quad (3.24)$$

Dunque

la determinazione delle dimensioni caratteristiche della nuvola media si riduce al problema della valutazione della media d'insieme del quadrato della fluttuazione dello spostamento delle particelle.

La (2.3.9) può essere generalizzata al caso in cui il tracciante venga rilasciato nella forma di una nuvola iniziale che occupa una certa regione V_o dello spazio con distribuzione iniziale della concentrazione media $C(\mathbf{X}, t_o)$. Per semplice sovrapposizione si ha infatti dalla (2.3.2)

$$C(\mathbf{x}, t) = \int_{V_o} C(\mathbf{X}, t_o) p(\mathbf{r}|t, \mathbf{X}, t_o) d\mathbf{X} \quad (3.25)$$

Sostituendo la (2.3.10) nella (2.2.11), invertendo l'ordine di integrazione e cambiando opportunamente l'origine del dominio d'integrazione segue

$$L^2(t) = \frac{1}{3M} \left\{ \int_{V_o} C(\mathbf{X}, t_o) d\mathbf{X} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (r_i' + X_i)^2 p(\mathbf{r}|t, \mathbf{X}, t_o) d\mathbf{x} \right\} \quad (3.26)$$

donde

$$L^2(t) = L^2(t_o) + \frac{1}{3} \langle r_i'^2 \rangle \quad (3.27)$$

3.3.3 Stima della covarianza delle fluttuazioni di spostamento delle particelle per tempi piccoli (Taylor, 1921)

Veniamo al problema della valutazione delle caratteristiche dello spostamento di una singola particella.

Sia $\mathbf{u}(\tau; \mathbf{X}, t_o)$ la velocità all'istante $t = t_o + \tau$ della particella che all'istante t_o si trovava in \mathbf{X} . Segue

$$\mathbf{r}(t) = \int_0^\tau \mathbf{u}(s; \mathbf{X}, t_o) ds \quad (3.28)$$

Una descrizione completa della variabile $\mathbf{r}(t)$ richiede che venga assegnata la funzione densità di probabilità tridimensionale $p(\mathbf{r}|t, \mathbf{X}, t_o)$.

Tuttavia per tempi *sufficientemente piccoli*, nel senso che verrà precisato nel seguito, si può porre

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(0; \mathbf{X}, t_o)\tau = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t_o)\tau \quad (3.29)$$

dove si è indicato con \mathbf{v} il vettore velocità del fluido in \mathbf{X} all'istante t_o e si è assunto che questo coincida con il vettore velocità del tracciante posto approssimativamente costante per *tempi piccoli*. In tal caso la funzione densità di probabilità $p(\mathbf{r}|t, \mathbf{X}, t_o)$ può essere espressa in funzione della densità di probabilità

$p(\mathbf{v}|\mathbf{X}, t_o)$. Quest'ultima può ottenersi misurando \mathbf{v} in \mathbf{X} per un tempo sufficientemente lungo. Le misure di Simmons e Salter (1938) e di Townsend (1947) per la turbolenza di griglia in un tunnel aerodinamico rivelano che $p(\mathbf{v}|\mathbf{X}, t_o)$ risulta molto prossima a una Gaussiana¹.

Torniamo alle caratteristiche del vettore aleatorio $\mathbf{r}(t)$. Nel caso generale di turbolenza *non necessariamente omogenea e stazionaria*

$$\langle \mathbf{r}(t) \rangle = \int_0^\tau \langle \mathbf{u}(s; \mathbf{X}, t_o) \rangle ds \quad (3.30)$$

È opportuno analizzare le caratteristiche delle fluttuazioni. Definiamo

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \langle \mathbf{r}(t) \rangle \quad (3.31)$$

$$\mathbf{u}'(\tau; \mathbf{X}, t_o) = \mathbf{u}(\tau; \mathbf{X}, t_o) - \langle \mathbf{u}(\tau; \mathbf{X}, t_o) \rangle \quad (3.32)$$

dove

$$\mathbf{r}'(t) = \int_0^\tau \mathbf{u}'(s; \mathbf{X}, t_o) ds \quad (3.33)$$

Definiamo *covarianza delle fluttuazioni dello spostamento* il tensore

$$S_{ij}(t) = \langle r'_i(t) r'_j(t) \rangle = \int_0^\tau \int_0^\tau \langle u'_i(t_1) u'_j(t_2) \rangle dt_1 dt_2 \quad (3.34)$$

la media essendo cioè effettuata sugli spostamenti, allo stesso istante, in diverse realizzazioni del processo. Per *valori piccoli* di τ si ha $u'_i(\tau; \mathbf{X}, t_o) = v'_i(\mathbf{X}, t_o)$ donde

$$S_{ij} = \langle v'_i v'_j \rangle \tau^2 = R_{ij} \tau^2 \quad (3.35)$$

Il tensore $R_{ij} = \langle v'_i(\mathbf{X}, t_o) v'_j(\mathbf{X}, t_o) \rangle$ risulta in generale funzione della posizione e del tempo. Nel caso di turbolenza stazionaria e omogenea R_{ij} risulta *costante*.

3.3.4 Struttura di $S_{ij}(t)$ per il caso di turbolenza omogenea e stazionaria (Taylor, 1921; Batchelor, 1949)

Per valori *non piccoli* di t la struttura della funzione $S_{ij}(t)$ si ottiene solo per moti particolari.

Consideriamo allora il caso di *turbolenza omogenea e stazionaria* ed esaminiamo la struttura che S_{ij} assume quando tutte le variabili sono campi aleatori *omogenei* nello spazio tridimensionale e funzioni aleatorie *stazionarie* di t . In tal caso $\langle \mathbf{v} \rangle$ risulta costante nello spazio e nel tempo donde

$$\langle \mathbf{u}(\tau; \mathbf{X}, t_o) \rangle = \langle \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) \rangle = \text{costante} \quad (3.36)$$

¹Per *tempi grandi* la (2.3.14) non è più valida, sicché $p(\mathbf{r}|t, \mathbf{X}, t_o)$ non può essere espressa in funzione di proprietà statistiche del campo di velocità Euleriano. Tuttavia l'integrale (2.3.13) può considerarsi somma di integrali eseguiti su intervalli di tempo T che possono considerarsi variabili stocastiche debolmente dipendenti fra loro. Il *teorema del limite centrale* per variabili casuali debolmente dipendenti suggerisce poi che la distribuzione di probabilità della somma di un gran numero di tali variabili risulta, sotto condizioni ampie, molto prossima a una distribuzione normale. Rilievi sperimentali di $p(\mathbf{r}|t, \mathbf{X}, t_o)$ in tunnel aerodinamico (Collis, 1948; Townsend, 1951; Uberoi e Corrsin, 1953) hanno mostrato che per la turbolenza di griglia p è molto prossima a una Gaussiana per ogni t .

Figura 3.6: La funzione di correlazione Lagrangiana.

e, per la (2.3.15),:

$$\langle \mathbf{r}(t) \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle \tau \quad (3.37)$$

Inoltre le fluttuazioni di velocità delle particelle di tracciante $\mathbf{u}'(\tau; \mathbf{X}, t_o)$ presentano le stesse proprietà statistiche in ogni posizione dello spazio e sono funzioni aleatorie stazionarie del tempo.

Consideriamo la generica *correlazione Lagrangiana delle fluttuazioni di velocità*

$$R_{ij}^L = \langle u'_i(t_1; \mathbf{X}, t_o) u'_j(t_2; \mathbf{X}, t_o) \rangle \quad (3.38)$$

ottenuta mediando su diverse realizzazioni i valori del prodotto fra la i-esima componente della fluttuazione di velocità all'istante $t_o + t_1$ e la j-esima componente all'istante $t_o + t_2$.

Si osservi il carattere ergodico del processo stocastico consente in generale di sostituire tale correlazione con la *funzione di correlazione Lagrangiana*, ottenuta mediando nel tempo su una singola realizzazione (vedi figura 2.6), che si scrive

$$R_{ij}^L = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u'_i(t_1 + s; \mathbf{X}, t_o) u'_j(t_2 + s; \mathbf{X}, t_o) ds \quad (3.39)$$

Il carattere stazionario e omogeneo del moto turbolento implica che R_{ij}^L è indipendente dai valori di t_1 e t_2 , dipendendo soltanto dalla distanza temporale $(t_2 - t_1)$.

Definita la *funzione di correlazione Lagrangiana normalizzata* (o coefficiente di correlazione) nella forma

$$\hat{R}_{ij}^L = \frac{R_{ij}^L}{[\langle v_i'^2(\mathbf{X}, t_o) \rangle \langle v_j'^2(\mathbf{X}, t_o) \rangle]^{1/2}} \quad (3.40)$$

e ricordando la (2.3.19) segue quindi:

$$S_{ij}(t) = [\langle v_i'^2 \rangle \langle v_j'^2 \rangle]^{1/2} \int_0^\tau \int_0^\tau \hat{R}_{ij}^L dt_1 dt_2 \quad (3.41)$$

con $\hat{R}_{ij}^L = \hat{R}_{ij}^L(t_2 - t_1)$.

Si noti che il carattere Lagrangiano della correlazione è legato al fatto che le velocità u_i e u_j si riferiscono alla *stessa particella in istanti diversi* e non a particelle diverse allo *stesso istante* (correlazione *Euleriana*).

L'analisi di Taylor (1921) prosegue con qualche operazione di manipolazione dell'integrale (2.3.26). Si opera la trasformazione di variabili

$$s = t_2 - t_1 \quad \sigma = \frac{t_1 + t_2}{2} \quad (3.42)$$

sicché la (2.3.26) diventa²

$$S_{ij}(t) = \left[\langle v_i'^2 \rangle \langle v_j'^2 \rangle \right]^{1/2} \int_0^\tau ds \int_{\frac{s}{2}}^{\tau - \frac{s}{2}} \left[\hat{R}_{ij}^L(s) + \hat{R}_{ji}^L(s) \right] d\sigma \quad (3.43)$$

Integrando la (2.3.28) segue infine

$$S_{ij}(t) = \left[\langle v_i'^2 \rangle \langle v_j'^2 \rangle \right]^{1/2} \int_0^\tau (\tau - s) \left[\hat{R}_{ij}^L(s) + \hat{R}_{ji}^L(s) \right] ds \quad (3.44)$$

Tale risultato è di grande importanza in quanto fornisce un'espressione generale per la covarianza delle fluttuazioni di spostamento che determina le dimensioni della nuvola media.

La (2.3.29) fu ottenuta nel caso particolare di una sola componente dello spostamento da G.I. Taylor (1921) e fu estesa al caso $i \neq j$ da Kampé de Fériet (1939) e al caso generale da Batchelor (1949).

3.3.5 Variazione nel tempo delle dimensioni della nuvola media

Esaminiamo alcune informazioni ottenibili attraverso la (2.3.29).

Osserviamo anzitutto che per la (2.3.12) si può scrivere

$$L^2(t) = L^2(t_0) + \sum_{\ell=1}^3 \frac{D_{\ell\ell}}{3} \quad (3.45)$$

²Il dominio d'integrazione nel piano t_1, t_2 , cioè il rettangolo

$$t_1 \in [0, \tau] \quad t_2 \in [0, \tau]$$

si trasforma nel dominio

$$s \in [-\tau, \tau] \quad \sigma \in \left[\frac{|s|}{2}, \tau - \frac{|s|}{2} \right]$$

che costituisce un rombo nel piano (s, σ) . Dunque l'integrale (2.3.26) diventa

$$\int_{-\tau}^{\tau} ds \int_{\frac{|s|}{2}}^{\tau - \frac{|s|}{2}} \hat{R}_{ij}^L(s) d\sigma$$

Si noti poi che si ha

$$\hat{R}_{ij}^L(-s) = \hat{R}_{ji}^L(s)$$

poiché cambiare il segno di s equivale a cambiare t_1 con t_2 , sicché l'integrale può essere esteso, in s , al solo intervallo $[0, \tau]$ sostituendo \hat{R}_{ij}^L con $\hat{R}_{ij}^L(s) + \hat{R}_{ji}^L(s)$ e $|s|$ con s nei limiti di integrazione.

Dunque, per la (2.3.29):

$$L^2(t) = L^2(t_o) + \sum_{\ell=1}^3 \frac{2}{3} \langle v_\ell'^2 \rangle \int_o^\tau (\tau - s) \hat{R}_{\ell\ell}^L(s) ds \quad (3.46)$$

È agevole ricavare dalla (2.3.31) una relazione per $L^2(t)$ per valori grandi di τ . Infatti è ragionevole assumere che la correlazione $\hat{R}_{\ell\ell}^L(s)$ tenda ad annullarsi per $s \rightarrow \infty$ e in modo sufficientemente rapido. In tal caso è possibile definire la seguente scala temporale integrale della correlazione

$$T_\ell = \int_o^\infty \hat{R}_{\ell\ell}^L(s) ds \quad (3.47)$$

Si definisce *scala dei tempi Lagrangiana* T_L la media dei T_ℓ ($\ell = 1, 2, 3$) (o talvolta il massimo dei T_ℓ). Assumiamo inoltre che l'integrale

$$\int_o^\infty s \hat{R}_{\ell\ell}^L(s) ds = S_\ell \quad (3.48)$$

risulti finito. In tal caso per τ sufficientemente grandi la (2.3.31) porge

$$L^2(t) = L^2(t_o) + \sum_{\ell=1}^3 \frac{2}{3} \langle v_\ell'^2 \rangle (T_\ell \tau - S_\ell) \quad (3.49)$$

Per $\tau \rightarrow \infty$ il contributo S_ℓ risulta progressivamente trascurabile rispetto a $T_\ell \tau$ sicché segue

$$L^2(t) \rightarrow \left[\sum_{\ell=1}^3 \frac{2}{3} \langle v_\ell'^2 \rangle T_\ell \right] t \quad (3.50)$$

Il risultato (2.3.35) è fondamentale poiché sta alla base della possibilità di descrivere il processo di diffusione turbolenta attraverso un'equazione di diffusione del tutto analoga a quella valida per la diffusione molecolare. Ricordiamo infatti che una relazione del tipo (2.3.35) vale per qualsiasi soluzione dell'equazione di diffusione (vedi la (1.4.14)). Si noti che la (2.3.35) fornisce una stima del coefficiente di diffusione pari al prodotto $\langle v_\ell'^2 \rangle T_\ell$ fra il quadrato della scala dell'intensità del moto turbolento e la scala temporale integrale.

Dunque, per tempi grandi L^2 cresce linearmente col tempo, mentre per tempi piccoli le (2.3.12) e (2.3.20) forniscono

$$L^2(t) \rightarrow L^2(t_o) + \left[\sum_{\ell=1}^3 \frac{1}{3} \langle v_\ell'^2 \rangle \right] \tau^2 \quad (3.51)$$

cioè L^2 cresce quadraticamente con $(t - t_o)$.

Per valori intermedi di τ e per funzioni $R_{\ell\ell}^L(s)$ che permangono positive si trova che la grandezza $S_{\ell\ell}(t)$ dipende molto debolmente dalla forma della funzione di correlazione. La (2.3.35) risulta valida per $\tau \geq 5T_L$ mentre la (2.3.36) si applica adeguatamente per $\tau \leq T_L$.

Si può interpretare la scala dei tempi Lagrangiana T_L (ovvero la scala integrale nella generica direzione T_ℓ) come scala temporale che misura il tempo che la particella impiega per *perdere memoria* della sua velocità iniziale.

In modo equivalente si può definire una scala spaziale integrale L_L nella forma

$$L_L = \sqrt{\langle v_i'^2 \rangle} T_L \quad (3.52)$$

che misura la distanza che deve percorrere una particella di fluido per perdere memoria della sua velocità iniziale. Si osservi infatti che il confronto fra l'intervallo temporale τ e la scala temporale Lagrangiana T_L implica, attraverso le (2.3.35), il confronto fra la dimensione delle nuvole (L) e la scala spaziale Lagrangiana L_L definita dalla (2.3.37). Ne consegue dunque che la (2.3.35) risulta adeguata quando la dimensione della nuvola eccede la scala spaziale integrale caratteristica del moto turbolento.

3.3.6 Generalizzazione a moti in cui la turbolenza è omogenea in una sola direzione

L'analisi precedente ha una validità molto più generale di quanto non possa apparire dall'ipotesi di omogeneità e stazionarietà della turbolenza. In realtà essa richiede solo l'omogeneità in una direzione. In particolare, seguendo G.I. Taylor (1954), Batchelor ha evidenziato che tali risultati si applicano direttamente al moto mediamente uniforme in un condotto rettilineo di sezione arbitraria (Batchelor e Townsend (1956), Batchelor (1957)). In tal caso la turbolenza è omogenea nella direzione longitudinale x malgrado la distribuzione della velocità longitudinale nella sezione possa risultare fortemente *non omogenea*. Il carattere *stazionario* della turbolenza è poi assicurato dal continuo trasferimento di energia da parte del moto medio, che è possibile proprio per il carattere non uniforme della distribuzione di velocità media nella sezione.

In tali condizioni la velocità della generica particella di tracciante nella direzione longitudinale

$$u_x = \frac{dr_x(\tau; \mathbf{X}, t_o)}{d\tau} \quad (3.53)$$

risulta in generale una funzione *aleatoria non stazionaria* di τ dipendente dal parametro \mathbf{X} che identifica la sua posizione iniziale.

Tuttavia per valori di τ sufficientemente grandi è ragionevole ritenere che la particella abbia visitato ripetutamente tutte le posizioni sul piano della sezione sicché u_x tende ad assumere un carattere stazionario e indipendente da \mathbf{X} . In particolare, per valori grandi di τ , $\langle u_x \rangle$ risulta costante e si dimostra che essa coincide con la velocità media U nella sezione. Dunque:

$$\langle r_x(\tau) \rangle = U\tau \quad (3.54)$$

e inoltre

$$\langle (r_x - \langle r_x(\tau) \rangle)^2 \rangle \sim 2\langle v_x'^2 \rangle T_x \tau \quad (3.55)$$

con T_x scala lagrangiana dei tempi secondo x .

Figura 3.7: Formazione di micro-strutture stratificate in assenza di diffusione molecolare (Corrsin, 1959).

La quantità $\langle v_x'^2 \rangle T_x$ dipende dalle caratteristiche della turbolenza nel moto in esame. Per il moto in un condotto a sezione circolare, ignorando i modesti effetti dell'eventuale substrato laminare, si ha:

$$\langle v_x'^2 \rangle T_x = f(u_*, a) = cu_* a \quad (3.56)$$

avendo applicato il teorema π ed essendo a il raggio del condotto, u_* la velocità di attrito e c una costante da determinare sperimentalmente.

3.4 Diffusività turbolenta ed equazione semiempirica della diffusione turbolenta

3.4.1 Diffusione turbolenta e diffusione molecolare

Il processo di diffusione turbolenta di un tracciante passivo è usualmente analizzato trascurando gli effetti della diffusione molecolare. Ciò risulta sufficientemente giustificato dal punto di vista pratico³: il ruolo della diffusione molecolare è infatti significativo solo nell'attenuare le forti variazioni di concentrazione che si verificherebbero sulla piccola scala se il processo fosse puramente convettivo. La figura 2.7 (Corrsin, 1959⁴) mostra come la pura diffusione turbolenta conduca alla formazione di strutture stratificate fortemente deformate che danno luogo a rapide variazioni di concentrazione fra strati contenenti traccianti e strati contenenti puro solvente. L'interazione di queste strutture sempre più finemente stratificate, cioè il loro miscelamento, è dovuta alla diffusione molecolare.

³Vedi tuttavia la discussione in Monin e Yaglom (1971, §10.2) per un approfondimento della questione.

⁴Corrsin (1959), J. Geophys. Res., 64, 12.

3.4.2 Equazione della diffusione turbolenta

Esaminiamo ora l'equazione della diffusione turbolenta, cioè la forma che assume il principio di conservazione della massa quando il tracciante diffonde in un campo di moto turbolento.

Trascurando la diffusione molecolare, l'equazione di bilancio contiene solo termini di trasporto e assume la forma (vedi la (1.6.3))

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(cv_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (3.57)$$

Mediando la (2.4.1) si trova

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(CV_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j^T}{\partial x_j} = 0 \quad (3.58)$$

dove $V_j = \langle v_j \rangle$ è la velocità locale media e q_j^T è la generica componente del flusso turbolento di tracciante che si scrive

$$q_j^T = \langle (v_j - V_j)(c - C) \rangle \quad (3.59)$$

La prima teoria della diffusione turbolenta risale a Taylor (1915) e a Schmidt (1917) anche se alcune idee fondamentali erano già contenute nei lavori di Bousinesq (1877, 1887). L'ipotesi su cui è fondata tale teoria è la proporzionalità di \mathbf{q}^T al gradiente di concentrazione media ∇C

$$\mathbf{q}^T = -\mathcal{D}^T \nabla C \quad (3.60)$$

con \mathcal{D}^T diffusività turbolenta.

Più correttamente l'ipotesi (2.4.4) va modificata per tener conto del carattere *anisotropo* del processo di diffusione, dunque

$$q_j^T = -\mathcal{D}_{jk}^T \frac{\partial C}{\partial x_k} = -\mathbf{D}^T \cdot \nabla C \quad (3.61)$$

dove \mathbf{D}^T è ora il *tensore di diffusività turbolenta*. Con tale ipotesi l'equazione della diffusione turbolenta (2.4.2) assume una struttura *simile* a quella della diffusione molecolare:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial V_j C}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left(\mathcal{D}_{\ell k}^T \frac{\partial C}{\partial x_k} \right) \quad (3.62)$$

Naturalmente la formulazione (2.4.5) pone il problema di attribuire una struttura alle componenti del tensore \mathbf{D}^T e di esaminare i fondamenti dell'ipotesi (2.4.4) e i suoi limiti di validità.

3.4.3 Il tensore di diffusività turbolenta

Al fine di rispondere a tale quesito è opportuno distinguere fra i due casi di turbolenza omogenea e stazionaria e turbolenza in generale non omogenea e non stazionaria.

Nel caso di *turbolenza omogenea e stazionaria* le componenti di \mathbf{D}^T risultano indipendenti dalla posizione (e possono quindi essere portate fuori dalla derivata nella (2.4.6)). Peraltro sappiamo dall'analisi del §2.3 che la variabile stocastica $\mathbf{r}(t)$ tende al comportamento di una Gaussiana sia per $t \rightarrow 0$ che per $t \rightarrow \infty$ e che è ragionevole ritenere che non si discosti da una Gaussiana per ogni t . Batchelor (1949) ha dimostrato che la funzione densità di probabilità $p(\mathbf{r}|t, \mathbf{X}, t_o)$, Gaussiana con valori medi $(X_j + V_j\tau)$ e matrice di covarianza S_{ij} (vedi la (2.3.19)), soddisfa a un'equazione del tipo (2.4.6) con

$$\mathcal{D}_{ij}^T = \frac{1}{2} \frac{dS_{ij}(t)}{dt} = \frac{1}{2} \int_0^\tau [R_{ij}^L(s) + R_{ji}^L(s)] ds \quad (3.63)$$

e R_{ij}^L tensore definito dalla (2.3.23). Batchelor ha inoltre mostrato che un'equazione analoga è soddisfatta dalla concentrazione media C .

Dunque, in generale, il processo di diffusione turbolenta in un campo di turbolenza omogenea e stazionaria è descritto da un'equazione di diffusione con *diffusività dipendente dal tempo* secondo la (2.4.7). Tuttavia per tempi t grandi rispetto alla scala temporale Lagrangiana T_L la (2.4.7) porge

$$\mathcal{D}_{ij}^T = \frac{1}{2} \left[\langle v_i'^2 \rangle \langle v_j'^2 \rangle \right]^{1/2} T_{ij} \quad (3.64)$$

con

$$T_{ij} = \int_0^\infty \left[\hat{R}_{ij}^L(\tau) + \hat{R}_{ji}^L(\tau) \right] d\tau \quad (3.65)$$

Dunque D_{ij}^T tende asintoticamente a una struttura *indipendente dal tempo*: ciò risulta in totale accordo con la rappresentazione semiempirica della diffusività turbolenta.

Esaminiamo ora il caso, di maggior interesse applicativo, in cui la turbolenza risulta *non omogenea e non stazionaria*. Per questo caso esiste un risultato generale dovuto a Kolmogorov (1931, 1933) fondato sull'ipotesi che la funzione aleatoria $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ sia una funzione Markoviana, cioè che la probabilità condizionata per il valore di \mathbf{x} all'istante t , sotto la condizione che i suoi valori siano noti ad istanti arbitrari $t_n < t_{n-1} < \dots < t_o$ (con $t_o < t$), dipenda solo dall'ultimo di questi valori $\mathbf{x}(t_o)$ ma non da alcuno dei valori precedenti $\mathbf{x}(t_i)$ con $t_i < t_o$. In tal caso la funzione densità di probabilità $p(\mathbf{x}|t, \mathbf{X}, t_o)$ soddisfa a un'equazione di diffusione del tipo (2.4.5)⁵. Un risultato dello stesso tipo era stato ricavato, in modo meno generale ma prima di Kolmogorov, da Einstein, Fokker e Planck.

⁵Più precisamente Kolmogorov dimostra che in condizioni di sufficiente regolarità per la $p(\mathbf{r}|t, \mathbf{X}, t_o)$ esistono le derivate seguenti

$$\langle u(\mathbf{X}, t_o) \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle r(\mathbf{X}, t) \rangle_{t=t_o} \quad 2\mathcal{D}_{ij}^T(\mathbf{X}, t_o) = \frac{\partial}{\partial t} \langle r_i' r_j' \rangle_{t=t_o} \quad (01)$$

Inoltre p soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\ell} [p \langle u_\ell \rangle] = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} [\mathcal{D}_{ij}^T(\mathbf{x}, t) p]$$

L'ipotesi di Markovianità del processo stocastico non può essere valida per sequenze arbitrarie di istanti: le posizioni delle particelle in istanti molto prossimi non possono essere scorrelate. L'ipotesi acquista tuttavia consistenza se la funzione \boldsymbol{x} viene considerata soltanto per una sequenza discreta di istanti $t = t_o + n\tau$ con $\tau \gg T_L$ essendo T_L la scala temporale Lagrangiana⁶. In altre parole la (2.4.6) va considerata come l'analogo differenziale di un'equazione alle differenze con passi temporali $\tau \gg T_L$. La (2.4.6) può cioè essere utilizzata per descrivere il campo di concentrazione media per $t - t_o \gg T_L$.

In genere la (2.4.6) viene utilizzata in una forma più semplice che utilizza come sistema di riferimento il sistema costituito dagli assi principali del tensore \mathcal{D}_{ij}^T (per il semplice caso di un moto medio unidirezionale diretto secondo x , la terna è costituita da x e da due assi ortogonali, y e z , nel piano ortogonale a x). Si ha allora la forma semplificata:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla C = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{D}_{xx}^T \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{D}_{yy}^T \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{D}_{zz}^T \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (3.66)$$

La (2.4.10) è appunto l'equazione della diffusione turbolenta cui si fa in genere riferimento⁷.

Le quantità \mathcal{D}_{xx}^T , \mathcal{D}_{yy}^T e \mathcal{D}_{zz}^T sono denominate *diffusività turbolente*: sulla base della teoria di Taylor esse vengono rappresentate come prodotti del quadrato della scala dell'intensità della turbolenza per la scala temporale Lagrangiana ovvero, in modo equivalente, nella forma di prodotti della scala spaziale Lagrangiana (2.3.37), misura della distanza media percorsa da una particella prima di aver 'dimenticato' la sua velocità iniziale, per la scala dell'intensità della turbolenza. Vedremo nel seguito come ciò consenta la descrizione del processo di diffusione turbolenta in molti casi di pratica rilevanza.

3.5 Diffusione per tempi minori della scala Lagrangiana: la legge 4/3

3.5.1 Rilevanza della questione

Ci proponiamo ora di esaminare il processo di crescita di una nuvola di traccianti per tempi minori della scala Lagrangiana T_L definita nell'§2.3 come tempo necessario perché la generica particella di tracciante 'perda memoria' della sua velocità iniziale.

Tale questione è di scarsa rilevanza in genere per lo studio dell'inquinamento dei corsi d'acqua ed estuari dove le dimensioni della nuvola eccedono in genere quelle dei macrovortici. Essa è invece spesso centrale allo studio dell'inquinamento delle regioni costiere e dei laghi in cui la macro turbolenza ha spesso scala spaziale molto maggiore rispetto a quella della nuvola.

Poiché infatti la (2.3.35) risulta valida per tempi maggiori della scala integrale T_L , cioè in altri termini quando le dimensioni della nuvola eccedono la

⁶Si noti in tal caso che le varianze degli spostamenti (per $\tau \gg T_L$) risultano proporzionali a τ sicché la (01) della nota 5 è consistente con la fisica del processo.

⁷Si noti tuttavia che alcuni autori ne hanno messo in dubbio la correttezza (vedi, per es. Yaglom, 1969).

Figura 3.8: Notazioni.

scala spaziale Lagrangiana L_L caratteristica del moto turbolento, ne consegue che in tali situazioni l'evoluzione della nuvola di inquinante non può descriversi attraverso un'equazione del tipo (2.4.10) con diffusività indipendenti dal tempo.

La teoria cui faremo riferimento nel seguito fu avanzata in forma semplificata da Richardson (1926) e sviluppata successivamente da Batchelor (1952). Essa si propone, in ultima analisi, di predire la crescita della media delle dimensioni della singola nuvola $\langle \ell^2(t) \rangle$. Si tratta dunque di una teoria in un certo senso complementare rispetto a quella di Taylor che consente di predire la crescita delle dimensioni della 'nuvola media', cioè di $L^2(t)$.

3.5.2 I diversi regimi del processo di diffusione (Batchelor, 1950, 1952)

La teoria muove dalla considerazione della probabilità congiunta che due particelle di tracciante inizialmente in \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 si trovino all'istante t in \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 rispettivamente.

Con riferimento al vettore *spostamento* $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{X}_1$ e ai vettori \mathbf{s}_o ed $\mathbf{s}(t)$, che individuano rispettivamente le posizioni relative delle due particelle all'istante iniziale t_o e all'istante t , indicheremo con

$$p(\mathbf{s}, \mathbf{r} | \mathbf{X}_1, \mathbf{s}_o, t_o, t) d\mathbf{s} \quad (3.67)$$

la probabilità che due particelle abbiano posizione relativa individuata da vettore compreso fra \mathbf{s} ed $\mathbf{s} + d\mathbf{s}$, essendo lo spostamento della particella 1 rispetto alla posizione iniziale \mathbf{X}_1 compreso fra \mathbf{r} ed $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ ed essendo \mathbf{s}_o il valore iniziale di \mathbf{s} (vedi figura 2.8).

Integrando in $d\mathbf{r}$ la (2.5.1) si ottiene la probabilità che le due particelle abbiano all'istante t posizione relativa compresa fra \mathbf{s} ed $\mathbf{s} + d\mathbf{s}$, essendo la posizione relativa iniziale compresa fra \mathbf{s}_o ed $\mathbf{s} + d\mathbf{s}_o$, con \mathbf{X}_1 posizione iniziale della particella 1. Poniamo dunque:

$$p(\mathbf{s}) = \int p(\mathbf{s}, \mathbf{r} | \mathbf{X}_1, \mathbf{s}_o, t_o, t) d\mathbf{r} \quad (3.68)$$

Figura 3.9: Schema illustrativo dei diversi regimi del processo.

La funzione densità di probabilità $p(\mathbf{s})$ fu introdotta da Richardson (1926) (che la denominò *distance-neighbor function*) e fu successivamente analizzata da Batchelor (1952), Batchelor e Townsend (1956) e Monin (1960).

La struttura di p non è determinabile in generale in forma chiusa. Molte informazioni possono tuttavia ottenersi sulla base di pure considerazioni dimensionali. Sia dunque L la scala spaziale della macrovorticità e supponiamo che risulti

$$|\mathbf{s}_o| \ll L$$

Per tempi t compresi fra t_o e un qualche tempo caratteristico t_2 si avrà inoltre che

$$|\mathbf{s}(t)| \ll L$$

Ne consegue che i moti di grande scala non influenzano il moto relativo fra le due particelle per valori di t inferiori a t_2 : le velocità delle particelle non differiscono infatti apprezzabilmente su scale di ordine $|\mathbf{s}|$ per effetto dei moti di grande scala. Dunque $p(\mathbf{s})$ non può dipendere da L ; se la turbolenza è omogenea e stazionaria la funzione $p(\mathbf{s})$ non dipende inoltre né da \mathbf{X}_1 né da t_o .

Le scale spaziali da cui \mathbf{s} può dipendere sono dunque $|\mathbf{s}|$, $|\mathbf{s}_o|$ ed η , la scala dei microvortici di Kolmogorov. Inoltre p può dipendere solo da due scale temporali: $\tau = t - t_o$ e τ_η la scala temporale dei microvortici. L'ipotesi implicita è qui che il numero di Reynolds del moto sia sufficientemente grande. Poiché η

e τ_η dipendono soltanto da ν ed ϵ si può scrivere:

$$p = f(|\mathbf{s}|, |\mathbf{s}_o|, \Delta\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}_o, \nu, \tau, \epsilon) \quad (3.69)$$

dove la dipendenza dal prodotto scalare $\Delta\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}_o$ (con $\Delta\mathbf{s} = \mathbf{s} - \mathbf{s}_o$) è inclusa per tener conto della possibile influenza della direzione relativa di \mathbf{s} .

Tuttavia la dipendenza di p da $|\mathbf{s}_o|$ sussiste solo nella misura in cui $|\Delta\mathbf{s}|$ non ecceda di molto $|\mathbf{s}_o|$ con probabilità prossima ad 1. Si può cioè assumere l'esistenza di una scala temporale t_1 (o τ_1) tale che per $t > t_1$ le due particelle hanno sostanzialmente 'dimenticato' la loro posizione relativa iniziale. Naturalmente t_1 dipende da \mathbf{s}_o , ma ci si può attendere che se $|\mathbf{s}_o|$ non è troppo grande t_1 risulti inferiore a t_3 , cioè alla scala dei tempi necessaria per il raggiungimento della fase del processo in cui il moto delle due particelle risulta sostanzialmente indipendente. Ciò succede quando $|\mathbf{s}| \gg L$.

Batchelor (1950, 1952) introduce quindi tre diversi regimi:

- *regime quasi-asintotico*: è il moto delle due particelle nell'intervallo temporale $t_1 < t < t_3$;
- *regime asintotico*: è il moto nell'intervallo $t > t_3$;
- *regime temporale intermedio*: è il moto nell'intervallo $t_1 < t < t_2$, posto che tale intervallo esista, posto cioè che il regime quasi asintotico venga raggiunto prima che la probabilità che $|\mathbf{s}|$ ecceda i valori caratteristici del sub-intervallo inerziale diventi significativa.

Nel regime temporale intermedio la (2.5.2) assume la forma più semplice

$$p = f(|\mathbf{s}|, \nu, \tau, \epsilon) \quad (3.70)$$

Infine se $|\mathbf{s}_o| \gg \eta$ il processo di diffusione non può essere influenzato dalla viscosità sicché

$$p = f(|\mathbf{s}|, \tau, \epsilon) \quad (3.71)$$

3.5.3 La legge di Obukhov (1941) - Batchelor (1950)

Batchelor (1950, 1952) ha ricavato per il caso di turbolenza *isotropa* una serie di importanti risultati relativi ai momenti statistici del vettore aleatorio \mathbf{s} , in particolare per il *tensore della dispersione relativa di due particelle*

$$D_{ij}^r(\tau) = \langle s_i(\tau) s_j(\tau) \rangle \quad (3.72)$$

e per il valor quadratico medio della distanza fra le particelle

$$\langle \mathbf{s}^2(\tau) \rangle = D_{ii}^{(r)}(\tau) \quad (3.73)$$

Essendo

$$D_{ij}^r = \int_{-\infty}^{\infty} s_i s_j p(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \quad (3.74)$$

posto che i regimi intermedio, quasi-asintotico e asintotico siano disgiunti ($t_1 < t_2 < t_3$) e indicata con τ la distanza temporale ($t - t_o$) dall'origine dei tempi, è

ragionevole individuare i seguenti comportamenti.

$$\boxed{\text{i}} \quad |\mathbf{s}_o| \ll L \quad \tau < \tau_2$$

Si ha

$$D_{ij}^r = D_{ij}^r(s_o, \epsilon, \tau, \nu) \quad (3.75)$$

Utilizzando il teorema π segue

$$D_{ij}^r = \epsilon \tau^3 D_{ij}^r \left(\frac{s_o}{\epsilon^{1/2} \tau^{3/2}}, \frac{\tau}{\tau_\eta} \right) \quad (3.76)$$

$$\langle s^2(\tau) \rangle = \epsilon \tau^3 f \left(\frac{s_o}{\epsilon^{1/2} \tau^{3/2}}, \frac{\tau}{\tau_\eta} \right) \quad (3.77)$$

$$\boxed{\text{ii}} \quad \eta \ll |\mathbf{s}_o| \ll L \quad \tau < \tau_2$$

È un caso particolare del caso i) in cui scompare la dipendenza dalla viscosità (cioè da τ/τ_η) nelle (2.5.9, 10, 11).

Si noti che tale comportamento si raggiunge comunque, anche se $|\mathbf{s}_o| \ll \eta$, non appena risulta $|\mathbf{s}| \gg \eta$.

$$\boxed{\text{iii}} \quad \eta \ll |\mathbf{s}_o| \ll L \quad \tau_1 < \tau < \tau_2 \quad (\text{regime intermedio}).$$

In tale regime cessa anche di sussistere la dipendenza di D_{ij}^r ed $\langle s^2 \rangle$ da s_o : le (2.5.10), (2.5.11) si riducono alla semplice struttura

$$D_{ij}^r(\tau) = \frac{1}{3} g \epsilon \tau^3 \delta_{ij} \quad (3.78)$$

$$\langle s^2(\tau) \rangle = g \epsilon \tau^3 \quad (3.79)$$

o, in una forma che vedremo essere particolarmente importante:

$$\frac{d\langle s^3 \rangle}{d\tau} = 3g \epsilon \tau^2 \quad (3.80)$$

Nelle (2.5.12, 13, 14) g rappresenta una costante universale. La (2.5.14) costituisce un fondamentale risultato, sostanzialmente già noto a Landau e Obukhov negli anni '40, come emerge dalla prima edizione russa del trattato di Landau e Lifshitz (1944), ma riscoperto da Batchelor (1950) e successivamente da Ogura, Sekiguchi e Miyakoda (1953). Le (2.5.12, 13) implicano

$$\frac{d\langle s^2 \rangle}{d\tau} = 3g^{1/3} \epsilon^{1/3} (\langle s^2 \rangle)^{2/3} \quad (3.81)$$

La (2.5.15), che fu appunto ottenuta in forma lievemente diversa da Obukhov (1941), rende conto della natura accelerata del processo attraverso cui si incrementa la distanza fra due particelle.

Figura 3.10: Visualizzazione del significato di $\mathcal{C}(\boldsymbol{\chi}, t)$.

3.5.4 L'equazione di diffusione nel regime intermedio

Proponiamoci ora di esaminare la relazione che intercorre fra la funzione di probabilità $p(\mathbf{s})$ per il vettore \mathbf{s} distanza di una coppia di particelle e la concentrazione media $\mathcal{C}(\boldsymbol{\chi}, t)$ ottenuta come media d'insieme della concentrazione delle nuvole corrispondenti alle diverse realizzazioni dopo aver portato i relativi baricentri a coincidere. Si ha

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\chi}, t) = \langle c(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}, t) \rangle \quad (3.82)$$

essendo

$$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \quad (3.83)$$

donde, per la (2.2.9):

$$\langle \sigma_{x_i}^2 \rangle = \frac{1}{M} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \chi_i^2 \mathcal{C}(\boldsymbol{\chi}, t) d\chi_1 d\chi_2 d\chi_3 \quad (3.84)$$

Per tempi superiori a t_1 , cioè quando la coppia di particelle ha *perso memoria* della sua distanza iniziale, se la turbolenza è *omogenea* il comportamento del valor quadratico medio della distanza fra due particelle è identico per tutte le coppie di particelle della nuvola e coinciderà con il comportamento del valor quadratico medio della distanza dal baricentro, cioè di $\langle \chi^2 \rangle$. Dunque:

$$\langle \chi^2 \rangle = \langle s^2 \rangle \quad (3.85)$$

Inoltre, per la (2.5.18) e l'omogeneità segue:

$$\langle \chi^2 \rangle = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2) \mathcal{C}(\boldsymbol{\chi}, t) d\chi_1 d\chi_2 d\chi_3 = \langle \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \sigma_{x_3}^2 \rangle \quad (3.86)$$

o, ricordando la (2.2.13):

$$\langle \chi^2 \rangle = \langle s^2 \rangle = 3\langle \ell^2(t) \rangle \quad (3.87)$$

Infine, ricordando la (2.5.15) segue:

$$\frac{d\langle \ell^2(t) \rangle}{dt} = \gamma \epsilon^{1/3} \langle \ell^2(t) \rangle^{2/3} \quad (3.88)$$

con γ costante universale.

Per analogia con quanto visto nel §2.4 è allora possibile postulare l'esistenza di un'equazione differenziale che governa la funzione $\mathcal{C}(\chi, t)$ della forma

$$\mathcal{C}_{,t} = (D_T \mathcal{C}_{,x_1})_{,x_1} + (D_T \mathcal{C}_{,x_2})_{,x_2} + (D_T \mathcal{C}_{,x_3})_{,x_3} \quad (3.89)$$

con D_T diffusività turbolenta definita nella forma

$$D_T = \frac{1}{6} \frac{d}{dt} \langle \chi^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{d \langle \ell^2 \rangle}{dt} \quad (3.90)$$

o

$$D_T = \alpha \langle \chi^2 \rangle^{2/3} \quad (3.91)$$

con

$$\alpha = \frac{\gamma \epsilon^{1/3}}{2} 3^{-2/3} \quad (3.92)$$

Le (2.5.22) e (2.5.25) sono spesso richiamate come *legge 4/3* o *legge di Richardson* poiché furono ottenute per la prima volta da Richardson (1926) in forma puramente empirica. Si noti che esse sono diretta conseguenza del processo che descrive la struttura della microscala turbolenta. Posto infatti che la diffusività turbolenta D_T sia legata al mixing turbolento prodotto da vortici di scala ℓ appartenente al sub-intervallo inerziale (dunque $\eta \ll \ell \ll L$), segue che D_T dipende solo da ϵ ed ℓ sicché, applicando il teorema π , si ottiene appunto che D_T risulta proporzionale a $\epsilon^{1/3} \ell^{4/3}$. La (2.5.22) fu derivata formalmente per la prima volta da Obukhov (1941) e successivamente da Onsager (1945), von Weiszacker (1948) e Heisenberg (1948).

3.5.5 Verifica sperimentale della Legge 4/3

La prima analisi di dati sperimentali relativi alla dispersione nell'atmosfera è dovuta a Richardson (1926). Questi utilizzò dati relativi alla diffusione di polveri vulcaniche e dati relativi alla viscosità turbolenta e alla diffusività termica dell'atmosfera a diverse quote rilevate da diversi autori fra cui G.I. Taylor. L'ipotesi sottesa era che la diffusività turbolenta di una nuvola di tracciante di diametro z sia dello stesso ordine della viscosità turbolenta o diffusività termica a quota z essendo entrambe determinate dalle componenti vorticosose di scala inferiore o pari a z .

Con l'ausilio di tali dati Richardson fu in grado di stimare i valori di $D_T = D_T(\ell)$ per sei valori di ℓ compresi nell'intervallo 15 m - 1000 km. Tali valori crescono di un fattore 10^7 in tale intervallo evidenziando chiaramente la natura accelerata del processo di diffusione relativa (figura 2.11).

L'accordo fra la legge empirica di Richardson e quella teoricamente derivata è interpretabile come conferma della validità della teoria. Va poi osservato che la validità di una legge 4/3 è stata empiricamente accertata in un intervallo di valori di ℓ assai più ampio di quello previsto dalla teoria di Obukhov-Batchelor. Ciò risulta evidente dalla figura 2.12 che raccoglie dati relativi a misure di campo di diffusione turbolenta in ambiente oceanico raccolti da Okubo (1974) e che si riferiscono ad un intervallo di scale spaziali compreso fra 10 m e 1000 km. Tale risultato non è stato del tutto chiarito ma appare estremamente rilevante.

Figura 3.11: La legge 4/3 empiricamente formulata da Richardson (1926).

Figura 3.12: Verifica sperimentale della legge 4/3.

Ha suscitato qualche perplessità nel passato l'apparente tendenza della costante α a decrescere al crescere della scala spaziale. Una possibile spiegazione di tale osservazione è dovuta a Ozmidov (1965). Questi ha osservato che, poiché α risulta proporzionale a $\epsilon^{1/3}$ ed ϵ è una misura della potenza specifica trasferita dalla macro alla micro-vorticità è ragionevole attendersi che ϵ , e quindi α , diminuiscano al crescere della scala. Si noti che la turbolenza oceanica riceve energia essenzialmente su tre scale: quella associata alle onde (di vento), dell'ordine di 10 m, quella associata a correnti (mareali o inerziali) dell'ordine di 10 km, e quella associata alla circolazione generale, dell'ordine di 1000 km. La potenza specifica trasferita dalle fluttuazioni su tali scale è significativamente diversa; Okubo e Ozmidov (1970) hanno mostrato che ciò rende conto in parte della dispersione dei dati sperimentali. Altre cause sono certamente le differenze nella definizione di D_T ed ℓ nelle diverse analisi e la non conformità del processo reale allo schema teorico di turbolenza omogenea e isotropa: in particolare effetti di non uniformità del moto medio possono indurre apprezzabili

effetti di 'dispersione' nel senso che verrà discusso nel cap. 3.

Per gli scopi della tecnica la (2.5.25) può considerarsi sufficientemente affidabile, con valori di α compresi nell'intervallo

$$\alpha = 0.002 \div 0.01 \text{cm}^2/3 / \text{s}^{-1}$$

3.5.6 Il caso di una sorgente puntuale

La soluzione della (2.5.23) relativa a una sorgente puntuale localizzata nell'origine $|\chi| = 0$ della singola nuvola si scrive

$$C = \frac{1}{[2\pi\langle\chi^2\rangle]^{3/2}} \exp\left[-\frac{\chi^2}{2\langle\chi^2\rangle}\right] \quad (3.93)$$

mentre le (2.5.24, 2.5.25) porgono

$$\langle\chi^2\rangle = [2\alpha(t - t_o)]^3 \quad (3.94)$$

Naturalmente occorre ricordare che le (2.5.27, 2.5.28) valgono solo per $\langle\chi^2\rangle \gg \langle\chi_o^2\rangle$ cioè

$$t - t_o \gg \langle\chi_o^2\rangle^{1/3} \epsilon^{-1/3} \quad (3.95)$$

Anche la (2.5.28), che risulta in accordo con la (2.5.13), è stata sperimentalmente verificata.

3.6 Considerazioni conclusive

Può essere di qualche utilità riassumere le diverse nozioni di concentrazione definite e utilizzate in questo capitolo:

- i) $c(\mathbf{x}, t)$: concentrazione osservata in \mathbf{x} al tempo t conseguente al rilascio di tracciante in \mathbf{X} al tempo t_o .

Il valore di c è quello che direttamente influenza il processo di inquinamento, cioè è il valore avvertito da un organismo presente nel corpo idrico ricettore. Sfortunatamente non esistono metodi adeguati a predire il valore di c .

- ii) $C(\mathbf{x}, t)$: *media d'insieme* delle concentrazioni che si verificano in \mathbf{x} all'istante t nelle diverse realizzazioni del processo di rilascio di tracciante in \mathbf{X} al tempo t_o .

Per tempi sufficientemente grandi successivi al rilascio, cioè maggiori della scala temporale Lagrangiana, l'evoluzione di C è governata da un'equazione di diffusione simile all'equazione di diffusione molecolare con diffusività turbolenta costante (vedi la (2.4.8)), cioè non dipendente dal tempo. La diffusività turbolenta si ottiene come prodotto di una scala spaziale per la scala dell'intensità della turbolenza: il suo valore è assai maggiore della diffusività molecolare.

- iii) $\mathcal{C}(\boldsymbol{\chi}, t)$: concentrazione ottenuta come media d'insieme dei valori della concentrazione nella posizione $\boldsymbol{\chi}$, relativa al centro di massa, che si verificano nelle diverse realizzazioni del processo di rilascio di tracciante in \mathbf{X} al tempo t_o .

La concentrazione $\mathcal{C}(\boldsymbol{\chi}, t)$ non è una *quantità direttamente osservabile*: essa implica infatti una media per sovrapposizione dei baricentri delle singole nuvole, operazione concettualmente significativa ma impossibile da realizzarsi sperimentalmente. Ciò malgrado la nozione risulta importante poiché consente di predire che la diffusività risulta proporzionale alla potenza $4/3$ della scala spaziale caratteristica della nuvola. Si noti tuttavia che tale legge si applica alla *media* su un gran numero di realizzazioni, al caso di *turbolenza omogenea*, dunque *lontano da pareti*, e solo quando le dimensioni della nuvola sono sufficientemente *grandi* perché il processo abbia *perso memoria* delle dimensioni iniziali, ma piccole rispetto alla macroscale turbolenta.

Si è osservato sperimentalmente che la crescita delle singole nuvole può differire largamente dalla media d'insieme e differire molto dalla legge $4/3$. Tale legge è di utilità per studi relativi a diffusione di inquinanti nell'oceano, ma la sua applicazione pone problemi più complessi nel caso dei laghi e degli estuari in cui la turbolenza non è trattabile come omogenea e l'influenza delle pareti è significativa.

Concludendo:

Le singole nuvole crescono con rapidità crescente con le loro dimensioni finché queste diventano grandi rispetto alla macroscale turbolenta. Solo a questo stadio l'evoluzione delle nuvole può essere descritta attraverso un'equazione di diffusione con coefficienti costanti (indipendenti dal tempo).

Esiste una fase intermedia in cui la crescita media delle singole nuvole può essere descritta da un'equazione di diffusione, con diffusività proporzionale alla potenza $4/3$ della dimensione caratteristica della nuvola, purché la turbolenza possa schematizzarsi come omogenea e le pareti siano sufficientemente lontane da non influenzare la crescita.

Capitolo 4

DISPERSIONE LAMINARE E TURBOLENTA

4.1 Introduzione

La nozione di *dispersione* di un tracciante passivo per effetto della *non uniformità spaziale* del moto medio (la media essendo intesa nel senso della turbolenza) è stata sostanzialmente introdotta da G.I. Taylor in una serie di lavori apparsi nel 1953 e 1954, che hanno rappresentato vere e proprie pietre miliari nello sviluppo della ricerca talché si può affermare che l'intero edificio su cui poggia lo studio dei processi di inquinamento ambientale è sostanzialmente fondato sulle idee proposte da Taylor.

Nel primo contributo Taylor esaminò il problema della dispersione longitudinale di un tracciante passivo nel moto laminare uniforme in un condotto a sezione circolare di raggio a (l'importanza di tale problema era anche connessa a un procedimento di misura della velocità media nel moto uniforme nei condotti, fondata sul rilievo nella sezione della concentrazione media di un tracciante passivo immesso sufficientemente a monte della sezione di misura). Taylor mostrò che l'effetto della diffusione molecolare in direzione trasversale e l'effetto differenziale della convezione longitudinale sono tali da far sì che asintoticamente il soluto si disperda simmetricamente in direzione longitudinale rispetto a un osservatore in moto con la velocità media U : la diluizione del tracciante risulta quindi interpretabile come un processo di diffusione longitudinale per la concentrazione media nella sezione, con diffusività longitudinale efficace K pari a $U^2 a^2 / 48D$. Il valore di K risulta di diversi ordini di grandezza superiore al valore della diffusività molecolare D .

L'analisi di Taylor trascurava gli effetti della diffusione molecolare in direzione longitudinale e risultava valida per tempi sufficientemente grandi. Numerosi lavori successivi hanno rimosso tali limitazioni.

Un'ulteriore, peraltro la principale, limitazione del lavoro di Taylor (1953) fu rimossa da Taylor stesso che nel 1954 presentò l'estensione dell'analisi precedente al caso turbolento.

Innumerevoli lavori successivi hanno applicato ed esteso le idee di Taylor a un gran numero di campi di moto di rilievo per lo studio dei problemi di inqui-

Figura 4.1: Il caso della pura diffusione trasversale.

namento ambientale. In particolare vedremo nei capitoli che seguono come, su tali basi, è possibile stimare la rapidità del processo di dispersione longitudinale di un tracciante passivo nei corsi d'acqua e negli estuari.

In questo capitolo esaminiamo la nozione di *dispersione* e i meccanismi fondamentali attraverso cui essa opera. Ribadiamo e sollecitiamo il lettore a riflettere sul fatto che la comprensione di tali meccanismi risulta cruciale per la comprensione della gran parte dei processi di dispersione di inquinanti nell'ambiente.

4.2 Dispersione laminare unidirezionale stazionaria

4.2.1 Il caso della pura diffusione trasversale

È opportuno far riferimento per semplicità al caso del moto in un condotto piano. Sia $2d$ la distanza fra le pareti. Ipotizziamo inoltre che la distribuzione di velocità sia uniforme nella sezione e pari a U . Ciò è molto vicino alla realtà in prossimità dell'imbocco, dove gli strati limite non risultano ancora pienamente sviluppati. Trascurando la diffusione longitudinale, l'equazione della diffusione-convezione rispetto al riferimento cartesiano in figura 3.1 si scrive:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (4.1)$$

Utilizzando un sistema mobile descritto dalla variabile \hat{x} con

$$\hat{x} = x - Ut \quad (4.2)$$

la (3.2.1) diventa

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (4.3)$$

che va risolta con le condizioni al contorno

$$c_{,y}|_{y=\pm d} = 0 \quad (4.4a)$$

$$c|_{t=0} = c_o(y) \quad (4.4b)$$

Figura 4.2: Notazioni.

Le (3.2.3, 4) si risolvono agevolmente utilizzando il metodo della separazione delle variabili. Poniamo dunque:

$$c = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \exp(-\alpha_n t) + c_{oo} \quad (4.5)$$

La (3.2.5) soddisfa alla (3.2.3) purché sia soddisfatta l'equazione:

$$F_{n,yy} + \frac{\alpha_n}{\mathcal{D}} F_n = 0 \quad (4.6)$$

La soluzione della (3.2.6) che soddisfa alla (3.2.4a) è

$$F_n = c_{no} \cos\left(\sqrt{\frac{\alpha_n}{\mathcal{D}}} y\right) \quad \alpha_n = \frac{n^2 \pi^2}{d^2} \mathcal{D} \quad (4.7)$$

donde

$$c = \sum_{n=1}^{\infty} c_{no} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{d^2} \mathcal{D} t\right) \cos(n\pi y/d) + c_{oo} \quad (4.8)$$

con c_{no} costanti che si determinano imponendo la condizione iniziale (3.2.4b).

Dunque le componenti della soluzione (3.2.8) decadono esponenzialmente con scala temporale T_D (convenzionalmente pari al tempo necessario perché le variazioni trasversali di c si riducano di un fattore $1/e$ rispetto al valore iniziale).

Si ha:

$$T_D = \frac{d^2}{\pi^2 \mathcal{D}} \quad (4.9)$$

L'analisi precedente si estende facilmente al caso del moto in un condotto a sezione circolare. Assumiamo ancora il moto uniformemente distribuito nella sezione. Sia dunque U la velocità longitudinale, posta costante (vedi figura 3.2).

Consideriamo inoltre un riferimento cartesiano solidale con il moto; dette (x, r, θ) le coordinate cilindriche fisse, introduciamo cioè una coordinata longitudinale \hat{x} riferita al sistema mobile nella forma

$$\hat{x} = x - Ut \quad (4.10)$$

con t variabile temporale.

L'equazione della diffusione-convezione molecolare si scrive in tal caso

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \mathcal{D} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{\partial^2 c}{\partial \hat{x}^2} \right) \quad (4.11)$$

Alla (3.2.11) va poi associata la condizione di impermeabilità delle pareti, dunque

$$\left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (4.12)$$

essendo a il raggio del condotto, e la condizione iniziale.

Ricerchiamo una soluzione del sistema (3.2.11, 12) indipendente da \hat{x} attraverso il metodo della separazione delle variabili. Poniamo dunque:

$$c = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\alpha_n t) F_n(r) \quad (4.13)$$

Sostituendo la (3.2.13) nella (3.2.11) si ottiene un'equazione di Bessel di soluzione $J_0(r\alpha_n^{1/2}\mathcal{D}^{-1/2})$, con J_n funzione di Bessel di ordine n e α_n costanti che si ottengono come soluzioni dell'equazione

$$J_1(a\alpha_n^{1/2}\mathcal{D}^{-1/2}) = 0 \quad (4.14)$$

Segue

$$c = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\alpha_n t) J_0(r\alpha_n^{1/2}\mathcal{D}^{-1/2}) \quad (4.15)$$

Le componenti della soluzione (3.2.15) decadono dunque ancora rispetto ai valori iniziali con rapidità esponenziale. L'esponente α_n minimo si ottiene dalla (3.2.14) e soddisfa alla relazione

$$a\alpha_n^{1/2}\mathcal{D}^{-1/2} = 3.8 \quad (4.16)$$

Dunque il tempo scala del processo di decadimento è dell'ordine di T_D con

$$T_D = \frac{a^2}{(3.8)^2 \mathcal{D}} \quad (4.17)$$

In altre parole, in assenza di effetti convettivi una distribuzione di concentrazione variabile nella direzione trasversale degenera verso una distribuzione uniforme in un tempo dell'ordine di T_D . Si tratta di un tempo caratteristico molto grande se \mathcal{D} è la diffusività molecolare. Posto infatti $\mathcal{D} \sim 0$ (10^{-5} cm²/s) ed $a \sim 0$ (1 cm) segue $T_D \sim 0$ (1.5×10^4 s), cioè un tempo dell'ordine delle ore.

Naturalmente il processo è assai più rapido se la diffusione è turbolenta.

4.2.2 Il caso di pura convezione longitudinale non uniforme

Esaminiamo, ora, il caso opposto in cui siano assenti gli effetti diffusivi e la dispersione si manifesti quale pura conseguenza della convezione non uniforme.

Consideriamo dunque il moto unidirezionale in un condotto circolare e assumiamo il moto uniforme stazionario pienamente sviluppato. In regime laminare

Figura 4.3: Il caso della pura convezione longitudinale.

la velocità ha solo componente longitudinale che è distribuita parabolicamente; dunque, con le notazioni in figura 3.3,

$$u = 2U \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (4.18)$$

con U velocità media.

Supponiamo che una massa m di tracciante venga immessa nella sezione $x = 0$ all'istante iniziale $t = 0$. La distribuzione di concentrazione iniziale sia uniforme, sia cioè rappresentabile nella forma

$$c = \frac{m}{\pi a^2} \delta(x) \quad (4.19)$$

L'evoluzione di c è retta da un'equazione di pura convezione, dunque

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u(r) \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (4.20)$$

La soluzione generale della (3.2.20) corrispondente a una condizione iniziale del tipo

$$c = f(x, r) \quad (4.21)$$

è

$$c = f[x - u(r)t, r] \quad (4.22)$$

In particolare nel caso della (3.2.18):

$$c = \frac{m}{\pi a^2} \delta \left[x - 2U \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) t \right] \quad (4.23)$$

La (3.2.23) implica che la massa di soluto contenuta in una striscia di spessore infinitesimo dr viene semplicemente trasportata in direzione longitudinale a

distanze tali che ad ogni istante la nuvola di tracciante assume l'assetto di un paraboloide con massimo in asse.

Dalla (3.2.23) si risale agevolmente alla distribuzione della concentrazione media nella sezione.

La massa di tracciante contenuta fra le sezioni x ed $x + dx$ è la stessa che risultava contenuta inizialmente entro la corona circolare di raggio r e larghezza dr essendo r ed x legate dall'equazione del paraboloide in cui è localizzato il tracciante. Dunque

$$r^2 = -\frac{a^2}{2Ut}(x - 2Ut) \quad (0 < x < 2Ut) \quad (4.24)$$

donde

$$2rdr = -\frac{a^2}{2Ut}dx \quad (4.25)$$

Segue che la massa contenuta in tale intervallo è

$$\frac{m}{\pi a^2} 2\pi r |dr| = \frac{m}{\pi a^2} \frac{a^2}{4Utr} (dx 2\pi r) \quad (4.26)$$

e la concentrazione media \bar{c} nella sezione è quindi:

$$\bar{c} = \frac{m}{2\pi a^2 Ut} \quad (4.27)$$

Essa decade nel tempo, si ha cioè un effetto di dispersione associato a puri effetti convettivi (vedi figura 3.3).

4.2.3 Dispersione ovvero effetto combinato di convezione longitudinale non uniforme e diffusione trasversale: teoria di Taylor (1953)

Taylor (1953) osservò sostanzialmente che il processo di dispersione reale è il risultato dell'azione combinata dei due processi di convezione non uniforme e diffusione trasversale; in particolare:

- il carattere non uniforme della convezione fa sì che la rapidità con cui aumenta la distanza fra le particelle di tracciante risulti superiore rispetto al caso in cui l'unico meccanismo operante sia quello diffusivo;
- la diffusione trasversale fa sì che in un tempo sufficientemente lungo ogni molecola di tracciante abbia visitato l'intera sezione, essendo così assoggettata all'azione convettiva caratteristica di ciascun punto della sezione.

Dopo un tempo sufficientemente lungo è quindi lecito attendersi che la velocità media di ciascuna molecola sia sostanzialmente uguale alla velocità media nella sezione. Inoltre la sua posizione risulta sostanzialmente indipendente dalla posizione iniziale. Rispetto ad un osservatore in moto con la velocità media nella sezione la molecola di tracciante compie quindi una successione di movimenti che, se osservati per un periodo sufficientemente lungo possono essere in avanti

o indietro con uguale probabilità e danno luogo a un processo di *random walk* molto simile a quello che caratterizza i processi di diffusione. In altre parole l'effetto combinato della convezione non uniforme e della diffusione trasversale equivale a un processo di diffusione longitudinale con diffusività efficace, tuttavia, assai diversa da quella molecolare.

Una stima della diffusività efficace (o del *coefficiente di dispersione*) si ottiene agevolmente se si osserva che il processo di dispersione è sostanzialmente analogo a un processo di diffusione turbolenta caratterizzato da fluttuazioni di velocità dell'ordine della velocità media U e da scala temporale lagrangiana T_ℓ che è dell'ordine del tempo che la particella impiega per visitare l'intera sezione, cioè della scala temporale del processo di miscelamento trasversale. Quest'ultimo risulta, come si è visto al punto **a**, dell'ordine di a^2/\mathcal{D} . Dunque, ricordando la teoria di Taylor della diffusione per movimenti continui, segue

$$K = \langle u'^2 \rangle T_\ell \sim 0 \left(\frac{U^2 a^2}{\mathcal{D}} \right)$$

Fu ancora Taylor (1953) a derivare una relazione di questo tipo sulla base di una formulazione teorica del tutto diversa. Tale formulazione può essere applicata tanto al caso della dispersione laminare come a quello della dispersione turbolenta.

Consideriamo dunque il caso in cui siano presenti sia effetti convettivi sia effetti diffusivi.

Introduciamo un sistema di assi $\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta}$ solidale col moto medio, dunque

$$\hat{x} = x - Ut \quad \hat{r} = r \quad \hat{\theta} = \theta \quad (4.28)$$

L'equazione di diffusione-convezione diventa:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \left(1 - 2 \frac{\hat{r}^2}{a^2} \right) \frac{\partial c}{\partial \hat{x}} = \mathcal{D} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial c}{\partial \hat{r}} \right) \quad (4.29)$$

Al fine di determinare la soluzione della (3.2.29) con la condizione al contorno

$$\left. \frac{\partial c}{\partial \hat{r}} \right|_{\hat{r}=a} = 0 \quad (4.30)$$

è opportuno introdurre variabili adimensionali. A tale scopo definiamo

$$\eta = \frac{\hat{r}}{a} \quad (4.31)$$

donde la (3.2.29) assume la forma:

$$\frac{a^2}{\mathcal{D}} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{U a^2}{\mathcal{D}} (1 - 2\eta^2) \frac{\partial c}{\partial \hat{x}} = \left(\frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial c}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 c}{\partial \hat{x}^2} a^2 \right) \quad (4.32)$$

La (3.2.32) suggerisce che sussiste un bilancio fra convezione longitudinale e diffusione trasversale se si analizza il problema su una scala temporale pari a

(a^2/\mathcal{D}) e su una scala spaziale longitudinale (Ua^2/\mathcal{D}). Ciò richiede di definire le seguenti variabili adimensionali

$$T = \frac{t}{a^2/\mathcal{D}} \quad X = \frac{\hat{x}}{Ua^2/\mathcal{D}} \quad (4.33)$$

La (3.2.32) diventa allora:

$$\frac{\partial c}{\partial T} + (1 - 2\eta^2) \frac{\partial c}{\partial X} = \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial c}{\partial \eta} + \frac{1}{(Pe)^2} \frac{\partial^2 c}{\partial X^2} \quad (4.34)$$

dove

$$Pe = \frac{Ua}{\mathcal{D}} = ReSc \quad (4.35)$$

con

$$Re = \frac{Ua}{\nu} \quad Sc = \frac{\nu}{\mathcal{D}} \quad (4.36)$$

Il numero di Peclet Pe è in generale molto grande essendo grandi sia il numero di Reynolds Re sia il numero di Schmidt Sc . Ciò implica che in prima approssimazione la diffusione longitudinale risulta trascurabile e la (3.2.34) diventa

$$\frac{\partial c}{\partial T} + (1 - 2\eta^2) \frac{\partial c}{\partial X} = \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial c}{\partial \eta} \quad (4.37)$$

Taylor (1953) genialmente osservò che esiste una soluzione della (3.2.37) per la quale:

- risulta trascurabile il termine in $\partial c/\partial T$
- risultano piccole le variazioni di c rispetto al valor medio nella sezione.

Precisamente Taylor (1953) assume

$$c = \bar{c} + \frac{d\bar{c}}{dX} g(\eta) \quad (4.38)$$

con

$$g \sim 0(1) \quad \frac{d\bar{c}}{dX} \ll \bar{c} \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial T} \ll \frac{\partial \bar{c}}{\partial X} \quad (4.39)$$

Sostituendo la (3.2.38) nella (3.2.37) e utilizzando le approssimazioni (3.2.39) (che implicano si noti anche la trascurabilità del termine in $\partial^2 \bar{c}/\partial X^2$) segue:

$$(1 - 2\eta^2) = g_{,\eta\eta} + g_{,\eta}/\eta \quad (4.40a)$$

$$g_{,\eta} = 0 \quad \eta = 1 \quad (4.40b)$$

$$\int_0^1 g\eta d\eta = 0 \quad (4.40c)$$

dove la condizione (3.2.40c) deriva dalla stessa definizione di \bar{c} , ricordando la (3.2.38).

Il sistema (3.2.40) si integra immediatamente in forma chiusa e fornisce

$$4g = \eta^2 - \frac{1}{2}\eta^4 - \frac{1}{3} \quad (4.41)$$

Figura 4.4: La soluzione asintotica di Taylor.

Le (3.2.38), (3.2.41) e la figura 3.4 mostrano che l'assetto che tende asintoticamente a realizzarsi è tale che la diffusione trasversale tende ad accumulare materiale verso l'asse della condotta, dove la convezione è più forte, a valle del picco di concentrazione media dove si ha $d\bar{c}/dX > 0$, mentre opera in senso inverso a monte del picco. Tale effetto tende a ridurre il meccanismo di allontanamento delle particelle di soluto, cioè il processo di dispersione che si realizzerebbe per effetto puramente convettivo.

Inoltre la concentrazione media nella sezione deve decadere nello spazio e nel tempo. Ciò può evidenziarsi osservando che, mediando la (3.2.37) sulla sezione, si ottiene

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} \left(g_o \frac{\partial \bar{c}}{\partial X} \right) = 0 \quad (4.42)$$

con

$$g_o = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - 2\eta^2) \left(\eta^2 - \frac{1}{2}\eta^4 - \frac{1}{3} \right) \eta d\eta = -\frac{1}{48} \quad (4.43)$$

donde

$$\bar{c} = \text{cost } T^{-1/2} \exp \left[-\frac{48X^2}{4T} \right] \quad (4.44)$$

La (3.2.44) fornisce numerose importanti informazioni. La prima, e più importante, è il fatto che la concentrazione media assume asintoticamente una distribuzione di tipo Gaussiano: ciò suggerisce che il processo di dispersione equivale ad un processo di diffusione con diffusività efficace K pari a

$$K = \frac{a^2 U^2}{48\mathcal{D}} \quad (4.45)$$

Tale risultato emerge peraltro chiaramente osservando che la (3.2.42), tornando a coordinate dimensionali, si scrive

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \left(\frac{a^2 U^2}{48\mathcal{D}} \right) \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \hat{x}^2} \quad (4.46)$$

La (3.2.46) rappresenta appunto, rispetto a un osservatore in moto con la velocità media, un processo di diffusione per \bar{c} caratterizzato da diffusività espressa dalla (3.2.45). Il coefficiente K è spesso denominato *coefficiente di dispersione*.

Tale risultato è di grande importanza e può essere ulteriormente compreso calcolando il flusso di massa di tracciante che attraversa la generica sezione solidale al moto medio. Dalla (3.2.46), e tornando a variabili dimensionali, si ha infatti:

$$\dot{m} = \left[\int_0^1 \left[\bar{c} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial X} g(\eta) \right] (1 - 2\eta^2) 2\pi\eta d\eta \right] Ua^2 = - \left(\frac{1}{48} \frac{a^2 U^2}{\mathcal{D}} \right) \frac{\partial \bar{c}}{\partial \hat{x}} (\pi a^2) \quad (4.47)$$

dunque

$$q_x = \frac{\dot{m}}{\pi a^2} = -K \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \quad (4.48)$$

La (3.2.48) rappresenta una legge alla Fick e chiarisce ulteriormente il significato di K .

La (3.2.44) ci consente anche di chiarire i limiti di validità dell'analisi di Taylor (1953). Si ha:

$$\frac{1}{\bar{c}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial X} = -24 \frac{X}{T} \quad (4.49)$$

$$\frac{\bar{c}_{,T}}{\bar{c}_{,X}} = \frac{1}{48X} - \frac{1}{2} \left(\frac{X}{T} \right) \quad (4.50)$$

Dunque lo schema di Taylor sembra significativo per $T \rightarrow \infty$ ed $X \rightarrow \infty$ con $X/T \rightarrow 0$.

Vedremo nel seguito come l'approccio di Taylor possa essere giustificato nell'ambito di uno schema perturbativo razionale di cui costituisce la soluzione al minimo ordine di approssimazione.

Notiamo, per concludere, come sia apparentemente sorprendente il risultato per cui il coefficiente di dispersione longitudinale risulta *inversamente proporzionale* alla diffusività molecolare. Ciò implica che K assume valori molto più grandi di \mathcal{D} . In particolare la diffusività molecolare del sale in acqua è pari a 10^{-5} cm²/s; per un condotto di diametro pari a 1 cm e picco di velocità pari a 1 cm/s si ha $K = 130$ cm²/s, un valore circa 10^7 volte superiore al valore della diffusività molecolare.

Si noti tuttavia che la soluzione di Taylor risulta valida solo a valle di un transitorio iniziale la cui durata è dell'ordine di a^2/\mathcal{D} , un tempo molto grande.

Più recentemente Aris (1956) e Chatwin (1970) hanno ulteriormente sviluppato la teoria di Taylor in modo da estenderne la validità a valori inferiori di T .

4.2.4 Estensione della teoria di Taylor: il contributo di Chatwin (1970)

La (3.2.44) ha suggerito a Chatwin (1970) l'opportunità di tentare di inquadrare l'analisi del fenomeno in uno schema perturbativo razionale utilizzando quali variabili, ξ , η e τ definiti nella forma

$$\xi = \frac{X}{(mT)^{1/2}} \quad \tau = (mT)^{1/2} \quad (4.51a, b)$$

con m costante che verrà scelta nel seguito in modo da semplificare al massima la struttura della soluzione.

Sia dunque:

$$c = c(\xi, \eta, \tau) \quad (4.52)$$

Segue

$$\frac{\partial c}{\partial X} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial c}{\partial \xi} \quad \frac{\partial c}{\partial T} = \frac{m}{2\tau} \frac{\partial c}{\partial \tau} - \frac{m\xi}{2\tau^2} \frac{\partial c}{\partial \xi} \quad (4.53)$$

e la (3.2.37) diventa

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial c}{\partial \eta} + \frac{1}{(Pe)^2 \tau^2} \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} = \frac{m}{2\tau} \frac{\partial c}{\partial \tau} + \left[(1 - 2\eta^2) \frac{1}{\tau} - \frac{m\xi}{2\tau^2} \right] \frac{\partial c}{\partial \xi} \quad (4.54)$$

Chatwin (1970) osserva che, per la (3.2.44) \bar{c} e, quindi c , decadono come τ^{-1} a ξ costante, il che suggerisce di risolvere la (3.2.54) nella forma di una serie di potenze inverse di τ :

$$c = \frac{c_o(\xi, \eta)}{\tau} + \frac{c_1(\xi, \eta)}{\tau^2} + \frac{c_2(\xi, \eta)}{\tau^3} + \dots \quad (4.55)$$

Sostituendo la (3.2.55) nella (3.2.54) si ottiene una sequenza di problemi ai diversi ordini di approssimazione.

$O(\tau^0)$ Al minimo ordine d'approssimazione si ottiene

$$c_{o,\eta\eta} + \frac{1}{\eta} c_{o,\eta} = 0 \quad (4.56a)$$

$$c_{o,\eta}|_{\eta=1} = 0 \quad (4.56b)$$

donde:

$$c_o = f_o(\xi) \quad (4.57)$$

con f_o per il momento arbitraria.

$O(\tau^{-1})$ All'ordine di approssimazione successivo si ottiene:

$$c_{1,\eta\eta} + \frac{1}{\eta} c_{1,\eta} = (1 - 2\eta^2) \frac{df_o}{d\xi} \quad (4.58a)$$

$$c_{1,\eta} = 0 \quad (\eta = 1) \quad (4.58b)$$

donde

$$c_1 = f_1(\xi) + \frac{df_o}{d\xi} g_1(\eta) \quad (4.59)$$

con $g_1(\eta)$ soluzione di un problema identico a quello governato dalle (3.2.40).

$O(\tau^{-2})$ Al secondo ordine di approssimazione si perviene al seguente problema:

$$c_{2,\eta\eta} + \frac{1}{\eta} c_{2,\eta} = (1 - 2\eta^2) \frac{dc_1}{d\xi} - \frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 f_o}{d\xi^2} - \frac{m}{2} \xi \frac{df_o}{d\xi} - \frac{m}{2} f_o \quad (4.60a)$$

$$c_{2,\eta} = 0 \quad (\eta = 1) \quad (4.60b)$$

Poiché risulta

$$\int_0^1 \left(c_{j,\eta\eta} + \frac{c_{j,\eta}}{\eta} \right) 2\pi\eta d\eta = 2\pi\eta c_{j,\eta} \Big|_0^1 = 0 \quad (4.61)$$

con j arbitrario, la condizione che la media del secondo membro delle (3.2.60) risulti nulla fornisce un'equazione differenziale per f_o , precisamente

$$\left(4 + \frac{Pe^2}{48} \right) f_{o,\xi\xi} + Pe^2 \left(\frac{m}{2} \xi \right) f_{o,\xi} + Pe^2 \frac{m}{2} f_o = 0 \quad (4.62)$$

donde

$$f_o = \alpha_{oo} \exp \left(-\frac{\xi^2}{2} \right) \quad (4.63)$$

avendo posto

$$m = \left(\frac{1}{24} + \frac{8}{Pe^2} \right) \quad (4.64)$$

Nota la struttura di f_o è nota anche c_o ; si può quindi procedere a determinare la soluzione per c_1 in funzione della funzione ancora incognita f_1 . Il procedimento può essere iterato alle approssimazioni successive. Chatwin (1970) ottiene

$$c_j(\xi, \eta) = F_j(\xi, \eta) \exp \left(-\frac{1}{2} \xi^2 \right) \quad (4.65)$$

con

$$\begin{aligned} F_o &= \alpha_{oo} g_o H_o(\xi) \\ F_1 &= (\alpha_{1o} g_o + \alpha_{oo} g_1) H_1(\xi) + (\alpha_{11} g_o) H_3(\xi) \\ F_2 &= (\alpha_{2o} g_o + \alpha_{1o} g_1 + \alpha_{oo} g_2) H_2(\xi) + (\alpha_{21} g_o + \alpha_{11} g_1) H_4(\xi) + \alpha_{22} g_o H_6(\xi) \\ F_3 &= (\alpha_{3o} g_o - \alpha_{2o} g_1 + \alpha_{1o} g_2 - \alpha_{oo} g_3) H_3(\xi) \\ &+ (\alpha_{31} g_o - \alpha_{21} g_1 + \alpha_{11} g_2) H_5(\xi) \\ &+ (\alpha_{32} g_o - \alpha_{22} g_1) H_7(\xi) + \alpha_{33} g_o H_9(\xi) \end{aligned} \quad (4.66)$$

Nelle (3.2.66):

- H_n è il polinomio di Hermite di grado n che soddisfa all'equazione:

$$H_n(\xi) \exp \left(-\frac{1}{2} \xi^2 \right) = (-1)^n \frac{d^n}{d\xi^n} \exp \left(-\frac{1}{2} \xi^2 \right) \quad (n \geq 1) \quad (4.67a)$$

$$H_o = 1 \quad (4.67b)$$

- $g_n(\eta)$ sono le soluzioni di equazioni ottenute ai diversi ordini di approssimazione, in particolare

$$g_o = 1 \quad g_1 = \frac{1}{4} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \eta^4 - \frac{1}{3} \right)$$

$$\begin{aligned}
g_{2,\eta\eta} + \frac{1}{\eta}g_{2,\eta} &= (1 - 2\eta^2)g_1 - 2 \int_0^1 (1 - 2\eta^2)g_1\eta d\eta \\
g_{3,\eta\eta} + \frac{1}{\eta}g_{3,\eta} &= (1 - 2\eta^2)g_2 - 2 \int_0^1 (1 - 2\eta^2)g_2\eta d\eta \\
&\quad - 2g_1 \int_0^1 (1 - 2\eta^2)g_1\eta d\eta \quad (4.68)
\end{aligned}$$

- le costanti α_{rs} sono funzioni lineari delle α_{ro} (le uniche arbitrarie): esse sono completamente determinate dalle condizioni di integrabilità delle equazioni ai diversi ordini di approssimazione, ottenute mediando le stesse sulla sezione;
- le costanti α_{ro} sono determinate dalla distribuzione iniziale di c ; Chatwin (1970) mostra che per valori grandi di T si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{c} d\hat{x} = \sqrt{2\pi}(aPe)\alpha_{oo} \quad (4.69)$$

Dunque la costante α_{oo} risulta proporzionale alla massa totale di tracciante.

Inoltre

$$\hat{x}_g = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{c}\hat{x}d\hat{x}}{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{c}d\hat{x}} = \frac{\alpha_{1o}}{\alpha_{oo}}(aPe) \quad (4.70a)$$

donde

$$\alpha_{1o} = \frac{\alpha_{oo}}{aPe}\hat{x}_g \quad (4.70b)$$

cioè il baricentro della nuvola di tracciante risulta asintoticamente stazionario (rispetto al sistema di riferimento in moto con la velocità media). È allora opportuno scegliere l'origine del sistema di coordinate in modo che risulti nullo \hat{x}_g . In tal caso segue

$$\alpha_{1o} = 0 \quad (4.71)$$

Il momento del second'ordine si scrive:

$$\mu_2(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\hat{x} - \hat{x}_g)^2 \bar{c} d\hat{x}}{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{c} d\hat{x}} = a^2 Pe^2 \left(m \frac{Dt}{a^2} + 2 \frac{\alpha_{2o}}{\alpha_{oo}} \right) \quad (4.72)$$

dunque μ_2 comprende un contributo proporzionale a t , che risultava presente anche nella soluzione di Taylor ed è indipendente dalle condizioni iniziali, e un ulteriore contributo stazionario dipendente dalle condizioni iniziali.

Analogamente per il momento del terz'ordine si ottiene

$$\mu_3(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\hat{x} - \hat{x}_g)^3 \bar{c} d\hat{x}}{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{c} d\hat{x}} = a^3 Pe^3 \left(6 \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{oo}} m \frac{Dt}{a^2} + 6 \frac{\alpha_{3o}}{\alpha_{oo}} \right) \quad (4.73)$$

Si noti che μ_3 risultava assente nella soluzione di Taylor (1953) e comprende anch'esso due contributi di cui uno dipendente dalle condizioni iniziali.

Chatwin (1970), applicando la teoria al caso del moto in condotti circolari, ottiene i risultati riportati nella figura 3.5. In particolare la figura 3.5 mette a confronto i risultati di Chatwin (1970), fino all'ordine τ^{-3} incluso, con quelli di Taylor (1953) per quattro valori di Dt/a^2 compresi fra .125 ed 1.. Essa mostra che:

Figura 4.5: La soluzione di Chatwin (1970) al terz'ordine (—) è paragonata con quella di Taylor (- - -) per diversi valori di T .

- l'asimmetria di \bar{c} risulta evidente per $T = .125$ e decresce al crescere di T risultando ancora apprezzabile per $T = 1$;
- l'effetto del termine in τ^{-3} è di spostare il massimo della distribuzione lievemente a monte del baricentro;
- per $T > 1$ la Gaussiana di Taylor non differisce sostanzialmente dalla soluzione di Chatwin.

4.2.5 Il metodo dei momenti di Aris (1956)

Aris (1956) ha mostrato che il problema della dispersione può essere affrontato con un approccio che non necessita di alcuna delle approssimazioni richieste dalla teoria di Taylor se si fa riferimento, anziché alla distribuzione longitudinale della concentrazione, ai suoi momenti.

Definiamo, dunque, il momento di ordine p della distribuzione di concentrazione rispetto al riferimento mobile descritto dalle coordinate adimensionali X, η, T nella forma

$$C^p = \int_{-\infty}^{\infty} X^p c(X, \eta, T) dX \quad (4.74)$$

assumendo il condotto infinitamente lungo e tale che $c \rightarrow 0$ per $X \rightarrow \pm\infty$.

Applichiamo quindi l'operazione momento di ordine p all'equazione (3.2.34). Essendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} X^p \frac{\partial c}{\partial X} dX = cX^p \Big|_{-\infty}^{\infty} - p \int_{-\infty}^{\infty} cX^{p-1} dX = -pC^{p-1} \quad (4.75)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X^p \frac{\partial^2 c}{\partial X^2} dX = \left[\frac{\partial c}{\partial X} X^p - p c X^{p-1} \right]_{-\infty}^{\infty} + p(p-1) \int_{-\infty}^{\infty} cX^{p-2} dX = p(p-1)C^{p-2} \quad (4.76)$$

segue

$$\frac{\partial C^p}{\partial T} - (1 - 2\eta^2)pC^{p-1} - \frac{1}{Pe^2}p(p-1)C^{p-2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) C^p \quad (4.77)$$

La (3.2.77) definisce una sequenza di equazioni alle derivate parziali concatenate per le funzioni $C^p(\eta, T)$. Esse possono essere risolte utilizzando il metodo della separazione delle variabili, con la condizione al contorno

$$\frac{\partial C^p}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = 1 \quad (p = 0) \quad (4.78)$$

Dalle (3.2.77) possono ricavarsi equazioni per i momenti mediati sulla sezione. Definiamo

$$M^p = \int_0^1 C^p 2\eta d\eta = \overline{C^p} \quad (4.79)$$

Essendo

$$\int_0^1 \left(C_{,\eta\eta}^p + \frac{1}{\eta} C_{,\eta}^p \right) \eta d\eta = 0 \quad (4.80)$$

segue:

$$\frac{dM^p}{dt} = p \int_0^1 (1 - 2\eta^2) 2C^{p-1} \eta d\eta + \frac{p(p-1)}{Pe^2} M^{p-2} \quad (4.81)$$

Si noti che i risultati di Taylor (1953) si ottengono esaminando la soluzione per $t \rightarrow \infty$ dei problemi agli ordini 0, 1 e 2.

Utilizzando i risultati di Aris (1956), Chatwin (1970) ha dimostrato che i valori delle costanti α_{2o} e α_{3o} che compaiono nella soluzione discussa al punto **3.2 d** sono della forma

$$\frac{\alpha_{2o}}{\alpha_{oo}} = \frac{1}{2!} \frac{1}{a^2 Pe^2} \mu_2(0) - 2 \int_0^1 g_1 \eta d\eta \quad (4.82)$$

$$\frac{\alpha_{3o}}{\alpha_{oo}} = \frac{1}{3!} \frac{1}{a^3 Pe^3} \mu_3(0) + 4 \int_0^1 g_1 g_2 \eta d\eta \quad (4.83)$$

e ciò implica che la struttura della distribuzione iniziale della concentrazione ha una modesta influenza sulla struttura della concentrazione per tempi grandi se Pe è grande come si verifica usualmente.

4.3 Dispersione turbolenta unidirezionale stazionaria

4.3.1 Dispersione e diffusione turbolenta

Seguiamo Taylor (1954) e analizziamo la relazione che sussiste fra dispersione turbolenta in un condotto e diffusione turbolenta.

Ricordiamo che in un moto turbolento omogeneo e stazionario caratterizzato da velocità media nulla Taylor (1921) ha mostrato che il valore quadratico medio degli spostamenti x di una particella in una direzione può porsi nella forma

$$\langle x_i^2 \rangle = 2\langle u_i'^2 \rangle t \int_0^\infty \hat{R}_{ii}^L(\xi) d\xi \quad (4.84)$$

dove $\hat{R}_{ii}^L(\xi)$ è la correlazione Lagrangiana (normalizzata) fra la velocità della particella nella direzione x_i ad un certo istante t_o e la velocità della stessa particella all'istante $t_o + \xi$.

Batchelor ha evidenziato che l'analisi di Taylor (1921) può essere correttamente applicata al moto stazionario in un condotto indefinitamente lungo purché si sostituisca x con $\hat{x} = x - Ut$ ed u con $u' = u - U$ essendo U la velocità media nella sezione. Dunque:

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = 2\langle u'^2 \rangle t \int_0^\infty \hat{R}_{xx}^L(\xi) d\xi \quad (4.85)$$

Inoltre la concentrazione della nuvola media soddisfa ad un'equazione di diffusione del tipo

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K \frac{\partial^2 C}{\partial \hat{x}^2} \quad (4.86)$$

con K diffusività turbolenta. La soluzione della (3.3.3) è

$$C = \text{cost } t^{-1/2} \exp \left[-\frac{\hat{x}^2}{4Kt} \right] \quad (4.87)$$

Sostituendo la (3.3.4) nella relazione:

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}^2 C d\hat{x} \quad (4.88)$$

si trova

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = 2Kt \quad (4.89)$$

Le (3.3.2) e (3.3.6) porgono infine

$$K = \langle u'^2 \rangle \int_0^\infty \hat{R}_{xx}^L(\xi) d\xi \quad (4.90)$$

Dunque interpretando la dispersione di materiale come una diffusione turbolenta unidimensionale rispetto ad un osservatore solidale col moto medio si trova che essa può riguardarsi come dovuta ad un coefficiente di diffusione efficace K

Figura 4.6: Schema di moto turbolento piano a superficie libera.

che può essere espresso in funzione della correlazione lagrangiana $\hat{R}_{xx}^L(\xi)$, quantità che risulta tuttavia difficilmente misurabile. Nel 1954 Taylor ha proposto un diverso approccio, del tipo di quello discusso al punto **3.2**, per la stima di K . Prima di esaminare la teoria di Taylor, che si riferisce alla dispersione in condotti a sezione circolare, è opportuno tuttavia esaminare il caso della dispersione in correnti a superficie libera trattato da Elder (1959) con procedimento identico a quello di Taylor (1954).

4.3.2 Dispersione turbolenta in correnti piane a superficie libera (Elder, 1959)

Al fine di analizzare il processo di dispersione di correnti turbolente è necessario muovere dall'equazione della diffusione turbolenta (2.4.10):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla C = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{D}_{xx}^T \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{D}_{yy}^T \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{D}_{zz}^T \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (4.91)$$

dove

$$C = \langle c \rangle \quad \mathbf{V} = \langle \mathbf{v} \rangle \quad (4.92a, b)$$

e le grandezze \mathcal{D}_{xx}^T , \mathcal{D}_{yy}^T e \mathcal{D}_{zz}^T sono le diffusività turbolente nelle tre direzioni degli assi cartesiani.

Consideriamo ora un moto piano turbolento uniforme a superficie libera (vedi figura 3.6).

Sia $\mathbf{V} \equiv (U(z), 0, 0)$ il vettore velocità. Segue $C = C(x, z, t)$ e la (3.3.8) diventa

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U(z) \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{D}_{zz}^T \frac{\partial C}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{D}_{xx}^T \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (4.93)$$

Elder (1959) ricerca una soluzione alla Taylor assumendo

$$C = \bar{C} + \frac{\partial \bar{C}}{\partial \hat{x}} g(z) \quad (4.94)$$

con \bar{C} valor medio di C sulla sezione ed \hat{x} coordinata longitudinale riferita a un sistema mobile con la velocità media U , dunque

$$\hat{x} = x - Ut \quad (4.95)$$

Trascurando la diffusione longitudinale e la derivata locale di C , come già nella soluzione di Taylor (1953), la (3.3.11) sostituita nella (3.3.10) fornisce

$$\frac{d}{dz} \left(\mathcal{D}_{zz}^T \frac{dg}{dz} \right) = [U(z) - U] \quad (4.96)$$

$$\mathcal{D}_{zz}^T g_{,z} = 0 \quad (z = z_r) \quad (4.97a)$$

$$\int_{z_r}^Y g dz = 0 \quad (4.97b)$$

avendo imposto con la (3.3.14a) l'impermeabilità al tracciante della frontiera e indicato con z_r la distanza convenzionale dal fondo alla quale si annulla la velocità e con Y la profondità della corrente.

Elder (1959) risolve il sistema (3.3.13, 14) utilizzando la distribuzione di velocità caratteristica dei moti piani turbolenti a superficie libera che può porsi nella forma

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{k} \ln(z/z_r) \simeq \frac{U}{u_*} + \frac{1}{k} [1 + \ln(\eta)] \quad (4.98)$$

avendo indicato con k la costante di V. Karman, con u_* la velocità d'attrito e con η la coordinata adimensionale z/Y .

L'ulteriore ipotesi necessaria per la soluzione della (3.3.13) è un'ipotesi di chiusura per la diffusività turbolenta. Elder (1959), seguendo Taylor (1954), postula che sussista la cosiddetta *analogia di Reynolds* per la quale si assume che il processo di diffusione turbolenta di quantità di moto sia caratterizzato da diffusività identica a quella che caratterizza il processo di diffusione di qualsiasi tracciante passivo. Dunque:

$$\mathcal{D}_{zz}^T = \nu_T = k u_* \eta (1 - \eta) Y \quad (4.99)$$

essendo ν_T la *viscosità turbolenta*. Sostituendo le (3.3.15, 16) nelle (3.3.13, 14) si ottiene:

$$g = \frac{Y}{k^2} \int_0^\eta \frac{\ln(\zeta) d\zeta}{1 - \zeta} \quad (4.100)$$

Infine, mediando la (3.3.10) nella sezione si trova

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} = -\frac{1}{Y} \int_{z_r}^Y (U(z) - U) g(z) dz \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \hat{x}^2} = K \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \hat{x}^2} \quad (4.101)$$

dove

$$K = -\frac{u_* Y}{k^3} \int_0^1 (\ln \eta + 1) \int_0^\eta \frac{\ln \zeta}{1 - \zeta} d\zeta d\eta \quad (4.102)$$

L'integrale che compare nella (3.3.19) può essere valutato in termini di una serie di funzioni gamma; segue

$$K = 5.86 Y u_* \quad (4.103)$$

Una stima del contributo della diffusione turbolenta longitudinale al coefficiente di dispersione fu proposta da Taylor (1954), e ripresa da Elder (1959), sulla base dell'ipotesi che la struttura della turbolenza sia isotropa, nel qual caso $\mathcal{D}_{xx}^T = \mathcal{D}_{zz}^T = \nu_T$.

La media del termine diffusivo longitudinale può porsi nella forma $\overline{D_{xx}^T} \partial^2 \bar{C} / \partial \hat{x}^2$ con

$$\overline{D_{xx}^T} = \frac{1}{Y} \int_0^Y \nu_T dz = u_* Y \frac{k}{6} = .068 u_* Y \quad (4.104)$$

Dunque il contributo della diffusione longitudinale risulta considerevolmente minore del contributo dispersivo risultante dall'effetto combinato della diffusione trasversale e convezione non uniforme. Si noti che il rapporto fra le (3.3.20) e (3.3.21) fornisce infatti una misura del rapporto fra l'intensità del processo di dispersione e l'intensità del processo di diffusione turbolento.

Sommando alla (3.3.20) il contributo associato alla diffusione longitudinale (3.3.21) si ricava infine la seguente stima del coefficiente di diffusione efficace

$$K = 5.93 u_* Y \quad (4.105)$$

Elder (1959) ha sottoposto a verifica sperimentale i risultati teorici precedenti. Il numero di Reynolds sperimentale era $3.5 \cdot 10^3$, un valore molto basso che rendeva significativo l'effetto del substrato laminare sul processo di dispersione. A ciò va attribuito il lieve scostamento del valore sperimentale 6.3 del rapporto $K/(Y u_*)$ dal valore teorico. Più significativo risultava lo scostamento del valore sperimentale ($.23 Y u_*$) del contributo della sola diffusione turbolenta longitudinale dal valore teorico. Ciò è da attribuire alla non correttezza della ipotesi di isotropia. Si noti che sommando il contributo (3.3.20) al valore sperimentale del contributo della diffusione longitudinale si ottiene un valore per K pari a $6.1 Y u_*$ che differisce solo del 3% dal valore complessivo ottenuto sperimentalmente.

4.3.3 Dispersione turbolenta in condotti a sezione circolare (Taylor, 1954)

Il caso della dispersione turbolenta in condotti circolari è quello originariamente risolto da Taylor (1954). L'analisi è simile a quella proposta al punto **3.3 b**. È qui opportuno fare riferimento a coordinate cilindriche (vedi la figura 3.2).

La (3.3.10) diventa

$$\frac{\partial C}{\partial t} + [U(r) - U] \frac{\partial C}{\partial \hat{x}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mathcal{D}_{rr}^T \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\mathcal{D}_{xx}^T \frac{\partial C}{\partial \hat{x}} \right) \quad (4.106a)$$

$$\frac{\partial C}{\partial r} = 0 \quad (r = a) \quad (4.106b)$$

dove a è il raggio del condotto e U la velocità media sulla sezione. Poniamo

$$C = \bar{C} + \frac{\partial \bar{C}}{\partial \hat{x}} g(\eta) a \quad \eta = \frac{r}{a} \quad (4.107)$$

e utilizzando l'analogia di Reynolds

$$\mathcal{D}_{rr}^T = \nu_T = \frac{\tau}{\rho \partial U / \partial r} = \frac{\tau_o(r/a)}{\rho \partial U / \partial r} \quad (4.108)$$

Taylor (1954) pone

$$\frac{U}{u_*} = \frac{U}{u_*} + f(\eta) \quad (4.109)$$

con

$$f(\eta) = 3.73 + \frac{1}{k} \ln(1 - \eta) \quad (4.110)$$

Segue

$$f(\eta) = \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left[\frac{\eta^2}{f'} \frac{dg}{d\eta} \right] \quad (4.111)$$

donde, integrando una prima volta analiticamente ed una seconda volta numericamente, si perviene alla struttura della funzione $g(\eta)$. Operando come nel caso piano si perviene poi all'espressione del coefficiente di dispersione nella forma:

$$K = -\frac{1}{\pi a^2} \int_0^1 (U - U) a g(\eta) a^2 2\pi \eta d\eta = -u_* a \int_0^1 f(\eta) g(\eta) d\eta \quad (4.112)$$

Taylor (1954) effettua l'integrale (3.3.29) numericamente e ottiene:

$$K = 10.06 a u_* \quad (4.113)$$

L'effetto della diffusione turbolenta longitudinale può essere messo in conto in modo analogo a quanto visto nel caso piano. Taylor (1954) ottiene un contributo aggiuntivo pari a $.05 a u_*$ nell'ipotesi di struttura isotropa della diffusività turbolenta. Dunque il valore complessivo di K ottenuto da Taylor è

$$K = 10.1 a u_* \quad (4.114)$$

Taylor (1954) ha sottoposto i risultati teorici ad accurata verifica sperimentale utilizzando come tracciante del sale la cui concentrazione media nella sezione veniva misurata inserendo due elettrodi alimentati con corrente alternata e rilevando le variazioni di conduttività del fluido che attraversava gli elettrodi. Taylor (1954) ha esaminato sia il caso di condotti lisci sia quello di condotti scabri, evidenziando che nel primo caso la distribuzione di concentrazione media risultava marcatamente asimmetrica con fronte più rapido della coda. La causa di ciò è da attribuirsi al fatto che parte del sale veniva intrappolato nel substrato laminare, relativamente spesso, da cui sfuggiva solo per diffusione molecolare in un tempo assai maggiore di quello richiesto nella regione centrale dove la diffusione trasversale era turbolenta. Il coefficiente di dispersione assumeva quindi valori un po' maggiori di quelli teorici.

Nel caso di condotti scabri le osservazioni sperimentali comprovano invece con approssimazione notevole le previsioni teoriche.